UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN.

MATEMÁTICAS V.

Profesor: Federico Armando Vázquez Tapia.

Clave: 1738

Índice.

I. Introducción.

Naturaleza de la investigación de operaciones.

Como su nombre lo dice, la investigación de operaciones significa "hacer investigación sobre las operaciones". Entonces, la investigación de operaciones se aplica a problemas que se refieren a la conducción y coordinación de operaciones (o actividades) dentro de una organización. La naturaleza de la organización es esencialmente inmaterial y, de hecho, la investigación de operaciones se ha aplicado de manera extensa an áreas tan diversas como la manufactura, el transporte, la constitución, las telecomunicaciones, la planeación financiera, el cuidado de la salud, la milicia y los servidores públicos, por nombrar sólo unas cuantas. Así, la gama de aplicaciones es extraordinariamente amplia.

La parte de investigación en el nombre significa que la investigación de operaciones usa un enfoque similar a la manera en que se lleva a cabo la investigación en los campos científicos establecidos. En gran medida , se usa el método científico para investigar el problema en cuestión. (De hecho, en ocasiones se usa el término ciencias de al administración como sinónimo de investigación de operaciones.) En particular, el proceso comienza por la observación cuidadosa y la formulación del problema incluyendo la recolección de los datos pertinentes. El siguiente paso es la construcción de un modelo científico (por lo general matemático) que intenta abstraer la esencia del problema real. En este punto se propone la hipótesis de que el modelo es una representación lo suficientemente precisa de las características esenciales de la situación como para que las conclusiones (soluciones) obtenidas sean válidas también para el problema real. Después, se llevan a cabo los experimentos adecuados para probar esta hipótesis, modificarla si es necesario y eventualmente verificarla. (Con frecuencia este paso se conoce como la validación del modelo.) Entonces, en cierto modo, la investigación de operaciones incluye la investigación científica creativa de las propiedades fundamentales de las operaciones. Sin embargo, existe más que esto. En particular, la IO se ocupa también de la administración práctica de la organización. Así, para tener éxito, deberá también proporcionar conclusiones claras que pueda usar el tomador de decisiones cuando las necesite.

Una característica más de la IO es su amplio punto de vista. Como quedó implícito en la sección anterior, la IO adopta un punto de vista organizacional, de esta manera, intenta resolver los conflictos de intereses entre las componentes de la organización de forma que el resultado sea el mejor para la organización completa. Esto no significa que el estudio de cada problema deba considerar en forma explícita todos los aspectos de la organización sino que los objetivos que se buscan deben ser consistentes con los de toda ella.

Una característica adicional es que la IO intenta encontrar una mejor solución (llamada solución óptima) para el problema bajo consideración. (Decimos una mejor solución y no la mejor solución porque pueden existir muchas soluciones que empaten como la mejor.) En lugar de contentarse con mejorar el estado de las cosas, la meta es identificar el mejor curso de acción posible. Aun cuando debe interpretarse con todo cuidado en términos de las necesidades reales de la administración, esta "búsqueda de la optimidad" es un aspecto importante dentro de la investigación de operaciones.

Todas estas características llevan de manera casi natural a otra. Es evidente que no puede esperarse que un solo individuo sea un experto en todos los múltiples aspectos del trabajo de investigación de operaciones o de los problemas o de los problemas que se estudian; se requiere un grupo de individuos con diversos antecedentes y habilidades. Entonces, cuando se va a emprender un estudio de investigación de operaciones completo de un nuevo problema, por lo general es necesario emplear el término de equipo. Este debe incluir individuos con antecedentes firmes en matemáticas, estadística y teoría de probabilidades, al igual que en economía, administración de empresas, ciencias de la computación, ingeniería, ciencias físicas, ciencias del comportamiento y, por supuesto, en las técnicas especiales de IO. El equipo también necesita tener la experiencia y las habilidades necesarias para permitir la consideración adecuada de todas las ramificaciones del problema a través de la organización.

Impacto de la investigación de operaciones.

La Investigación de operaciones ha tenido un impacto impresionante en el mejoramiento de la eficiencia de numerosas organizaciones en todo el mundo. En el proceso, la IO ha hecho contribuciones significativas al incremento de la productividad dentro de la economía de varios países.

Riesgo al aplicar la Investigación de Operaciones.

Al aplicar la IO al estudio de sistemas y a la resolución de problemas se corre el riesgo de tratar de manipular los problemas para buscar que se ajusten a las diferentes técnicas, modelos de algoritmos establecidos en lugar de analizar los problemas y buscar resolverlos obteniendo las soluciones mejores, utilizando los métodos apropiados, es decir resolver el problema utilizando los métodos que proporcionan las mejores soluciones y no buscar ajustar el problema a un método específico.

Para llegar a hacer un uso apropiado de la IO, es necesario primero comprender la metodología para resolver los problemas, así como los fundamentos de las técnicas de solución para de esta forma saber cuándo utilizarlas o no en las diferentes circunstancias.

¿Qué es la Investigación de Operaciones?

Como toda disciplina en desarrollo, la investigación de operaciones ha ido evolucionando no sólo en sus técnicas y aplicaciones sino en la forma como la conceptualizan los diferentes autores, en la actualidad no existe solamente una definición sino muchas, algunas demasiado generales, otras demasiado engañosas, aquí seleccionamos dos de las más aceptadas y representativas.

La definición de Churchman, Ackoff y Arnoff: La investigación de Operaciones es la aplicación, por grupos interdisciplinarios, del método científico a problemas relacionados con el control de las organizaciones o sistemas (hombre – máquina), a fin de que se produzcan soluciones que mejor sirvan a los objetivos de la organización.

De ésta definición se pueden destacar los siguientes conceptos:

1. Una organización es un sistema formado por componentes que se interaccionan, unas de estas interacciones pueden ser controladas y otras no.
2. En un sistema la información es parte fundamental, ya que entre las componentes fluye información que ocasiona la interacción entre ellas. También dentro de la estructura de los sistemas se encuentran recursos que generan interacciones. Los objetivos de la organización se refieren a la eficacia y a la eficiencia con que las componentes pueden controlarse, el control es un mecanismo de autocorrección del sistema que permite evaluar los resultados en términos de los objetivos establecidos.
3. La complejidad de los problemas que se presentan en las organizaciones ya no encajan en una sola disciplina del conocimiento, se han convertido en multidisciplinario por lo cual para su análisis y solución se requieren grupos compuestos por especialistas de diferentes áreas del conocimiento que logran comunicarse con un lenguaje común.
4. La investigación de operaciones es la aplicación de la metodología científica a través de modelos matemáticos, primero para representar al problema y luego para resolverlo.

La definición de la sociedad de investigación de operaciones de la Gran Bretaña es la siguiente:

La Investigación de Operaciones es el ataque de la ciencia moderna a los complejos problemas que surgen en la dirección y en la administración de grandes sistemas de hombres, máquinas, materiales y dinero, en la industria, en los negocios, en el gobierno y en la defensa. Su actitud diferencial consiste en desarrollar un modelo científico del sistema tal, que incorpore valoraciones de factores como el azar y el riesgo y mediante el cuál se predigan y comparen los resultados de decisiones, estrategias o controles alternativos. Su propósito es el de ayudar a la gerencia a determinar científicamente sus políticas y acciones.

En relación a ésta definición deben destacarse los siguientes aspectos:

1. Generalmente se asocian los conceptos de dirección y administración a las empresas de tipo lucrativo, sin embargo, una empresa es un concepto más amplio, es algo que utiliza hombres, máquinas, materiales y dinero con un propósito específico; desde este punto de vista, se considera como empresa desde una universidad hasta una armadora de automóviles.
2. Para tratar de explicar el comportamiento de un sistema complejo, el científico debe representarlo en términos de los conceptos que maneja, lo hace expresando todos los rasgos principales del sistema por medio de relaciones matemáticas. A esta representación formal se le llama modelo.
3. La esencia de un modelo es que debe ser predictivo, lo cual no significa predecir el futuro, pero si ser capaz de indicar muchas cosas acerca de la forma en que se puede esperar que un sistema opere en una variedad de circunstancias, lo que permite valorar su vulnerabilidad. Si se conocen las debilidades del sistema se pueden tomar cursos de acción agrupados en categorías: A) Efectuar cambios que lleven a la empresa o parte de ella a una nueva ruta; B) Realizar un plan de toma de decisiones; C) Instalar estrategias que generen decisiones. Cuando se aplica alguno de estos remedios, la investigación de operaciones nos ayuda a determinar la acción menos vulnerable ante un futuro incierto.
4. El objetivo global de la investigación de operaciones es el de apoyar al tomador de decisiones, en cuanto a cumplir con su función basado en estudios científicamente fundamentados.

Enfoque de la Investigación de Operaciones.

La parte innovadora de la IO es sin duda alguna su enfoque modelístico, producto de sus creadores aunado a la presión de supervivencia de la guerra o la sinergia generada al combinarse con diferentes disciplinas, una descripción del enfoque es el siguiente.

1. Se define el sistema real donde se presenta el problema. Dentro del sistema interactuan normalmente un gran número de variables.
2. Se seleccionan las variables que norman la conducta o el estado actual del sistema, llamadas variables relevantes, con las cuales se define un sistema asumido del sistema real.
3. Se construye un modelo cuantitativo del sistema asumido, identificando y simplificando las relaciones entre las variables relevantes mediante la utilización de funciones matemáticas.
4. Se obtiene la solución al modelo cuantitativo mediante la aplicación de una o más de las técnicas desarrolladas por la IO.
5. Se adapta e imprime la máxima realidad posible a la solución teórica del problema real obtenida en el punto 4, mediante la consideración de factores cualitativos o no cuantificables, los cuales no pudieron incluirse en el.
6. Se implanta la solución en el sistema real.

La investigación de operaciones obtiene la solución del problema real indirectamente, y no como normalmente se intentaría pasando del problema real a la solución real.

Metodología de la Investigación de Operaciones.

Definición del problema y recolección de datos.

La mayor parte de los problemas prácticos con los que se enfrenta el equipo IO están descritos inicialmente de una manera vaga. Por consiguiente, la primera actividad que se debe realizar es el estudio del sistema relevante y el desarrollo de un resumen bien definido del problema que se va a analizar. Esto incluye determinar los objetivos apropiados, las restricciones sobre lo que se puede hacer, las interrelaciones del área bajo estudio con otras áreas de la organización, los diferentes cursos de acción posibles, los límites de tiempo

para tomar una decisión, etc. Este proceso de definir el problema es crucial ya que afectará en forma significativa la relevancia de las conclusiones del estudio.
Por su naturaleza, la investigación de operaciones se encarga del bienestar de toda la organización, no sólo de algunos de sus componentes. Un estudio de IO busca soluciones óptimas globales y no soluciones subóptimas aunque sean lo mejor para uno de los componentes. Entonces, idealmente, los objetivos que se formulan deben coincidir con los de toda la organización. Sin embargo, esto no siempre es conveniente. Muchos problemas interesan nada más a una parte de la organización, de manera que el análisis sería innecesariamente besado si lo objetivos fueran muy generales y si se prestara atención especial a todos los efectos secundarios sobre el resto de la organización. En lugar de ello, los objetivos usados en un estudio deben ser tan específicos como sea posible, siempre y cuando contemplen las metas principales del tomador de decisiones y mantengan un nivel razonable de consistencia con los objetivos de los altos niveles.

Las condiciones fundamentales para que exista un problema es que se establezca una diferencia entre lo que es (situación actual) y lo que debe ser (situación deseada u objetivo) y además exista cuando menos una forma de eliminar o disminuir esa diferencia. Los componentes de un problema son: a) el tomador de decisiones o ejecutivo; b) los objetivos de la organización; c) el sistema o ambiente en el que se sitúa el problema; d) Los cursos de acción alternativos que se pueden tomar para resolverlo.

Para formular un problema se requiere; a) identificar los componentes y variables controlables y no controlables del sistema; b) identificar los posibles cursos de acción, determinados por las componentes controlables; c) definir el marco de referencia dado por las componentes no controlables; d) definir los objetivos que se busca alcanzar y clasificarlos por orden de importancia; e) identificar las interpelaciones importantes entre las diferentes partes del sistema y encontrar las restricciones que existen.

Formulación de un modelo matemático.

Una vez definido el problema del tomador de decisiones. La siguiente etapa consiste en reformularlo de manera conveniente para su análisis. La forma convencional en que la investigación de operaciones realiza esto es construyendo un modelo matemático que represente la esencia del problema. Antes de analizar como formular los modelos de este tipo, se explorará la naturaleza general de los modelos y, en particular, la de los modelos matemáticos.

El modelo matemático está constituido por relaciones matemáticas (ecuaciones y desigualdades) establecidas en términos de variables, que representa la esencia del problema que se pretende solucionar.

Para construir un modelo es necesario primero definir las variables en función de las cuales será establecido. Luego, se procede a determinar matemáticamente cada una de las dos partes que constituyen un modelo: a) la medida de efectividad que permite conocer el nivel de logro de los objetivos y generalmente es una función (ecuación) llamada función objetivo; b) las limitantes del problema llamada restricciones que son un conjunto de igualdades o desigualdades que constituyen las barreras y obstáculos para la consecución del objetivo.

Un modelo debe ser menos complejo que el problema real, es una aproximación abstracta de la realidad con consideraciones y simplificaciones que hacen más manejable el problema y permiten evaluar eficientemente las alternativas de solución.

Los modelos matemáticos tienen muchas ventajas sobre una descripción verbal del problema. Una ventaja obvia es que el modelo matemático describe un problema en forma mucho más concisa. Esto tiende a hacer que toda la estructura del problema sea más comprensible y ayude a relevar las relaciones importantes entre causa y efecto. De esta manera, indica con más claridad que datos adicionales son importantes para el análisis. También facilita simultáneamente el manejo del problema en su totalidad y el estudio de todas sus interpelaciones. Por último, un modelo matemático forma un puente para poder emplear técnicas matemáticas y computadoras de alto poder, para analizar el problema. Sin duda, existe una amplia disponibilidad de paquetes de software para muchos tipos de modelos matemáticos, para micros y minicomputadoras.

Por otro lado, existen obstáculos que deben evitarse al usar modelos matemáticos. Un modelo es, necesariamente, una idealización abstracta del problema, por lo que casi siempre se requieren aproximaciones y suposiciones de simplificación si se quiere que el modelo sea manejable (susceptible de ser resuelto). Por lo tanto, debe tenerse cuidado de que el modelo sea siempre una representación válida del problema. El criterio apropiado para juzgar la validez de un modelo es el hecho de si predice o no con suficiente exactitud los efectos relativos de los diferentes cursos de acción, para poder tomar una decisión que tenga sentido. En consecuencia, no es necesario incluir detalles sin importancia o factores que tienen aproximadamente el mismo efecto sobre todas las opciones. Ni siquiera es necesario que la magnitud absoluta de la medida de efectividad sea aproximadamente correcta para las diferentes alternativas, siempre que sus valores relativos (es decir, las diferencias entre sus valores) sean bastante precisos. Entonces, todo lo que se requiere es que exista una alta correlación entre la predicción del modelo y lo que ocurra en la vida real. Para asegurar que este requisito se cumpla, es importante hacer un número considerable de pruebas del modelo y las modificaciones consecuentes. Aunque esta fase de pruebas se haya colocado después en el orden del libro, gran parte del trabajo de validación del modelo se lleva a cabo durante la etapa de construcción para que sirva de guía en la obtención del modelo matemático.

Obtención de una Solución a partir del modelo.

Resolver un modelo consistente en encontrar los valores de las variables dependientes, asociadas a las componentes controlables del sistema con el propósito de optimizar, si es posible, o cuando menos mejorar la eficiencia o la efectividad del sistema dentro del marco de referencia que fijan los objetivos y las restricciones del problema.

La selección del método de solución depende de las características del modelo. Los procedimientos de solución pueden ser clasificados en tres tipos: a) analíticos, que utilizan procesos de deducción matemática; b) numéricos, que son de carácter inductivo y funcionan en base a operaciones de prueba y error, c) simulación, que utiliza métodos que imitan o, emulan al sistema real, en base a un modelo.

Muchos de los procedimientos de solución tienen la característica de ser iterativos, es decir buscan la solución en base a la repetición de la misma regla analítica hasta llegar a ella, si la hay, o cuando menos a una aproximación.

Prueba del Modelo.

El desarrollo de un modelo matemático grande es análogo en algunos aspectos al desarrollo de un programa de computadora grande. Cuando se completa la primera versión, es inevitable que contenga muchas fallas. El programa debe probarse de manera exhaustiva para tratar de encontrar y corregir tanto problemas como sea posible. Eventualmente, después de una larga serie de programas mejorados, el programados (o equipo de programación) concluye que el actual de, en general, resultados razonablemente válidos. Aunque sin duda quedarán algunas fallas ocultas en el programa (y quizá nunca se detecten, se habrán eliminado suficientes problemas importantes como para que sea confiable utilizarlo.

De manera similar, es inevitable que la primera versión de un modelo matemático grande tenga muchas fallas. Sin duda, algunos factores o interpelaciones relevantes no se incorporaron la modelo y algunos parámetros no se estimaron correctamente. Esto no se puede eludir dada la dificultad de la comunicación y la compresión de todos los aspectos y sutilezas de una problema operacional complejo, así como la dificultad de recolectar daros confiables. Por lo tanto, antes de usar el modelo debe probarse exhaustivamente para intentar identificar y corregir todas las fallas que se pueda. Con el tiempo, después de una larga serie de modelos mejorados, el equipo de IO concluye que el modelo actual produce resultados razonablemente válidos. Aunque sin duda quedarán algunos problemas menores ocultos en el modelo (y quizá nunca se detecten), las fallas importantes se habrán eliminado de manera que ahora es confiable usar el modelo. Este proceso de prueba y mejoramiento de un modelo para incrementar su validez se conoce como validación del modelo.

Debido a que el equipo de IO puede pasar meses desarrollando todas las piezas detalladas el modelo, es sencillo “no ver el bosque para buscar los árboles”. Entonces, después de completar los detalles (“árboles2) de la versión inicial del modelo, una buena manera de comenzar las pruebas es observarlo en forma global (“el bosque”) para verificar los errores u omisiones obvias. El grupo que hace esta revisión debe, de preferencia, incluir por lo menos a una persona que no haya participado en la formulación. Al examinar de nuevo la formulación del problema y compararla con el modelo pueden descubrirse este tipo de errores. También es útil asegurarse de que todas las expresiones matemáticas sean consistentes en las dimensiones de las unidades que se emplean. Además, puede obtenerse un mejor conocimiento de la validez del modelo variando los valores de los parámetros de entrada y / o de las variables de decisión, y comprobando que los resultados del modelo se comporten de una manera factible. Con frecuencia, esto es especialmente revelador cuando se asignan los parámetros o a las variables valores extremos cercanos a su máximo o mínimo.

Un enfoque más sistemático para la prueba del modelo es emplear una prueba retrospectiva. Cuando es aplicable, esta prueba utiliza datos históricos y reconstruye el pasado para determinar si el modelo y la solución resultante hubieran tenido un buen desempeño, de haberse usado. La comparación de la efectividad de este desempeño hipotético con lo que en realidad ocurrió, indica si el uso del modelo tiende a dar mejoras significativas sobre las evidencias en cuanto a lo bien que el modelo predice los efectos relativos de los diferentes cursos de acción.

Cuando se determina que el modelo y la solución no son válidos, es necesario iniciar nuevamente el proceso revisando cada una de las fases de la metodología de la investigación de operaciones.

Establecimiento de controles sobre la solución.

Una solución establecida como válida para un problema, permanece como tal siempre y cuando las condiciones del problema tales como: las variables no controlables, los parámetros, las relaciones, etc., no cambien significativamente. Esta situación se vuelve más factible cuando algunos modelos de los parámetros fueron estimados aproximadamente. Por lo anterior, es necesario generar información adicional sobre el comportamiento de la solución debido a cambios en los parámetros del modelo, usualmente esto se conoce como análisis de sensibilidad. En pocas palabras, esta fase consiste en determinar los rangos de variación de los parámetros del modelo. Usualmente esto se conoce como análisis de sensibilidad. En pocas palabras, esta fase consiste en determinar los rangos de variación de los parámetros dentro de los cuales con cambia la solución del problema.

Implantación de la solución.

El paso final se iniciará con el proceso de "vender" los hallazgos que se hicieron a lo largo del proceso a los ejecutivos o tomadores de las decisiones. Una vez superado éste obstáculo, se debe traducir la solución encontrada a instrucciones y operaciones comprensibles para los individuos que intervienen en la operación y administración del sistema. La etapa de implantación de una solución se simplifica en gran medida cuando se ha propiciado la participación de todos los involucrados en el problema en cada fase de la metodología.

Preparación para la aplicación del modelo. Esta etapa es crítica, ya que es aquí, donde se cosecharán los beneficios del estudio. Por lo tanto, es importante que el equipo de IO participe, tanto para asegurar que las soluciones del modelo se traduzcan con exactitud a un procedimiento operativo, como para corregir cualquier defecto en la solución que salga a la luz en este momento.

El éxito de la puesta en práctica depende en gran parte del apoyo que proporcionen tanto la alta administración como la gerencia operativa. Es más probable que el equipo de IO obtenga este apoyo si ha mantenido a la administración bien informada y ha fomentado la guía de la gerencia durante el estudio. La buena comunicación ayuda a asegurar que el estudio logre lo que la administración quiere y por lo tanto merezca llevarse a la práctica. También proporciona a la administración el sentimiento de que el estudio es suyo y esto facilita el apoyo para la implantación.

La etapa de implantación incluye varios pasos. Primero, el equipo de investigación de operaciones da una cuidadosa explicación a la gerencia operativa sobre el nuevo sistema que se va a adoptar y su relación con la realidad operativa. En seguida, estos dos grupos comparten la responsabilidad de desarrollar los procedimientos requeridos para poner este sistema en operación. La gerencia operativa se encarga después de dar una capacitación detallada al personal que participa, y se inicia entonces el nuevo curso de acción. Si tiene éxito, el nuevo sistema se podrá emplear durante algunos año. Con esto en mente, el equipo de IO supervisa la experiencia inicial con la acción tomada para identificar cualquier modificación que tenga que hacerse en el futuro.

A la culminación del estudio, es apropiado que el equipo de investigación de operaciones documente su metodología con suficiente claridad y detalle para que el trabajo sea reproducible. Poder obtener una réplica debe ser parte del código de ética profesional del investigador de operaciones. Esta condición es crucial especialmente cuando se estudian políticas gubernamentales en controversia.

Limitaciones de la Investigación de Operaciones.

1. Frecuentemente es necesario hacer simplificaciones del problema original para poder manipularlo y detener una solución.
2. La mayoría de los modelos sólo considera un solo objetivo y frecuentemente en las organizaciones se tienen objetivos múltiples.
3. Existe la tendencia a no considerar la totalidad de las restricciones en un problema práctico, debido a que los métodos de enseñanza y entrenamiento dan la aplicación de esta ciencia centralmente se basan en problemas pequeños para razones de índole práctico, por lo que se desarrolla en los alumnos una opinión muy simplista e ingenua sobre la aplicación de estas técnicas a problemas reales.
4. Casi nunca se realizan análisis costo-beneficio de la implantación de soluciones definidas por medio de la IO, en ocasiones los beneficios potenciales se ven superados por los costos ocasionados por el desarrollo e implantación de un modelo.

Modelos Específicos de la Investigación de Operaciones.

- Planeación de la Producción.
- Asignación de personal
- Transporte
- Inventarios
- Dietas
- Mercado
- Estrategias de Inversión.

II. Programación Lineal.

Introducción.

Muchas personas clasifican el desarrollo de la programación linean entre los avances científicos más importantes de mediados del siglo XX, su impacto desde 1950 ha sido extraordinario. En la actualidad es una herramienta de uso normal que ha ahorrado miles o millones de pesos a muchas compañías o negocios, incluyendo empresas medianas en los distintos países industrializados del mundo, su aplicación a otros sectores de la sociedad se está ampliando con rapidez. Una proporción muy grande de los cálculos científicos en computadoras está dedicada al usos de la programación lineal.

¿Cuál es la naturaleza de esta notable herramienta y qué tipos de problemas puede manejar? Expresado brevemente, el tipo más común de aplicación abarca el problema general de asignar recursos limitados entre actividades competitivas de la mejor manera posible (es decir, en forma óptima). Con más precisión, este problema incluye elegir el nivel de ciertas actividades que compiten por escasos recursos necesarios para realizarlas. Después, los niveles de actividad elegidos dictan la cantidad de cada recurso que consumirá cada una de ellas. La variedad de situaciones a las que se puede aplicar esta descripción es sin duda muy grande, y va desde la asignación de instalaciones de producción a los productos, hasta la asignación de los recursos nacionales a las necesidades de un país; desde la selección de cartera de inversiones, hasta la selección de patrones de envío; desde la planeación agrícola, hasta el diseño de una terapia de radiación, etc. No obstante, el ingrediente común de todas estas situaciones es la necesidad de asignar recursos a las actividades eligiendo niveles de las mismas.

La programación lineal utiliza un modelo matemático para describir el problema. El adjetivo lineal significa que todas las funciones matemáticas del modelo deben ser funciones lineales. En este caso, la palabra programación no se refiere a programación en computadoras; en esencia es un sinónimo de planeación. Así, la programación lineal trata la planeación de actividades para obtener un resultado óptimo, esto es, el resultado que mejor alcance la meta especificada (según el modelo matemático) entre todas las alternativas de solución.

Aunque la asignación de recursos a las actividades es la aplicación más frecuente, la programación lineal tiene muchas otras posibilidades, de hecho, cualquier problema cuyo modelo matemático se ajuste al formato general del modelo de programación lineal es un problema de programación lineal. Aún más, se dispone de un procedimiento de solución extraordinariamente eficiente llamado método simples, para resolver estos problemas, incluso los de gran tamaño. Estas son algunas causas del tremendo auge de la programación lineal en las últimas décadas.

Modelo de Programación Lineal.

Los términos clave son recursos y actividades, en donde **m** denota el número de distintos tipos de recursos que se pueden usar y **n** denota el número de actividades bajo consideración. Algunos ejemplos de recursos son dinero y tipos especiales de maquinaria, equipos, vehículos y personal. Los ejemplos de actividades incluyen inversión en proyectos específicos, publicidad en un medio determinado y el envío de bienes de cierta fuente a cierto destino. En cualquier aplicación de programación lineal, puede ser que todas las actividades sean de un tipo general (como cualquiera de los ejemplos), y entonces cada una correspondería en forma individual a las alternativas específicas de esta categoría general.

El tipo más usual de aplicación de programación lineal involucra la asignación de recursos a ciertas actividades. La cantidad disponible de cada recurso está limitada, de forma que deben asignarse con todo cuidado. La determinación de esta asignación incluye elegir los niveles de las actividades que lograrán el mejor valor posible de la medida global de efectividad.

Ciertos símbolos se usan de manera convencional para denotar las distintas componentes de un modelo de programación lineal. Estos símbolos se enumeran a continuación, junto con su interpretación para el problema general de asignación de recursos de actividades.

Z = valor de la medida global de efectividad

x_j = nivel de la actividad j (para j = 1,2,..,n)

c_j = incremento en Z que resulta al aumentar una unidad en el nivel de la actividad j

b_i = cantidad de recurso i disponible para asignar a las actividades (para i = 1,2,...,m)

a_{ij} = cantidad del recurso i consumido por cada unidad de la actividad j

El modelo establece el problema en términos de tomar decisiones sobre los niveles de las actividades, por lo que $x_1, x_2, ..., x_n$ se llaman variables de decisión. Los valores de c_j, b_i y a_{ij} (para i = 1,2,.., m y j = 1, 2, ..., n) son las constantes de entrada al modelo. Las c_j, b_i y a_{ij} también se conocen como parámetros del modelo.

Forma estándar del modelo.

Ahora se puede formular al modelo matemático para este problema general de asignación de recursos a actividades. En Datos necesarios para un modelo de programación lineal que maneja la asignación de recursos a actividades particulares, este modelo consiste en elegir valores de $x_1, x_2, ..., x_n$ para:

optimizar (maximizar o minimizar) $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$

sujeta a las restricciones:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n$ (<=,>=,=) b_1
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n$ (<=,>=,=) b_2
.
.
.
$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n$ (<=,>=,=) b_m

$X_1 >= 0$, $X_2 >= 0$, …, $X_n >= 0$.

Suposiciones del modelo de Programación Lineal.

Proporcionalidad.

La contribución de cada actividad al valor de la función objetivo Z es proporcional al nivel de actividad x_j, como lo representa el término c_jx_j en la función objetivo. De manera similar, la contribución de cada actividad al lado izquierdo de cada restricción funcional es proporcional al nivel de la actividad x_j, en la forma en que lo representa el término $a_{ij}x_j$ en la restricción. En consecuencia, esta suposición elimina cualquier exponente diferenta a 1 para las variables en cualquier término de las funciones (ya sea la función objetivo o la función en el lado izquierdo de las restricciones funcionales) en un modelo de programación lineal.

Aditividad.

Establece que la entrada y salida de un recurso en particular al conjunto de actividades, deben ser la misma cantidad; o sea, que las actividades transforman los recursos y no los crean o destruyen. Esta suposición garantiza que la contribución total tanto a la función objetivo como a las restricciones, es igual a la suma de las contribuciones individuales. Cuando en un problema dado no se tenga la aditividad puede recurrirse al empleo de otras técnicas de la programación matemática, dependiendo de cada caso particular.

Cada función en un modelo de programación lineal (ya sea la función objetivo o el lado izquierdo de las restricciones funcionales) es la suma de las contribuciones individuales de las actividades respectivas.

***Divisibilidad*.**

Las variables de decisión en un modelo de programación lineal pueden tomar cualquier valor, incluyendo valores no enteros, que satisfagan las restricciones funcionales y de no negatividad. Así, estas variables no están restringidas a sólo valores enteros. Como cada variable de decisión representa el nivel de alguna actividad, se supondrá que las actividades se pueden realizar a niveles fraccionales.

Limitaciones del Modelo de Programación Lineal.

***Modelo Determinístico*.**

El modelo de PL involucra únicamente tres tipos de parámetros: Cj, aij y bi; de ahí se sencillez y su gran aplicación. Sin embargo, el valor de dichos parámetros debe ser conocido y constante. Cuando el valor de los parámetros tiene un cierto riesgo o incertidumbre, puede utilizarse la programación paramédica, la programación estocástica, o realizarse un análisis de sensibilidad.

***Modelo Estático*.**

En algunos modelos matemáticos se han empleado con éxito las ecuaciones diferenciales, para inducir la variable tiempo en ellos. En este sentido, puede decirse que la PL utiliza un modelo estático, ya que la variable tiempo no se involucra formalmente. Adquiriendo un poco de experiencia en la formulación de modelos de PL, puede imbuirse la temporalidad mencionada, con el uso de subíndices en las variables.

***Modelo que no Subpotimiza*.**

Debido a la forma que se plantea el modelo de PL, o encuentra la solución óptima o declara que ésta no existe. Cuando no es posible obtener una solución óptima y se debe tomar alguna, se recurre a otra técnica más avanzada que la PL, la cuál se denomina programación lineal por metas.

Formulación de modelos de programación lineal.

Principios Generales de la Modelación.

A continuación se presenta una lista, no exhaustiva, de los principios generales de modelación.

1. No debe elaborarse un modelo complicado cuando uno simple es suficiente.
2. El problema no debe ajustarse al modelo o al método de solución.
3. La fase deductiva de la modelación debe realizarse rigurosamente.
4. Los modelos deben validarse antes de su implantación.
5. Nunca debe pensarse que el modelo es el sistema real.
6. Un modelo debe criticarse por algo para lo que no fue hecho.
7. No venda un modelo como la perfección máxima.
8. Uno de los primeros beneficios de la modelación reside en el desarrollo del modelo.
9. Un modelo es tan bueno o tan malo como la información con la que trabaja.
10. Los modelos no pueden reemplazar al tomador de decisiones.

Recordemos que los modelos de Investigación de Operaciones, conducen al ejecutivo a mejores decisiones y no a simplificar la toma de éstas.

Metodología de Formulación Directa para construir Modelos de Programación Lineal.

Como su nombre lo indica, la formulación directa estriba en pasar directamente del sistema asumido al modelo de PL. Para tal efecto, se propone el siguiente orden: definir el objetivo, definir las variables de decisión, enseguida las restricciones estructurales y finalmente establecer las condiciones técnicas.

Definir el Objetivo: Consiste en definir un criterio de optimización el cuál puede ser Maximización o Minimización dependiendo del problema que se desee resolver, el cual es una función lineal de las diferentes actividades del problema. Bajo el criterio de optimización definido se pretende medir la contribución de las soluciones factibles que puedan obtenerse y determinar la óptima.

Definir las variables de decisión: Son las incógnitas del problema, básicamente consisten en los niveles de todas las Actividades que pueden llevarse a cabo en el problema a formular, estas pueden ser de tantos tipos diferentes como sea necesario, e incluir tantos subíndices como sea requerido.

Definir las restricciones: Son los diferentes requisitos que debe cumplir cualquier solución para que pueda llevarse a cabo. En cierta manera son las limitantes en los valores de los niveles de las diferentes actividades (variables). Las restricciones más comunes son de seis tipos, las cuales se listan a continuación:

- **Restricción de capacidad**: limitan el valor de las variables debido a las disponibilidad de horas – hombre, horas – máquina, espacio, etc.
- **Restricción de mercado**: Surge de los valores máximos y mínimos en las ventas o el uso del producto o actividad a realizar.
- **Restricción de entradas**: Son limitantes debido a la escazes de materias primas, mano de obra, dinero, etc.
- **Restricción de calidad**: Son las restricciones que limitan las mezclas de ingredientes, definiendo usualmente la calidad de los artículos a manufacturar.
- **Restricciones de balance de material**: Estas son las restricciones que definen las salidas de un proceso en función de las entradas, tomando en cuenta generalmente cierto porcentaje de merma o de desperdicio.
- **Restricciones Internas**: Son las que definen a una variable dada, en la formulación interna del problema, un ejemplo tipo es el de inventario.

Condiciones técnicas: En este apartado se establece que todas las variables deben tomar valores no negativos.

Formulación de Modelos de Programación Lineal.

Algunos de los tipos de problemas que se pueden formular son:

- Planeación de la producción de inventarios.
- Mezcla de Alimentos.
- Transporte y asignación.
- Planeación financiera
- Mercadotecnia.
- Asignación de recursos.

Métodos de Solución de Programación Lineal.

La PL es una técnica mediante la cual se toman decisiones, reduciendo el problema bajo estudio a un modelo matemático general, el cual debe ser resuelto por métodos cuantitativos.

Método Gráfico.

El método gráfico se utiliza para la solución de problemas de PL, representando geométricamente a las restricciones, condiciones técnicas y el objetivo.

El modelo se puede resolver en forma gráfica si sólo tiene dos variables. Para modelos con tres o más variables, el método gráfico es impráctico o imposible.

Cuando los ejes son relacionados con las variables del problema, el método es llamado método gráfico en actividad. Cuando se relacionan las restricciones tecnológicas se denomina método gráfico en recursos.

Los pasos necesarios para realizar el método son nueve:

1. Graficar las soluciones factibles, o el espacio de soluciones (factible), que satisfagan todas las restricciones en forma simultánea.
2. Las restricciones de no negatividad Xi>=0 confían todos los valores posibles.
3. El espacio encerrado por las restricciones restantes se determinan sustituyendo en primer término <= por (=) para cada restricción, con lo cual se produce la ecuación de la línea recta.
4. Trazar cada línea recta en el plano y la región en la cual se encuentra cada restricción cuando se considera la desigualdad lo indica la dirección de la flecha situada sobre la línea recta asociada.
5. Cada punto contenido o situado en la frontera del espacio de soluciones satisfacen todas las restricciones y por consiguiente, representa un punto factible.
6. Aunque hay un número infinito de puntos factibles en el espacio de soluciones, la solución óptima puede determinarse al observar la dirección en la cual aumenta la función objetivo.
7. Las líneas paralelas que representan la función objetivo se trazan mediante la asignación de valores arbitrarios a fin de determinar la pendiente y la dirección en la cual crece o decrece el valor de la función objetivo.

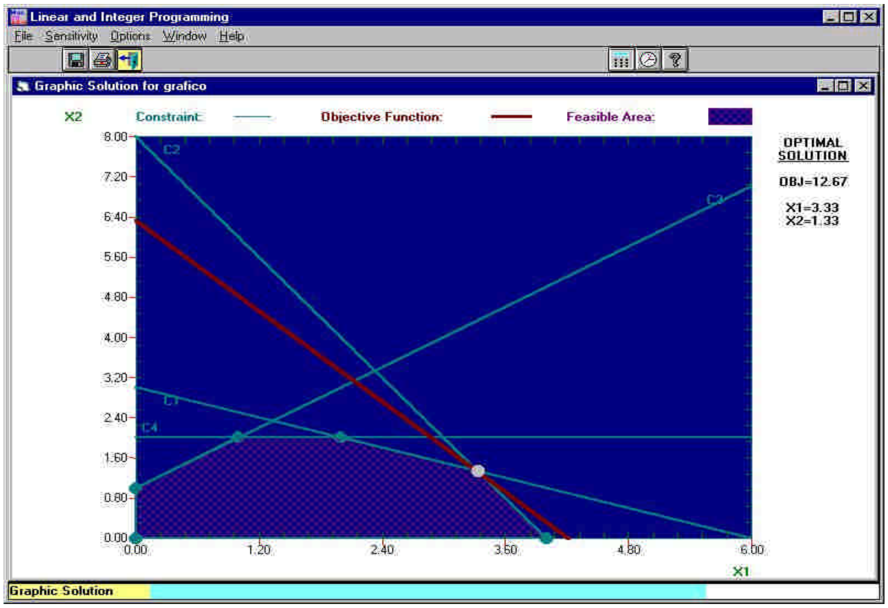
Ejemplo.
Maximizar $Z = 3X1 + 2X2$

restricciones :
$$X1 + 2X2 \le 6 \quad (1)$$
$$2X1 + X2 \le 8 \quad (2)$$
$$-X1 + X2 \le 1 \quad (3)$$
$$X2 \le 2 \quad (4)$$
$$X1 \ge 0 \quad (5)$$
$$X2 \ge 0 \quad (6)$$

Convirtiendo las restricciones a igualdad y representándolas gráficamente se tiene:

$$X1 + 2X2 = 6 \quad (1)$$
$$2X1 + X2 = 8 \quad (2)$$
$$-X1 + X2 = 1 \quad (3)$$
$$X2 = 2 \quad (4)$$
$$X1 = 0 \quad (5)$$
$$X2 = 0 \quad (6)$$

En la siguiente figura se presentan las posibles soluciones:



Soluciones.

Maximizar Z = 3X1 + 2X2

Punto	(X1, X2)	Z
A	(0, 0)	0
B	(4, 0)	12
C	(3.3, 1.3)	12.6 (óptima)
D	(2, 3)	12
E	(1, 3)	9
F	(0, 2)	4

Para obtener la solución gráfica, después de haber obtenido el espacio de solución y graficada la función objetivo el factor clave consiste en decidir la dirección de mejora de la función objetivo.

Método Simples.

En la solución gráfica observamos que la solución óptima está asociada siempre con un punto extremo del espacio de soluciones. El método simples emplea un proceso interativo que principia en un punto extremo factible, normalmente el origen, y se desplaza sistemáticamente de un punto extremo factible a otro, hasta que se llega por último al punto óptimo.

Existen reglas que rigen la solución del siguiente punto extremo del método simples:

1. El siguiente punto extremo debe ser adyacente al actual.
2. la solución no puede regresar nunca a un punto extremo considerando la anterioridad.

El algoritmo simples da inicio en el origen, que suele llamarse solución inicial. Después se desplaza a un punto extremo adyacente. La elección específica de un punto a otro punto depende de los coeficientes de la función objetivo hasta encontrar el punto óptimo. Al aplicar la condición de optimidad a la tabla inicial seleccionamos a Xi como la variable que entra. En este punto la variable que sale debe ser una de las variables artificiales.

Los pasos del algoritmo simples son (10):

1. Determinar una solución básica factible inicial.
2. Prueba de optimidad: determinar si la solución básica factible inicial es óptima y sólo si todos los coeficientes de la ecuación son no negativos (>=0). Si es así, el proceso termina; de otra manera se lleva a cabo una interacción para obtener la nueva solución básica factible inicial.
3. Condición de factibilidad.- Para todos los problemas de maximización y minimización, variable que sale es la variable básica que tiene la razón más pequeña (positiva). Una coincidencia se anula arbitrariamente.
4. Seleccionar las variables de holgura como las variables de inicio básicas.
5. Selecciona una variable que entra de entre las variables no básicas actuales que, cuando se incrementan arriba de cero, pueden mejorar el valor de la función objetivo. Si no existe la solución básica es la óptima, si existe pasar al siguiente paso.
6. Realizar el paso iterativo.

   a) Se determina la variable básica entrante mediante la elección de la variable con el coeficiente negativo que tiene el mayor valor absoluto de la ecuación. Se enmarca la columna correspondiente a a este coeficiente y se le da el nombre de columna pivote.
   b) Se determina la variable básica que sale, para esta, se toma cada coeficiente positivo (>0) de la columna enmarcada, se divide el lado derecho de cada renglón entre estos coeficientes, se identifica la ecuación con el menor coeficiente y se selecciona la variable básica para esta ecuación.
   c) Se determina la nueva solución básica factible construyendo una nueva tabla en la forma apropiada de eliminación de Gauss, debajo de la que se tiene. Para cambiar el coeficiente de la nueva variable básica en el renglón pivote a 1, se divide todo el renglón entre el número pivote, entonces:

   Renglón pivote nuevo = renglón pivote antiguo / número pivote

   Para completar la primera iteración es necesario seguir usando la eliminación de Gauss para obtener coeficientes de 0 para la nueva variable básica Xj en los otros renglones, para realizar este cambio se utiliza la siguiente fórmula:

   Renglón nuevo = renglón antiguo – (coeficiente de la columna pivote X renglón pivote nuevo)

   Cuando el coeficiente es negativo se utiliza la fórmula:

   Renglón nuevo = renglón antiguo + (coeficiente de la columna pivote X renglón pivote nuevo)

Tabla Simples.

Como se capturaría la solución básica factible inicial en el siguiente ejemplo:

Sea:

Maximizar Z = 2X1 + 4X2

Sujeto a:

2X1 + X2 <= 230
X1 + 2X2 <= 250
X2 >=0

Todas las X1, X2 >=0

BASE	Z	X1	X2	S1	S2	S3	SOLUCIÓN	RAZÓN
Z	0	-2	-4	0	0	0	0	0
S1	0	2	1	1	0	0	230	230/1
S2	0	1	2	0	1	0	250	250/2
S3	0	0	1	0	0	1	120	120/1

Seleccione la variable que entra y la variable que sale de la base:

Entra X2 y sale S3, se desarrolla la nueva tabla solución y se continua el proceso iterativo hasta encontrar la solución óptima si es que está existe.

Tabla Óptima:

BASE	Z	X1	X2	S1	S2	S3	SOLUCIÓN	RAZÓN
Z	0	0	0	0	2	0	500	
S1	0	0	0	1	-2	3	90	
X1	0	1	0	0	1	-2	10	
X2	0	0	1	0	0	1	120	

Solución : Z = $500
Fabricando
X1 = 10
X2 = 120
Sobrante de
S1 = 90
Tipo de solución: **Óptima Múltiple**.

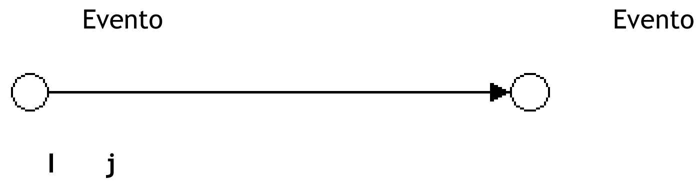
III. Teoría de Redes.

Se llama red la representación gráfica de las actividades que muestran sus eventos, secuencias, interrelaciones y el camino critico. No solamente se llama camino critico al método sino también a la serie de actividades contadas desde la iniciación del proyecto hasta su terminación, que no tienen flexibilidad en su tiempo de ejecución, por lo que cualquier retraso que sufriera alguna de las actividades de la serie provocaría un retraso en todo el proyecto.

Desde otro punto de vista, camino critico es la serie de actividades que indica la duración total del proyecto. Cada una de las actividades se representa por una flecha que empieza en un evento y termina en otro.

Se llama evento al momento de iniciación o terminación de una actividad. Se determina en un tiempo variable entre el más temprano y el más tardío posible, de iniciación o de terminación.

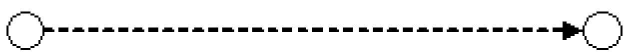
A los eventos se les conoce también con los nombres de nodos.



El evento inicial se llama i y el evento final se denomina j. El evento final de una actividad será el evento inicial de la actividad siguiente.

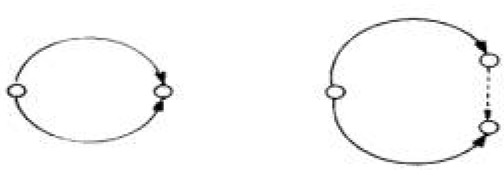
Las flechas no son vectores, escalares ni representan medida alguna. No interesa la forma de las flechas, ya que se dibujarán de acuerdo con las necesidades y comodidad de presentación de la red. Pueden ser horizontales, verticales, ascendentes, descendentes curvas, rectas, quebradas, etc.

En los casos en que haya necesidad de indicar que una actividad tiene una interrelación o continuación con otra se dibujará entre ambas una línea punteada, llamada liga, que tiene una duración de cero.



La liga puede representar en algunas ocasiones un tiempo de espera para poder iniciar la actividad siguiente.

Varias actividades pueden terminar en un evento o partir de un mismo evento.

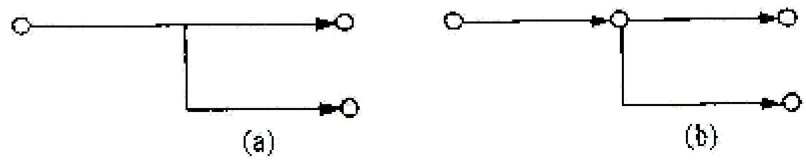


(a) (b)

(a) Incorrecto, (b) Correcto**.**

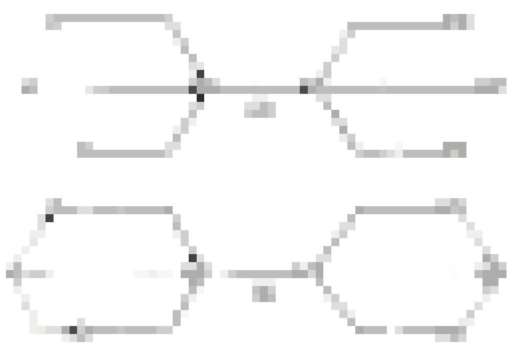
Al construir la red, debe evitarse lo siguiente:

1. Dos actividades que parten de un mismo evento y llegan a un mismo evento. Esto produce confusión de tiempo y de continuidad. Debe abrirse el evento inicial o el evento final en dos eventos y unirlos con una liga.
2. Partir una actividad de una parte intermedia de otra actividad. Toda actividad debe empezar invariablemente en un evento y terminar en otro. Cuando se presenta este caso, a la actividad base o inicial se le divide en eventos basándose en porcentajes y se derivan de ellos las actividades secundadas.



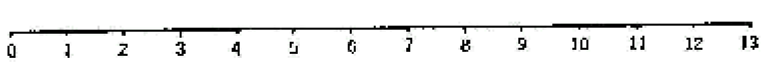
(a) Incorrecto, (b) Correcto**.**

3. Dejar eventos sueltos al terminar la red. Todos ellos deben relacionarse con el evento inicial o con el evento final.

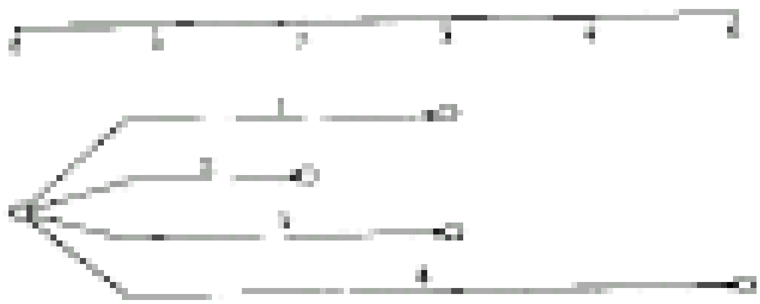


PROCEDIMIENTO PARA TRAZAR LA RED MEDIDA

Para dibujar la red medida, se usa papel cuadriculado indicándose en la parte superior la escala con las unidades de tiempo escogidas, en un intervalo razonable para la ejecución de todo el proyecto. Como en este momento no se conoce la duración del mismo, ya que uno de los objetivos de la red es conocerlo, este intervalo sólo es aproximado.



A continuación se inicia la red dibujando las actividades que parten del evento cero. Cada una de ellas debe dibujarse de tal manera que el evento j termine, de acuerdo con la duración estándar, en el tiempo indicado en la escala superior. Ahora mostraremos la iniciación de las actividades 1, 2, 3, y 4 con duración de tres, dos, tres y cinco días respectivamente.

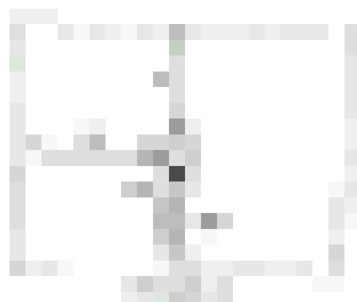


En el caso de la ampliación de la fábrica las actividades iniciales son las que se muestran en la figura que sigue, ya que las tres actividades que parten de cero tienen tres días de duración cada una.

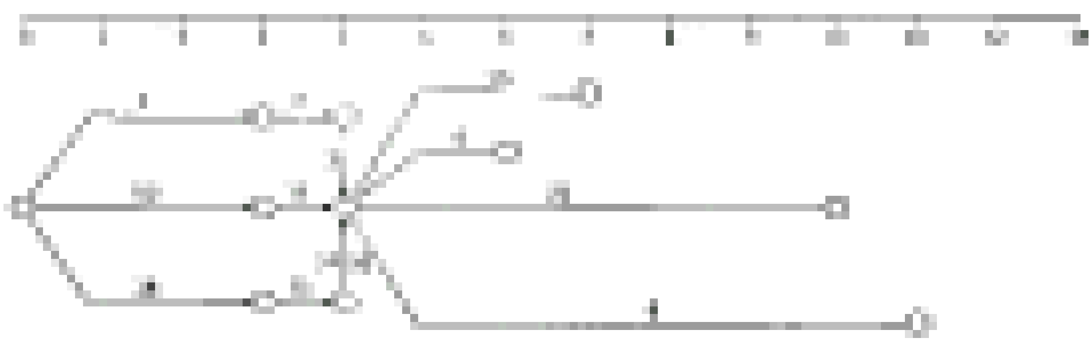
A continuación no debe tomarse la numeración progresiva de la matriz de secuencias para dibujar la red, sino las terminales de las actividades, de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha, según vayan apareciendo los eventos j.
En el caso anterior buscamos las secuencias de la actividad 1, después de la 12 y al ultimo de la 18. En su orden, buscamos las secuencias de la 2, de la 13 y de la 19. Si una actividad tiene cero de duración se dibuja verticalmente, ya sea ascendente o descendente, de tal manera que no ocupe tiempo dentro de la red.

Rigurosamente, una actividad no puede tener tiempo de duración cero, ya que no existiría; sin embargo, algunas actividades tienen tan escasa duración que ésta es despreciable y no es conveniente que se considere una unidad de tiempo. Por ejemplo, si la unidad con la que se trabaja de un día y la duración de la actividad es de cinco o diez minutos, no hay razón para que esta actividad tenga asignado un día de trabajo. En el caso que se desarrolla, la aprobación de los presupuestos se supone que tomarán de media hora a una hora para su ejecución; pero como la unidad tomada en el proyecto es de un día, el tiempo de ejecución se considera cero.

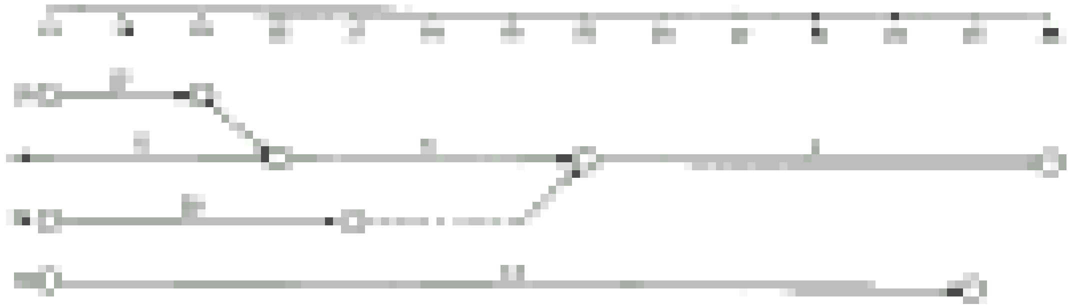
De acuerdo con las anotaciones de la matriz de secuencias las actividades 3, 14 y 20 deben ser simultáneas, por lo que necesitamos un evento común para terminar las tres. Por necesidad de construcción, la actividad 14 quedará solamente indicada con el número en forma paralela a la actividad 3, que también tiene duración cero. También puede aparecer paralela a la actividad 20.

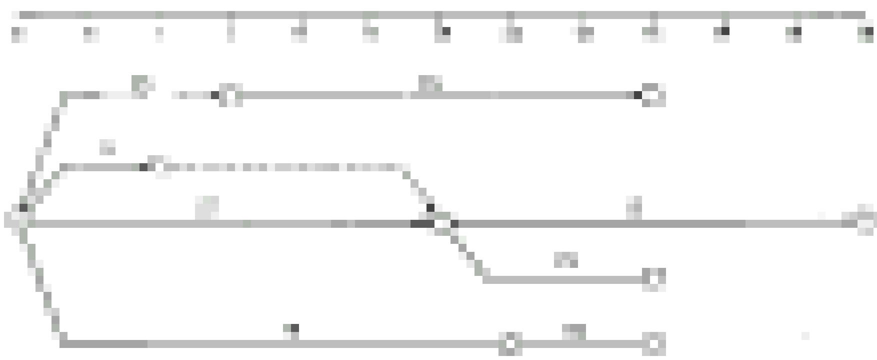


En este tipo de red no hay necesidad de indicar las actividades con flechas, sino sólo con líneas, excepto las ligas que indicarán la dirección de la continuidad. Para seguir con el dibujo de la red, se debe recordar que al evento común convergen las actividades 3, 14 y 20 y por lo tanto debemos buscar las secuencias a estas tres actividades, que partirán lógicamente del mismo evento. Continuamos alargando las terminales 15,4,21 y 9, en este orden precisamente, de acuerdo con el método adoptado.

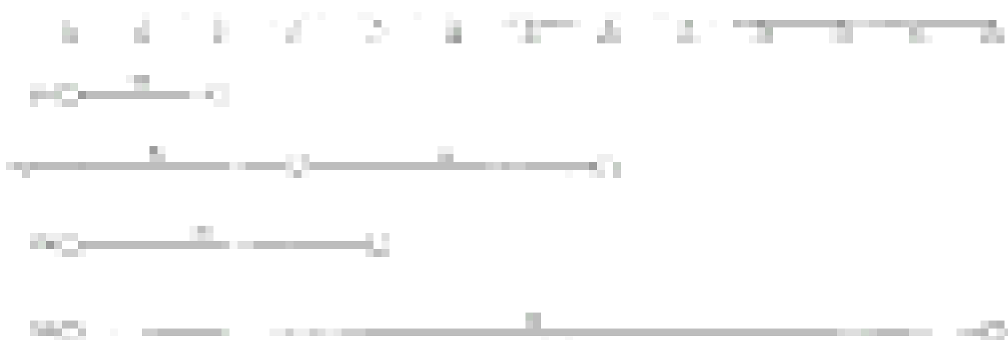


Así encontramos que después de la actividad 15 sigue la 16 con duración de seis días; después de la actividad 4 sigue la 5 con duración de seis días; después de la actividad 21 sigue la 23 con duración de tres días y también la 5 con duración de seis días; y después de la actividad 9 sigue la 10 con duración de dos días.

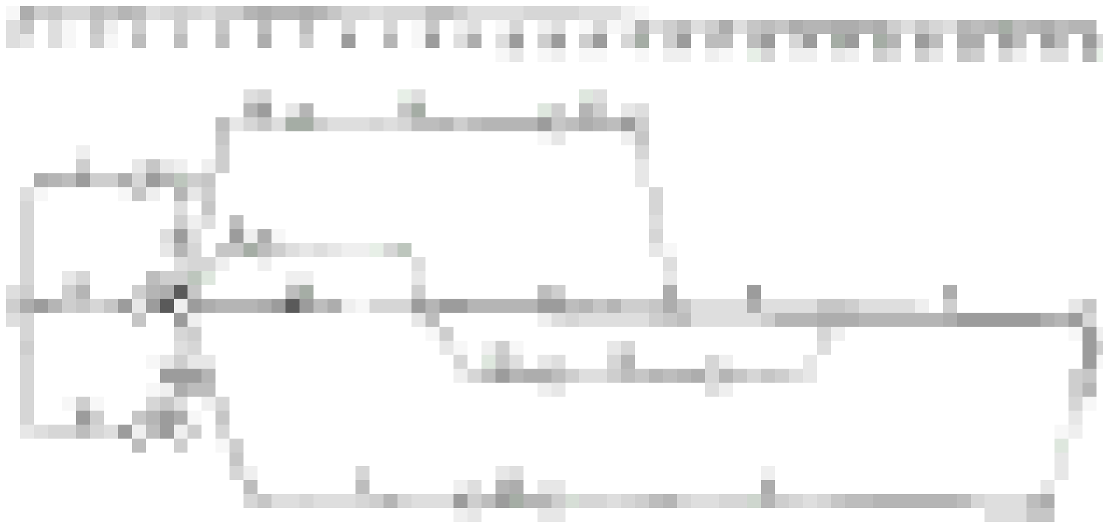




Cuando una actividad es secuencia de dos o más actividades anteriores, debe colocarse en la red a continuación de la actividad antecedente más adelantada. Por ello es conveniente hacer la red con lápiz para poder borrar las actividades y cambiarlas fácilmente de lugar. De esta manera, hay que modificar el diagrama de la figura anterior, ya que la actividad 5 es posterior a la 4 y a la 21; la quitamos del lugar que termina en fecha anterior y la colocamos después de la 21 que aparece en fecha más adelantada. Sin embargo, para que no se pierda la secuencia de la 4 con la 5 se coloca una liga entre las dos. Buscamos la continuación de las terminales de las actividades 16, 5, 23 y 10, encontrando que son respectivamente la 17 con dos días; la 6 con cuatro días; la 22 con cuatro días y la 11 con doce días.



Las actividades consecuentes a la 17, 6, 22 y 11 son respectivamente la 6 con cuatro días; la 7 con seis días y ninguna para la 11, por lo que en la red sólo colocamos una liga entre la terminación de la 17 y la iniciación de la 6 para indicar continuidad y otra entre la terminación de la 22 y la iniciación de la 7 con el mismo objeto de continuidad. Ahora colocamos la secuencia de la 6 solamente, pues ya hemos visto que la 11 es final de proceso. La secuencia de la actividad 6 es la 7 con seis días y la secuencia de la actividad 7 es la 8 con duración de cero. No existiendo ninguna otra actividad posterior a las terminales de la red, debe considerarse que se ha terminado con el proyecto, por lo que la duración del mismo es de 26 días.



En virtud de que no deben dejarse eventos sueltos, se pone una liga entre la terminal de la 11 y el evento final del proyecto, quedando toda la red de la siguiente manera y en la que se aprecian las siguientes particularidades:

a) Las actividades que tienen duración cero se indican en forma vertical, bien sea ascendente o descendente, como las correspondientes a las actividades 3, 20 y 8.
b) La actividad 14 con duración cero no aparece dibujada en la red por razones de construcción y sólo se indica junto con la actividad 20 que tiene las mismas características.
c) Las actividades que son consecuentes a dos o más actividades anteriores aparecen dibujadas a continuación de la antecedente que tenga en su evento final la fecha más alta. Como la actividad 5 que es consecuente de las actividades 4 y 21. La 4 termina al día 6 y la 21 termina el día 10. La actividad 7 es secuencia de las actividades 6 y 22 y está colocada enfrente de la que tiene la fecha más alta al terminar, o sea la actividad 6. Esta misma actividad 6 es posterior a las actividades 17 y 5 y está colocada a continuación de la 5 por la razón ya dada.
d) Las ligas que aparecen en la gráfica significan lo siguiente: la actividad 5 es continuación de la 4; la 6 es continuación de la 17; la 7 continúa de la 22 y la 11 acabará al concluir el proyecto.
e) El camino critico es la serie de actividades que se inician en el evento i del proyecto y terminan en el evento j del mismo, sin sufrir interrupción por lo que señalan el tamaño o duración del proyecto, y está representado por las actividades 12, 13, 21, 5, 6, 7 y 8 trazadas con línea doble.

La red anterior se puede dibujar con colores para indicar diferentes responsabilidades: por ejemplo, la responsabilidad del ingeniero electricista se dibuja en rojo, la del ingeniero civil con verde y la del ingeniero de planta con azul.

Teoría general de Redes.

I. Conceptos básicos

1. Proyecto: Conjunto de actividades tendientes a la ejecución de un objetivo.
2. Actividad: Componente del proyecto que va a permitir cumplir con el objetivo fijado.
3. Evento: Parámetro que determina el inicio y fin de una actividad y el inicio y fin del proyecto.

II. Estructura básica

i: Inicio de la actividad

j: Fin de la actividad

tij: Tiempo de la actividad enmarcada dentro de ij

i>j: No se puede.

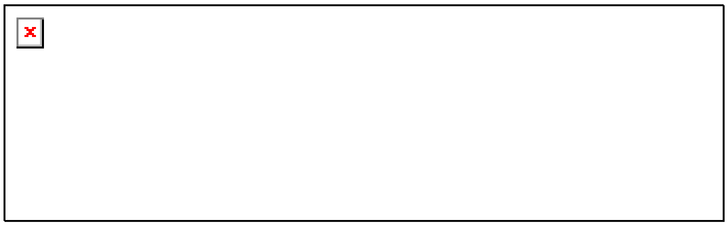
III. Reglas básicas para la construcción de la red

1. Se representan con flechas de izquierda a derecha
2. Toda actividad inicia y termina en un evento ó nodo.

3. Si el inicio de una actividad depende o está determinado por el fin de una actividad precedente el evento inicial de dicha actividad debe ser el evento final de la actividad precedente.

4. Si el inicio de una actividad depende de la terminación de dos o más actividades precedentes, el evento inicial de dicha actividad debe ser el evento final de sus actividades precedentes. (Dependencia múltiple).

5. Si el inicio de dos o más actividades esta determinado por la finalización de una actividad precedente, el evento inicial de dicha actividad debe ser el evento final de la actividad precedente.



6. Si dos o más actividades tienen en común su evento inicial y final, estas actividades son indeterminadas, para poder determinar dichas actividades se debe incluir "n-1" actividades ficticias donde "n" es el número de actividades que se trabajan, ya sea en el evento inicial o en el evento final.

NOTA: Sólo una de las actividades puede ir directamente del evento inicial al final.

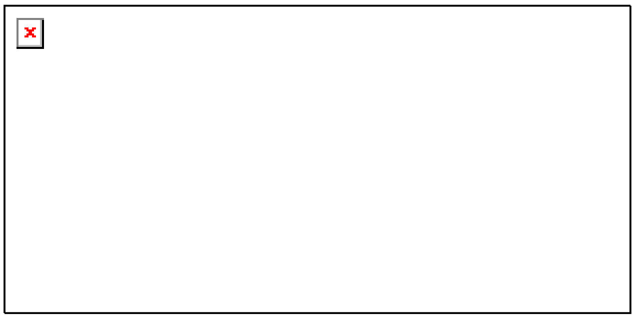
Actividad Ficticia: Es una actividad que no consume tiempo ni recursos.

Costo = $ 0

Tiempo = 0 unidades de tiempo

Se representa por una flecha orientada no continua y se nombra con la letra Si para todo i: 1,...n.

n - 1:



Actividad real:

Costo >0 $

Tiempo > 0 unidades de tiempo

A – Z

Ai - Zi

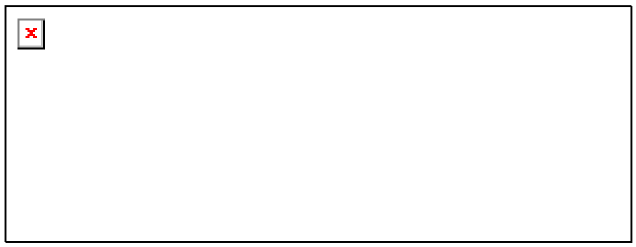
NOTA: La actividad ficticia no es más que la proyección de las actividades que terminan en el evento inicial de dicha actividad.

7. Cuando un evento termina y de él parten más actividades que no son dependientes recíprocamente, entonces, la dependencia se tiene que mostrar o determinar con ayuda de actividades ficticias.

8. Podemos utilizar la cantidad necesaria de actividades ficticias, pero como se habla de técnica de optimización, el número de actividades debe ser mínimo.
9. Si para mayor descripción de una macro actividad es necesario generar detalle de sus actividades componentes, utilice micro actividades denotadas con la letra mayúscula de la macro actividad y el subíndice i para todo i: 1...n.

Ejemplo: El proyecto de una obra civil: Adecuar salones

1. Diseño
2. Adecuación
3. Acabados



10. Una actividad, cualquiera que ella sea, puede suceder solamente una vez.

Unidad IV. Modelo de Inventarios.

Sistemas de Inventarios.

Las empresas mantienen inventarios de materias primas y de productos terminados. Los inventarios de materias primas sirven como entradas al proceso de producción y los inventarios de productos terminados sirven para satisfacer la demanda de los clientes. Puesto que estos inventarios representan frecuentemente una considerable inversión, las decisiones con respecto a las cantidades de inventarios son importantes. Los modelos de inventario y la descripción matemática de los sistemas de inventario constituyen una base para estas decisiones.

Mantener un inventario (existencia de bienes) para su venta o uso futuro es una práctica común en el mundo de los negocios. Las empresas de venta al menudeo, los mayoristas, los fabricantes y aún los bancos de sangre por lo general almacenan bienes o artículos. ¿Cómo decide una instalación de este tipo sobre su "política de inventarios", es decir, cuándo y cómo se reabastece?. En una empresa pequeña, el administrador puede llevar un recuento de su inventario y tomar estas decisiones. Sin embargo, como esto puede no ser factible incluso en empresas chicas, muchas compañías han ahorrado grandes sumas de dinero al aplicar la "administración científica del inventario". En particular, ellos:

1. Formulan un modelo matemático que describe el comportamiento del sistema de inventarios.
2. Derivan una política óptima de inventarios con respecto a este modelo.
3. Con frecuencia, utilizan una computadora para mantener un registro de los niveles de inventario y señalar cuándo deben reabastecer.

Modelo de Inventario sin Déficit.

Fundamentos.

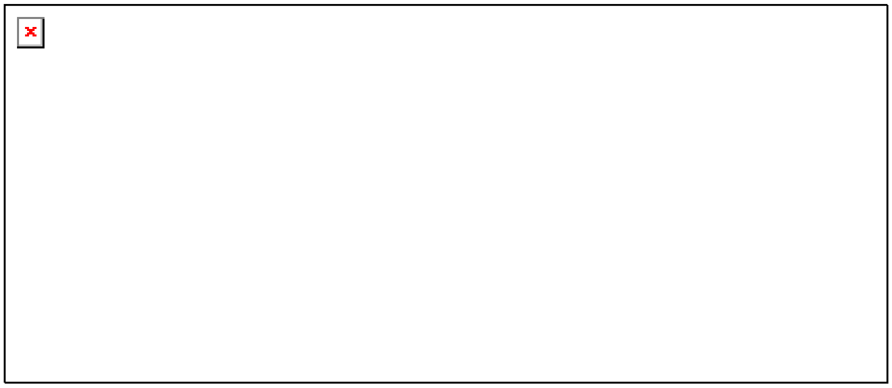
Este modelo tiene como bases el mantener un inventario sin falta de productos para desarrollar las actividades de cualquier empresa.

Este es un modelo de inventarios que se encuentra basado en las siguientes suposiciones:

La demanda se efectúa a tasa constante.
El reemplazo es instantáneo (la tasa se reemplazo es infinita).
Todos los coeficientes de costos son constantes.

En este modelo no se permite la falta de productos para la venta, es decir, una empresa que maneje este modelo de inventario no se puede quedar sin mercancías para la venta.

En la siguiente figura se ilustra esquemáticamente este modelo.



Símbolos

Q = Cantidad optima a pedir

Im = Inventario Máximo

t = Periodo entre pedidos

T = Periodo de Planeación

En este modelo se representan iguales el inventario máximo y la cantidad económica pedida.

Cabe mencionar que esto no siempre es verdadero.

El costo total para un periodo en este modelo esta conformado por tres componentes de costo:

Costo unitario del producto (C_1)
Costo de ordenar una compra (C_2)
Costo de mantener un producto en almacén (C_3)

El costo para un periodo estará conformado de la siguiente manera:

Costo por periodo = [Costo unitario por periodo] + [Costo de ordenar un pedido] + [Costo de mantener el inventario en un periodo]

El costo total para el periodo de planeación estará conformado de la manera siguiente:

Costo total = Costo por periodo x Numero de pedidos a realizar.

Análisis de Ecuaciones.

Costo unitario por periodo.

El costo unitario por periodo simplemente es el costo de la cantidad optima a pedir.

$$C_1 Q$$

Costo de ordenar una compra.

Puesto que solo se realiza una compra en un periodo el costo de ordenar una compra esta definido por:

$$C_2$$

Costo de mantener el inventario por periodo.

El inventario promedio por periodo es [Q / 2]. Por consiguiente el costo de mantenimiento del inventario por periodo es:

Para determinar el costo en un periodo se cuenta con la siguiente ecuación:

El tiempo de un periodo se expresa de la siguiente manera:

Nota: La demanda del articulo en un periodo de planeación se define con la letra **D.**

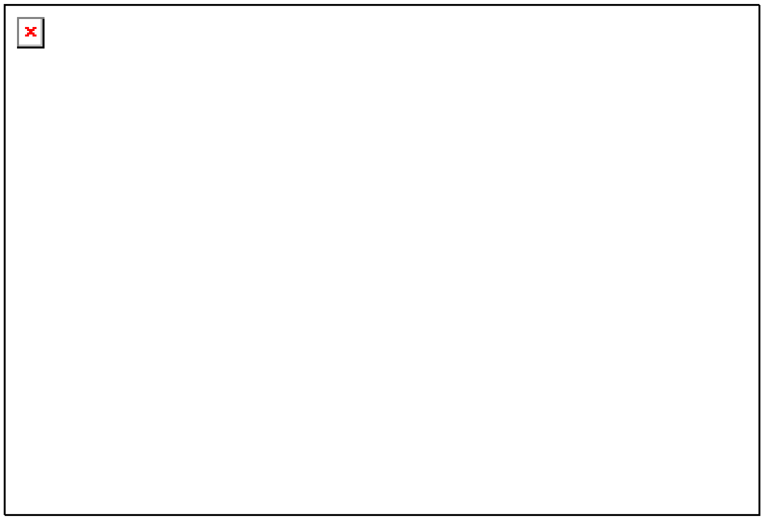
El numero de periodos se expresa de la manera siguiente:

Si se desea determinar el costo total en el periodo de planeación (T) se multiplica el costo de un periodo por el numero de interperiodos (t) que contenga el periodo de planeación. Para determinar este costo se aplica la siguiente ecuación:

Costo Total = Costo (Q*)t

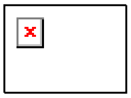
Otra manera de representar el costo total para el periodo de planeación es por medio de la siguiente ecuación:

Cuando los componentes del costo total se representan gráficamente se obtiene un punto óptimo(de costo mínimo).



Una forma de determinar la cantidad optima a pedir es suponer diversos valores de Q y sustituir en la ecuación anterior hasta encontrar el punto de costo mínimo. Un procedimiento mas sencillo consiste en derivar la ecuación del costo total con respecto a Q e igualar la derivada a cero.

Al resolver esta derivada tenemos la ecuación para determinar la cantidad óptima a pedir.

Q = 

Esta ecuación ocasiona un costo mínimo y tiene como base un balance entre los dos costos variables (costo de almacenamiento y costo de compra) incluidos en el modelo. Cualquier otra cantidad pedida ocasiona un costo mayor.

Modelo de Inventario con Déficit.

Fundamentos.

El modelo de compra que permite déficit tiene como base las siguientes suposiciones:

La demanda se efectúa a tasa constante.

El reemplazo es instantáneo (la tasa se reemplazo es infinita).

Todos los coeficientes de costos son constantes.

Este modelo tiene costos normales (costo unitario del producto, costo de ordenar una compra, costo de mantener en inventario) pero además tiene un costo adicional, el costo por unidad de faltante.

En este modelo es posible diferir un pedido, de manera que una vez recibida la cantidad pedida desaparece el déficit, esto se representa claramente en el siguiente esquema.

Q = Cantidad optima a pedir

S = Cantidad de unidades agotadas

Im = Inventario Máximo

t = Periodo entre pedidos

T = Periodo de Planeación

t_1 = Tiempo en donde se cuenta con inventario

t_2 = Tiempo en donde se cuentan con unidades agotadas.

Por consiguiente, en este modelo, los costos de déficit son ocasionados por agotamiento de existencias durante el periodo de tiempo y no por la perdida de ventas.

En este modelo se incluyen los costos de déficit para determinar el costo para un periodo.

Costo por periodo = [Costo unitario por periodo] + [Costo de ordenar un pedido] + [Costo de mantener el inventario en un periodo] + [costo de déficit por periodo]

Análisis de Ecuaciones.

El costo unitario y el costo de ordenar un pedido se determinan de una manera semejante a como se determinan en el modelo de compra sin faltante.

Para determinar el tiempo t_1, el inventario máximo y el tiempo t_2 en función de la cantidad optima a pedir (Q) y la cantidad de existencias agotadas (S) se realiza el siguiente proceso.

El inventario máximo estará definido por:

$$\mathbf{Im = Q - S}$$

Las siguientes ecuaciones se obtienen a partir de la semejanza de triángulos:

Debido a que el tiempo de un periodo t es Q / D. Las ecuaciones anteriores pueden representarse de la siguiente forma.

Sustituyendo las ecuaciones 1,2 y 5 en la ecuación del costo por periodo tenemos.

Multiplicando el costo de un periodo por el numero total de interperiodos que tiene el periodo de planeación obtenemos el costo total.

Para determinar la cantidad optima a pedir y la cantidad de existencias agotadas se realiza una operación de derivación parcial con respecto a cada una de estas variables.

El resultado de estas operaciones nos da como resultado.

Restricciones de Área de Almacenaje e Inversión.

Fundamentos

Existen ocasiones en donde se involucran otro tipo de variables con referencia a la cantidad optima a pedir, como por ejemplo el capital con que se cuente y el espacio para almacenar las unidades adquiridas. Cuando una empresa maneja varios tipos de productos vuelve complicado. La empresa debe de ajustar la cantidad optima a pedir para todos sus productos a las restricciones de capital y área de almacenaje.

Por ejemplo una empresa maneja tres productos A, B, C y debe de realizar pedidos de estos productos. El costo de estos pedidos no deben exceder al capital con que cuente la empresa y al espacio del almacén destinado para almacenar estos pedidos.

Para resolver este tipo de problemas podemos seguir este un sencillo algoritmo.

PASO 1.

Calcular la cantidad optima para cada uno de los productos que maneje la empresa. (**Q_n**)

PASO 2.

Evaluar si las cantidades optimas estimadas se encuentran dentro de las restricciones, es decir, determinar si la restricción es activa.

(Restricción No activa)

(Restricción Activa)

Cuando la restricción no es activa se pueden pedir la **Qn** unidades obtenidas. En caso contrario estas **Qn** se deben ajustar a las restricciones.

Una forma de ajustar las cantidades optimas a pedir a las restricciones es por Multiplicadores de Lagrange realizando un algoritmo recursivo en donde el resultado obtenido es aproximado con un cierto error de desviación.

Restricción No Activa

Cuando la restricción no es activa el coso total para un periodo de planeación estará definido por la siguiente ecuación:

La cantidad optima se calculará con la siguiente ecuación:

Restricción Activa

Cuando la restricción es activa el costo total para un periodo de planeación estará definido por la siguiente ecuación.

La cantidad optima se calculará con la siguiente ecuación:

l = Valor Variable

a_i = Área que ocupa un articulo i

Sistema de Inventario Q – Sistema de Inventario P

Introducción.

Mantener un inventario (existencia de bienes) para su venta o uso futuro es una práctica común en el mundo de los negocios. Las empresas de venta al menudeo, los mayoristas, los fabricantes y aún los bancos de sangre por lo general almacenan bienes o artículos. ¿Cómo decide una instalación de este tipo sobre su "política de inventarios", es decir, cuándo y cómo se reabastece?. En una empresa pequeña, el administrador puede llevar un recuento de su inventario y tomar estas decisiones. Sin embargo, como esto puede no ser factible incluso en empresas chicas, muchas compañías han ahorrado grandes sumas de dinero al aplicar la "administración científica del inventario". En particular, ellos

1. Formulan un modelo matemático que describe el comportamiento del sistema de inventarios.

2. Derivan una política óptima de inventarios con respecto a este modelo.

3. Con frecuencia, utilizan una computadora para mantener un registro de los niveles de inventario y señalar cuándo conviene reabastecer.

Definición del Problema de Inventario.

Un problema de inventario existe cuando es necesario guardar bienes físicos o mercancías con el propósito de satisfacer la demanda sobre un horizonte de tiempo especificado (finito o infinito). Casi cada empresa debe almacenar bienes para asegurar un trabajo uniforme y eficiente en sus operaciones. Las decisiones considerando cuándo hacer pedidos y en qué cantidad, son típicas de cada problema de inventario. La demanda requerida puede satisfacerse almacenando una vez según todo el horizonte de tiempo o almacenando separadamente cada unidad de tiempo durante el horizonte. Los dos casos que pueden considerarse son sobre-almacenamiento (con respecto a una unidad de tiempo) o sub-almacenamiento (con respecto al horizonte completo).

Un sobre-almacenamiento requeriría un capital invertido superior por unidad de tiempo pero menos ocurrencias frecuentes de escasez y de colocación de pedidos. Un sub-almacenamiento por otra parte disminuiría el capital invertido por unidad de tiempo pero aumentaría la frecuencia de los pedidos así como el tiempo de estar sin mercancía. Los dos extremos son costosos. Las decisiones considerando la cantidad ordenada y el tiempo en el cual se ordena pueden, por consiguiente, estar basadas sobre la minimización de un a función de costo apropiada la cual balancea los costos totales resultantes de sobre-almacenamiento y sub-almacenamiento.

Antes de comentar acerca de los sistemas de inventarios se presentan primero características básicas de un sistema de inventarios:

Parámetros económicos: estos parámetros incluyen los tipos siguientes:

a. **Costo fijo.** Esto implica el costo fijo asociado a la colocación de un pedido o con la preparación inicial de una instalación de producción. El costo fijo usualmente se supone independiente de la cantidad ordenada o producida.

b. **Precios de compra o costo de producción.** Este parámetro de especial interés cuando pueden obtenerse descuentos por mayoreo o rebajas en precio o cuando grandes corridas de producción pueden dar como resultado una disminución en el costo de la misma. En estas condiciones la cantidad ordenada debe ajustarse para aprovechar de estos cambios en el precio.

c. **Precio de venta.** En algunas situaciones de inventarío la demanda puede ser afectada por la cantidad almacenada. En tales casos el modelo de decisión está basado en un criterio de maximización de beneficios el cual comprende el ingreso de venta de la mercancía. El precio de venta unitario puede ser constante o variable dependiendo, por ejemplo, de si se permite un descuento o no en la cantidad.

d. **Costo de mantenimiento del inventario.** Esto representa el costo de tener el inventario en el almacén. Incluye el interés sobre capital invertido, costos de almacenamiento, costos de manejo, costos de depreciación, etc. Los costos de llevar el inventario usualmente se supone que varían directamente con el nivel de inventario, así como con el tiempo que el articulo se tiene en almacén.

Demanda. El modelo de demanda de una mercancía puede ser determinista o probabilista. En el caso del determinista se supone que se conocen con certeza las cantidades necesarias sobre períodos subsecuentes. Esto puede expresarse según períodos iguales en términos de demandas constantes conocidas, o en función de demandas variables conocidas. Los dos casos se denominan demandas estática y dinámica, respectivamente:

La demanda probabilísticas ocurre cuando los requisitos durante un cierto período no se conocen con certeza si no que su modelo puede describirse por una distribución conocida de probabilidad. En este caso, se dice que la distribución de probabilidad es estacionaria o no estacionaria en el tiempo. (Estos términos son equivalentes a demandas estática y dinámica en el caso determinista).

La demanda para un período dado puede satisfacerse instantáneamente al inicio del período o uniformemente durante dicho lapso. El efecto de demandas instantáneas y uniformes deberá reflejarse directamente en el costo total de llevar el inventario.

Ciclo para ordenar. Consiste en la medida de tiempo de la situación de inventario. Un ciclo de órdenes o pedidos puede identificarse por el período entre dos órdenes sucesivas. Lo último puede iniciarse en una de dos formas:

a. **Revisión continua** donde un registro del nivel de inventario se actual9iza continuamente hasta que se alcanza un cierto límite inferior, en cuyo punto se coloca un nuevo pedido. Esto se conoce algunas veces como el sistema de "dos depósitos".

b. **Revisión periódica** donde los pedidos se hacen usualmente a intervalos igualmente espaciados.

Demoras en la entrega: Cuando se coloca un pedido, puede entregarse inmediatamente o puede requerir algún tiempo antes de que la entrega se efectúe. El tiempo entre la colocación de un pedido y su surtido se conoce como demora en la entrega. En general, las holguras de entrega pueden ser deterministas o probabilista.

Reabasto del almacén: aunque un sistema de inventario puede operar con demora en las entregas, el abastecimiento real del almacén puede ser instantáneo o uniforme. El instantáneo ocurre cuando el almacén compra de fuentes externas. El uniforme puede ocurrir cuando el producto se fabrica localmente dentro de la organización. En general, un sistema puede operar con demora positiva en la entrega y también con reprovisamiento de almacén.

Horizonte de Tiempo: el horizonte define el período sobre el cual el nivel de inventarios estará controlado. Este horizonte puede ser finito o infinito, dependiendo de la naturaleza o la demanda.

Abastecimiento múltiple: Un sistema de inventario puede tener puede tener varios puntos de almacenamiento (en lugar de uno). En algunos casos estos puntos de almacenamiento están organizados de tal manera que un punto actúa como una fuente de abastecimiento para algunos otros puntos. Este tipo de operación puede repetirse a diferentes niveles de tal manera que un punto de demanda pueda llegar a ser un nuevo punto de abastecimiento. La situación usualmente se denomina sistema de abastecimiento múltiple.

Número de artículos: Un sistema de inventarios puede comprender más de un articulo (mercancías). Este caso es de interés, principalmente si existe una clase de interacción entre los diferentes artículos. Por ejemplo, estos pueden competir en espacio o capital total limitados.

Sistemas de Inventario

Dos sistemas de inventario muy utilizados son el sistema de pedido de tamaño fijo y el sistema de pedido de intervalo fijo. Se designa como sistema **Q** al sistema de pedido de tamaño fijo, mientras que el sistema de pedido de intervalo fijo se designa como sistema **P**. La diferencia básica entre los dos consiste en que en el sistema Q se pide una cantidad fija a intervalos variables de tiempo y en el sistema P se ordena cantidad variable a intervalos fijos de tiempo.

Formulas para los sistemas ***P*** y ***Q***.

Para determinar la cantidad pedida es:

El tiempo entre pedido es (IP intervalo entre pedidos):

Las existencias de seguridad (ES):

ES para el sistema ***P*** se calcula de la siguiente forma ya que este sistema tiene como base el intervalo entre pedidos más el tiempo promedio de anticipación (***IP + L***), entonces ES queda:

Cantidad pedida = ***Q*** óptimo + existencias de seguridad - inventario disponible – unidades pedidas + demanda promedio en el tiempo de anticipación

El costo total anual se calcula con la siguiente ecuación.

en donde:
$\mathbf{C_1}$: es el Costo de una unidad
$\mathbf{C_2}$: es el Costo de hacer una compra
$\mathbf{C_3}$: es el Costo de almacenar
$\mathbf{D_m}$: es la Demanda máxima
: es la Demanda promedio
t = tiempo entre pedidos
L= tiempo de anticipación
ES : son las existencias de seguridad

Cuando el sistema de inventario es determinístico y la tasa de demanda es constante, realmente hay poca diferencia entre los sistemas Q y P. Primero analizaremos el sistema Q con los siguientes datos.

Ejemplo

La de manda de un articulo particular es 18,000 unidades / año. El costo de almacenamiento por unidad es de \$1.20 por año y el costo de ordenar una compra es de \$400, el tiempo de anticipación (L) es de 20 días, el costo de una unidad es de \$1. (Se supone 1 año = 250 días):

Para determinar la cantidad a pedir se hace lo siguiente:

unidades

El intervalo entre pedidos es:

1 año = 250 días

días

La demanda diaria se saca de la siguiente forma. Como la demanda es de 18,000 por unidades por año y 1 año = 250 días, entonces:

unidades / día

El tiempo de anticipación es L=20 días; por tanto el número de unidades que podrían requerirse durante el tiempo de anticipación es:

Demanda en el periodo de anticipación = D L , si el tiempo de anticipación es de 20 días y la demanda diaria es de 72 unidades / día, entonces la demanda en periodo de anticipación es ***72(20)=1,440*** *unidades.*

La representación gráfica de estas cantidades que se muestra en la figura 2-1 indica la siguiente regla de pedido: Verificar continuamente nivel de inventario, y cuando el nivel del inventario alcance 1440 unidades, se ordenan 3,465 unidades.

Aplicando esta regla se obtiene un costo total anual de $22,156 sin permitir déficit.

$$= 18{,}000 + 2{,}078 + 2078 = \$\ 22{,}156 \text{ por año.}$$

Si se permite déficit el punto de pedido disminuye. Por ejemplo, puede suponerse que el tiempo de anticipación de 20 días y el numero de unidades agotadas de 747, el punto de pedido es

$$72(20) - 747 = 693 \text{ unidades}$$

Si el tiempo de anticipación hubiera sido mayor que 48 días, el nivel (punto) de pedido sobrepasa el nivel de inventario. Por ejemplo, puede suponerse que el tiempo de anticipación del ***ejemplo 2-1*** es 60 días en lugar de 20 días. Esto indicaría un punto de pedido de

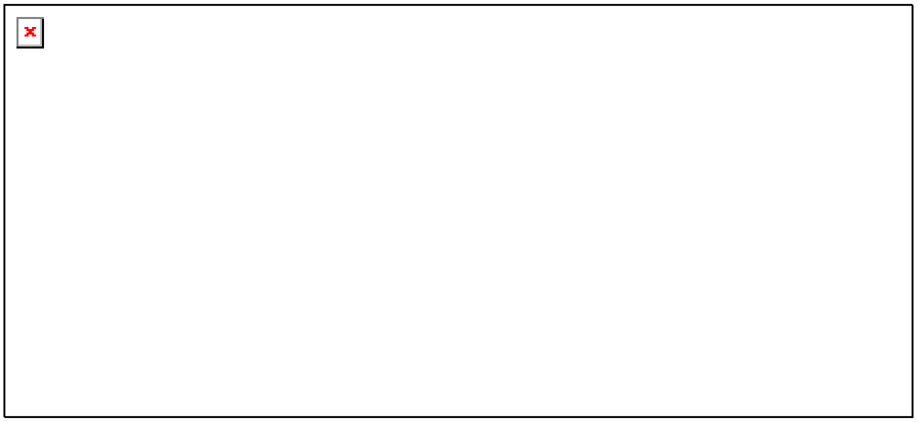
$$60(72) = 4.320 \text{ unidades}$$

Sin embargo, esto es imposible ya que la figura 2-1 indica que el nivel inventario nunca es mayor que 3,465 unidades. El valor de 4,320 unidades implica que cuando el número de unidades en inventario (disponible) y el número de unidades pedidas pero no recibidas es 4,320 unidades, entonces se hace un pedido de 3,465 unidades.

Ahora se discute un sistema P.

En el ejemplo anterior debería usarse un intervalo entre pedidos de 48 días ya que este es el intervalo óptimo indicado por un balance entre los costos de compra e inventario. Cualquier intervalo entre pedidos menor que 48 días ocasiona mayores costos de compra, y cualquier intervalo entre pedidos mayor que 48 días ocasiona déficit.

 días



El sistema P representado en la figura anterior para los datos del ejemplo anterior indica la siguiente regla de pedido: determinar el nivel de inventario cada 48 días y en ese momento pedir una cantidad igual a Cantidad pedida = Q óptimo + existencias de seguridad - existencias disponibles - unidades pedidas + cantidad requerida para un período completo de anticipación.

En este caso, el tamaño del pedido es igual a

$$3{,}465 + 0 - 1{,}440 - 0 + 72(20) = 3{,}465 \text{ unidades}$$

Esta cantidad pedida debe ser la misma en cada punto de pedido ya que todas las componentes de la ecuación de la cantidad pedida son constantes debido a que el sistema es determinístico y la tasa de demanda es constante. Además, por las mismas causas los períodos entre pedidos (48 días) son iguales en ambos sistemas. Por consiguiente, los dos sistemas dan iguales resultados ***siempre que*** los sistemas sean determinísticos y la tasa de demanda sea constante.

Se presentan diferencias entre los dos sistemas cuando la demanda, el tiempo de anticipación, o ambos se vuelven probabilísticos.

Un enfoque para manejar sistemas probabilísticos de inventario es suponer un modelo de inventario basado en existencias de seguridad (existencias amortiguadoras). Las existencias de seguridad sirven de amortiguador para absorber las variaciones de la demanda y del tiempo de anticipación. También sirven como medio de regulación de las unidades agotadas. Este enfoque permite una aproximación razonable hacia una solución óptima. Es una aproximación ya que supone que las existencias de seguridad para el tiempo de anticipación y el intervalo entre pedidos son independientes. Obviamente, esta suposición no es correcta.

V. Líneas de Espera.

Teorías de Líneas de Espera.

Con el objeto de verificar si una situación determinada del sistema de líneas de espera se ajusta o no a un modelo conocido, se requiere de un método para clasificar las líneas de espera. Esa clasificación debe de responder preguntas como las siguientes:

1.-¿ El sistema de líneas de espera tiene un solo punto de servicio o existen varios puntos de servicio en secuencia?

2.-¿Existe solo una instalación de servicio o son múltiples las instalaciones de servicio que pueden atender a una unidad?

3.- ¿ Las unidades que requieren el servicio llegan siguiendo algún patrón o llegan en forma aleatoria?

4.- ¿El tiempo que requieren para el servicio se da en algún patrón de o asume duraciones aleatorias de tiempo?

Notación Kendall.

Por lo general, las tasas de llegada y de servicio no se conocen con certidumbre sino que son de naturaleza estocástica o probabilística. Es decir los tiempos de llegada y de servicio deben describirse a través de distribuciones de probabilidad y las distribuciones de probabilidad que se elijan deben describir la forma en que e comportan los tiempos de llegada o de servicio.

En teoría de líneas de espera o de colas se utilizan tres distribuciones de probabilidad bastante comunes, estan se mencionan a continuación:

Markov
Determinística
General

La distribución de Markov, en honor al matemático A.A. Markov quien identifico los eventos "sin memoria", se utiliza para describir ocurrencias aleatorias, es decir, aquellas de las que puede decirse que carecen de memoria acerca de los eventos pasados.

Una distribución determinística es aquella en que los sucesos ocurren en forma constante y sin cambio.

La distribución general sería cualquier otra distribución de probabilidad. Es posible describir el patrón de llegadas por medio de una distribución de probabilidad y el patrón de servicio a través de otra.

Para permitir un adecuado uso de los diversos sistemas de líneas de espera, kendall, matemático británico elaboro una notación abreviada para describir en forma sucinta los parámetros de un sistema de este tipo. En la notación Kendall un sistema de líneas de espera se designa como

A / B / C

En donde

A = se sustituye por la letra que denote la distribución de llegada.

B = se sustituye por la letra que denote la distribución de servicio.

C = se sustituye por el entero positivo que denote el numero de canales de servicio.

La notación kendall también utiliza M = Markoviano, D = determinística, G = General, por ejemplo un sistema de líneas de espera con llegadas aleatorias, servicio determinístico y tres canales de servicio se identificará en notación Kendall como

M / D / 3

En todos los casos se supone que solo existe una sola línea de entrada.

Es evidente que existen otros atributos aparte de los que se analizaron antes y que deben de tomarse en consideración como por ejemplo:

El tamaño de la población de los que provienen los elementos que ingresan al sistema de líneas de espera.
La forma en que las unidades llegan para ingresar al sistema de líneas de espera; por ejemplo, una por una o en forma de grupos.
Si las unidades rechazan o no debido a la longitud de la línea de espera y no ingresan al sistema.
Si las unidades se arrepienten y abandonan el sistema después de haber aguardado un tiempo en la fila.
Si existe o no espacio suficiente para que todas las unidades que llegan aguarden en la fila.

Los modelos de Líneas de espera que se analizarán son los siguientes:

Modelo M / M / 1

Modelo M / M / S

Modelo M / G / 1

Modelo M / D / 1

Modelo M / M / 1

Este sistema trata de una distribución de llegada Markoviano, tiempo de servicio Markoviano, y un servidor.

Llegadas aleatorias (M / M / 1)

En las situaciones cotidianas es fácil encontrar ejemplos de llegadas aleatorias, puesto que las llegadas serán aleatorias en cualquier caso en la que una de ellas no afecte a las otras. Un ejemplo clásico de llegadas aleatorias son las llamadas que arriban a un conmutador telefónico o un servicio de emergencia.

Se ha determinada que las ocurrencias aleatorias de un tipo especial pueden describirse a través de una distribución discreta de probabilidad bien conocida, la distribución de **Poisson**. Este tipo especial de llegadas aleatorias supone características acerca de la corriente de entrada. En primer lugar, se supone que las llegadas son por completo independientes entre sí y con respecto al estado del sistema.

En segundo lugar la probabilidad de llegada durante un periodo especifico no depende de cuando ocurre el periodo, sino más bien, depende solo de la longitud del intervalo. Se dicen que estas ocurrencias carecen de "memoria".

Si conocemos el numero promedio de ocurrencias por periodo, podemos calcular las probabilidades acerca del numero de eventos que ocurrirán en un periodo determinado, utilizando las probabilidades conocidas de la distribución de Poisson.

En particular, existe un promedio de l llegadas en un periodo, T, la probabilidad de n llegadas en el mismo periodo esta dado por:

P[n llegadas en le tiempo T] =

Por ejemplo si existe un promedio de 6 llegadas aleatorias por hora, la probabilidad de que haya solo 3 llegadas durante una hora esta dada por:

P[6 llegadas en le tiempo en una hora] = = 0.0892

Tiempo de servicio aleatorio (M / M / 1)

Al igual que las llegadas aleatorias, la ocurrencia de tiempos de servicios aleatorios, carentes de memoria, es suceso bastante común en las situaciones cotidianas de líneas de espera. Y al igual que las llegadas aleatorias los tiempos de servicio carentes de memoria se describen a través de una distribución de probabilidad.

La diferencia entre las llegadas aleatorias y los tiempos de servicio aleatorios es que estos se describen a través de una distribución continua en tanto que las llegadas se describen a través de una distribución de Poisson, que es discreta. Si la duración de los tiempos de servicio es aleatoria, la **distribución exponencial negativa** describe ese tipo de servicio. Si la m es la tasa promedio de servicio entonces la distribución esta dada por:

$$\mathbf{F(t) = m\ e^{-m\ t}}$$

Es posible emplear esta formula para calcular la probabilidad de que el servicio sea mas prolongado que alguna duración especificada de tiempo T. En la siguiente figura se representa es modelo.

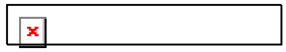
Características de operación

Para calcular las características de operación de una cola M / M / 1, primero debemos de observar que sí l = tasa promedio de llegadas y m = tasa promedio de servicio, entonces l debe de ser menor que m . Si esto no ocurriera el promedio de llegadas sería superior al numero promedio que se atienden y el numero de unidades que están esperando se volvería infinitamente grande. Si hacemos que r **= l / m** puede denominarse a r como factor de utilización. Este valor es la fracción promedio de que el sistema este ocupado, también sería el numero promedio de unidades que están siendo atendidas en cualquier momento. En términos de probabilidad tendríamos que:

Pw = probabilidad de que el sistema esté ocupado.

Entonces la probabilidad de que el sistema no esté trabajando, o esté vacío, P_0, puede obtenerse por medio de:

A partir de esto podemos obtener la probabilidad de que haya n unidades en el sistema, **Pn,** mediante:



en donde n es cualquier entero no negativo. Este importante resultado nos permite calcular las características de operación de las líneas de espera.

La primera característica de operación que calculamos es el numero promedio de unidades que se encuentran en el sistema, ya sea esperando o siendo atendidas. Denominaremos a este número promedio de unidades promedio, **L.** Entonces tenemos que:

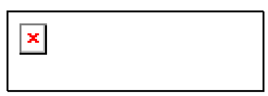
Con estos valores obtenidos podemos calcular el numero promedio de unidades que esperan ser atendidas, **Lq.** Dado que L es el numero de unidades que están esperando o están siendo atendidas, y r es el numero promedio de unidades que están siendo atendidas en algún momento dado entonces:

$$\mathbf{L = Lq + r}$$

A partir de esto es fácil observar que

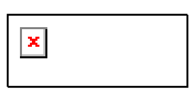
$$\mathbf{Lq = L - r}$$

O también podríamos decir que

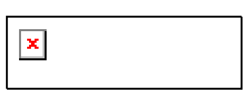


Ahora examinaremos el tiempo de espera. Utilizaremos **W** para representar el tiempo promedio o esperado que una unidad se encuentra en el sistema. Para encontrar **W**, observaremos que se L el numero esperado de unidades de en le sistema y l es el numero promedio de unidades que llegan para ser atendidas por periodo, entonces el tiempo promedio de cualquier unidad que llega debe estar en le sistema está dado por:

W = tiempo promedio de una unidad en el sistema



De manera similar, el tiempo esperado o promedio que una unidad tiene que esperar antes de ser atendida, **Wq**, esta dado por:



En la siguiente figura se representa este modelo.

Modelo M / M / S

Este modelo supone llegadas y tiempos de servicio aleatorios para canales de servicio múltiples, teniendo las mismas consideraciones que le modelo de canal único de servicio (M / M / 1), excepto que ahora existe una sola fila de entrada que alimenta los canales múltiples de servicio con iguales tasas de servicio.

El cálculo de las características de la línea de espera para el modelo M / M / S es lago mas complicado que los cálculos para el caso de canal único, y dado que primordialmente nos interesa las implicaciones de estas características mas que las formulas necesarias para calcularlos, nos apoyaremos en le uso de tablas elaboradas a partir de estas formulas para hacer los cálculos.

Características de operación.

En el modelo **M / M / S**, si m es la tasa promedio de servicio para cada uno de los **S** canales de servicio, entonces ya no se requiere que m > l , pero Sm debe ser mayor que l para evitar una acumulación infinita de líneas de espera. En el caso de **M / M / S**, la característica que se utilizará para hacer los demás cálculos es la probabilidad de que el sistema esté ocupado. En otras palabras, la probabilidad es de que haya S o más unidades en el sistema. En este caso todos los canales de servicio se estarán utilizando y por ello se dice que el sistema está ocupado. Esto de puede representar como:

P(Sistema ocupado) =

Y lo podemos calcular por medio de la siguiente ecuación:

P(Sistema ocupado) =

En donde **Po** estará representado por

Con las ecuaciones anteriores podemos calcular los demás datos que requiera el sistema. En el modelo **M / M / S**, al igual que el modelo **M / M / 1**, se tiene que **L = Lq + r,** pero aquí utilizaremos el valor P(sistema ocupado) para calcular Lq:

Lq = P(sistema ocupado) x

Ahora calcularemos el valor L

Lq = P(sistema ocupado) x

En el caso de **M / M / S**, al igual que en el modelo **M / M / 1**, **W = L / l** y **Wq = Lq / l** , por ello se tiene que

En la siguiente figura se representa este modelo.

Modelo M / D / 1

Descripción.

Sistema de líneas de espera con llegadas aleatorias, tiempo de servicio constante, una línea de servicio y una línea de espera.

En este modelo los tiempos de servicio son determinísticos, este es un caso especial de la situación M / G / 1 que se analizó con anterioridad, en donde la desviación estándar es igual a cero. En este caso se puede conocer el numero de unidades que están esperando a ser atendidas (Lq), a través de la siguiente ecuación:

Todas las demás características de operación pueden determinarse a partir de este valor. Si utilizamos Lq podemos determinar el valor de L, por medio de la siguiente ecuación:

Al igual que las características de operación de los modelos M / M / 1 y M / S / 1, podemos calcular el tiempo esperado en el sistema de líneas de espera (W), y el tiempo que se invierte antes de ser atendido (Wq), esto lo podemos realizar por medio de las siguientes ecuaciones:

VI. Teoría de Juegos.

La Teoría de Juegos se desarrollo con el simple hecho de que un individuo se relacionen con otro u otros. Hoy en día se enfrenta cotidianamente a esta teoría, en cualquier momento, tenemos por ejemplo cuando nos inscribimos en un nuevo semestre en la universidad, cuando la directiva toma la decisión sobre el monto que se va a cobrar, la directiva está realizando un juego con sus clientes, en este caso los alumnos. Para el hombre la importancia que representa la Teoría de Juegos es evidente, pues a diario se enfrenta a múltiples situaciones que son juegos.

Actualmente la Teoría de Juegos se ocupa sobre todo de que ocurre cuando los hombres se relacionan de forma racional, es decir, cuando los individuos se interrelacionan utilizando el raciocinio. Sin embargo, la Teoría de Juegos tiene todas las respuestas a los todos problemas del mundo.

¿Qué es la teoría de juegos?

Evidentemente definir la Teoría de Juegos es tan absurda como su lógica, pero la realidad es que la Teoría de Juegos consiste en razonamientos circulares, los cuales no pueden ser evitados al considerar cuestiones estratégicas. Por naturaleza, a los humanos no se les da muy bien pensar sobre los problemas de las relaciones estratégicas, pues generalmente la solución es la lógica a la inversa.

En la Teoría de Juegos la intuición no educada no es muy fiable en situaciones estratégicas, razón por la que se debe entrenar tomando en consideración ejemplos instructivos, sin necesidad que los mismos sean reales. Por lo contrario en muchas ocasiones disfrutaremos de ventajas sustanciales estudiando juegos, si se eligen cuidadosamente los mismos En estos juegos-juegos, se pueden desentender de todos los detalles.

Si en lugar de utilizar personajes ficticios utilizamos personajes reales para los juegos si se observase qué tan honesto es ese personaje, cómo manipularía la información obtenida, etc. Para un especialista en Teoría de Juegos el ser deshonesto, etc., sería un error comparable al de un matemático que no respeta las leyes de la aritmética porque no le gustan los resultados que está obteniendo.

Origen de la teoría de juegos.

La Teoría de Juegos fue creada por Von Neumann y Morgenstern en su libro clásico The Theory of Games Behavior, publicado en 1944. Otros habían anticipado algunas ideas.Los economistas Cournot y Edgeworth fueron particularmente innovadores en el siglo XIX. Otras contribuciones posteriores mencionadas fueron hechas por los matemáticos Borel y Zermelo. El mismo Von Neumann ya había puesto los fundamentos en el artículo publicado en 1928. Sin embargo, no fue hasta que apareció el libro de Von Neumann y Morgenstern que el mundo comprendió cuán potente era el instrumento descubierto para estudiar las relaciones humanas.

Todavía encontramos profesores mayores que nos explican que la Teoría de juegos o sirve para nada porque la vida no es un “Juego de suma cero”, o porque se puede obtener el resultado que uno quiera seleccionando el apropiado “concepto de solución cooperativa”.

Afortunadamente las cosas han evolucionado con mucha rapidez en los últimos veinte años, y éste y otros libros modernos sobre teoría de juegos ya no padecen algunos de los presupuestos restrictivos que Von Neumann y Morgenstern consideraron necesarios para progresar. Como resultado, lo que la teoría de juegos prometía en un principio se está empezando a cumplir. En los últimos años, sus repercusiones en la teoría económica sólo se pueden calificar de explosivas. Todavía es necesario, sin embargo, saber algo de la corta historia de juegos, aunque sólo sea para entender por qué se usan algunos términos.

Von Neumann y Morgenstern investigaron dos planteamientos distintos de la Teoría de Juegos. El primero de ellos el planteamiento estratégico o no cooperativo. Este planteamiento requiere especificar detalladamente lo que los jugadores pueden y no pueden hacer durante el juego, y después buscar cada jugador una estrategia óptima. Lo que es mejor para un jugador depende de lo que los otros jugadores piensan hacer, y esto a su vez depende de lo que ellos piensan del primer jugador hará. Von Neumann y Morgenstern resolvieron este problema en el caso particular de juegos con dos jugadores cuyos intereses son diametralmente opuestos. A estos juegos se les llama estrictamente competitivos, o de suma cero, porque cualquier ganancia para un jugador siempre se equilibra exactamente por una pérdida correspondiente para el otro jugador. El ajedrez, el backgammon y el póquer son juegos tratados habitualmente como juegos de suma cero.

La segunda parte del libro de Von Neumann y Morgenstern desarrollaron el planteamiento coalicional o cooperativo, en el que buscaron describir la conducta óptima en juegos con muchos jugadores. Puesto que éste es un problema mucho más difícil, no es de sorprender que sus resultados fueran mucho menos precisos que los alcanzados para el caso de suma cero y dos jugadores. En particular, Von Neumann y Morgenstern abandonaron todo intento de especificar estrategias óptimas para jugadores individuales. En lugar de ello se propusieron clasificar los modelos de formación de coaliciones que son consistentes con conductas racionales. La negociación, en cuanto a tal, no jugaban papel alguno en esta teoría. De hecho, hicieron suyo el punto de vista, que había predominado entre los economistas al menos desde la época de Edgeworth, según el cual los problemas de negociación entre dos personas son inherentemente indeterminados.

A principio de los años cincuenta, en una serie de artículos muy famosa el matemático John Nash rompió dos de las barreras que Von Neumann y Morgenstern se había auto-impuesto. En el frente no cooperativo, estos parecen haber pensado que en estrategias la idea de equilibrio, introducida por Cournot en 1832, no era en sí misma una noción adecuada para construir sobre ella una teoría –de aquí que se restringieran a juegos de suma cero-. Sin embargo, la formulación general de Nash de la idea de equilibrio hizo ver claramente que una restricción así es innecesaria. Hoy día, la noción de equilibrio de Nash, la cual no es otra cosa que cuando la elección estratégica de cada jugador es la respuesta óptima a las elecciones estratégicas de los otros jugadores. A Horace y Maurice les fueron aconsejados, por su consultor especialista en teoría de juegos, que usaran un equilibrio de Nash. Es tal vez, el más importante de los instrumentos que los especialistas en teoría de juegos tienen a disposición. Nash también hizo contribuciones al planteamiento cooperativo de Von Neumann y Morgenstern. Nash no aceptó la idea de que la teoría de juegos debe considerar indeterminados problemas de negociación entre dos personas y procedió a ofrecer argumentos para determinarlos. Sus ideas sobre este tema fueron generalmente incomprendidas y, tal vez como consecuencia de ello, los años que la teoría de juegos paso en Babia se gastaron principalmente desarrollando el planteamiento cooperativa de Von Neumann y Morgenstern en direcciones que finalmente resultaron improductivas.

La historia de la teoría de juegos en los últimos veinte años está demasiado repleta de incidentes para ser contada. Algunos nombres, sin embargo, no deben ser pasados en silencio. El acróstico NASH puede ayudar a quienes son. El propio Nash tiene la letra N, A por Aumann, S es Shapley y también por Selten y H es por Hansanyi.

Lo que es tal vez más importante sobre los últimos veinte años de teoría de juegos es que los mayores progresos se han dado en la teoría no cooperativa.

Es difícil explicar hacia donde se dirige la teoría de juegos a una audiencia que no sabe dónde se encuentra. Estas observaciones, por tanto, son para quienes ya saben algo de teoría de juegos.

Tengo opiniones muy decididas sobre la dirección que la teoría de juegos debería tomar, y es reconfortante ver las cosas parece que se mueven en la dirección correcta. Es justo, sin embargo, que en algún momento ponga las cartas boca arriba. Así pues tengo que decir que creo que la mayor parte de la literatura sobre "refinamientos del equilibrio de Nash" ha de ser catalogada junto con las obras de la escolástica medieval. Para ser incluso más polémico, quiero añadir que los intentos por hacer del bayesianismo los fundamentos de la teoría de juegos no deben ser comparados a la construcción de casas sobre arena, sino a la construcción de castillos en el aire. Visto retrospectivamente, nos parecerán realmente muy extraños los intentos actuales de hacer de la teoría bayesiana de la decisión algo más que un instrumento analítico conveniente.

Aplicaciones de la teoría de juegos

La Teoría de Juegos actualmente tiene muchas aplicaciones, sin embargo, la economía es el principal cliente para las ideas producidas por los especialistas en Teoría de Juego. Entre las disciplinas donde hay aplicación de la Teoría de Juegos tenemos:

La economía

No debería sorprender que la Teoría de Juegos haya encontrado aplicaciones directas en economía. Esta triste ciencia se supone que se ocupa de la distribución de recursos escasos. Si los recursos son escasos es porque hay más gente que los quiere de la que puede llegar a tenerlos. Este panorama proporciona todos los ingredientes necesarios para un juego. Además, los economistas neoclásicos adoptaron el supuesto de que la gente actuará racionalmente en este juego. En un sentido, por tanto, la economía neoclásica no es sino una rama de la Teoría de Juegos. Los economistas que no se dan cuenta de ello son como el monsieur Jourdain de Le Bourgeois Gentilhomme, de Moliere, que se sorprendió de saber que había estado hablando en prosa durante toda la vida sin saberlo. Sin embargo, aunque los economistas pueden haber sido desde siempre especialistas camuflados en Teoría de Juegos, no podían progresar por el hecho de no tener acceso a los instrumentos proporcionados por Von Neumann y Morgenstern. En consecuencia sólo podían analizar juegos particularmente simples. Esto explica por qué el monopolio y la competencia perfecta se entienden bien, mientras a todas las demás variedades de competencia imperfecta que se dan entre estos dos extremos sólo ahora se les está empezando a dar el tratamiento detallado que merecen.

La razón por la que el monopolio es simple desde el punto de vista de la Teoría de Juegos es que puede ser tratado como un juego con un único jugador. La razón por que la competencia perfecta es simple es que el número de jugadores es de hecho infinito, de manera que cada agente individual no puede tener un efecto sobre agregados de mercado si el o ella actúa individualmente.

En la ciencia política.

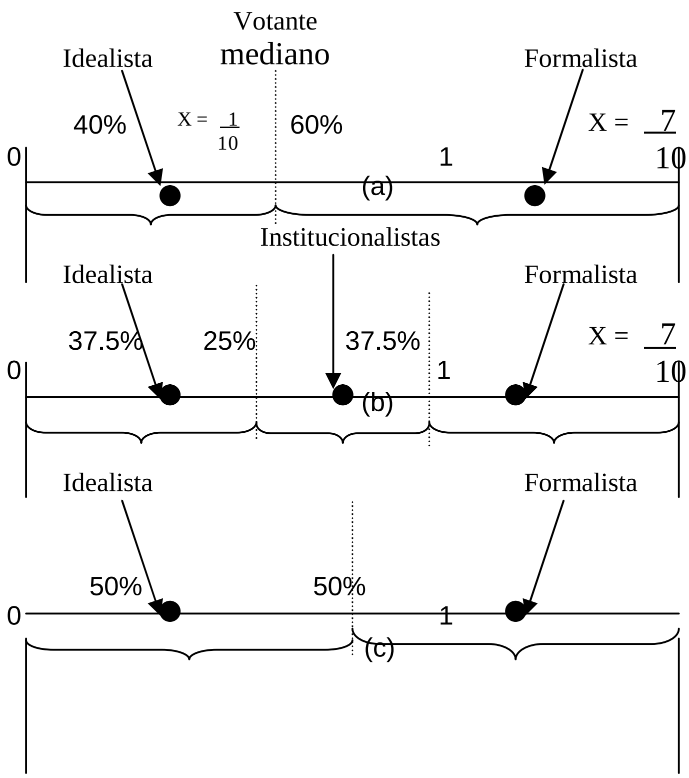
La Teoría de Juegos no ha tenido el mismo impacto en la ciencia política que en economía. Tal vez esto se deba a que la gente conduce menos racionalmente cuando lo que está en juego son ideas que cuando lo que está en juego es su dinero. Sin embargo, se ha convertido en un instrumento importante para clarificar la lógica subyacente de un cierto número de problemas más paradigmáticos.

Un ejemplo de Teoría de Juegos en la Ciencia Política es el siguiente:

La elección de programa: Hay dos partidos, los Formalistas y los Idealistas. Ninguno de los dos se preocupa en absoluto por cuestiones de principio. Sólo se preocupan por el poder y, por tanto, eligen el programa con el programa con el único objetivo de maximizar el voto en las próximas elecciones. Los votantes, por otra parte, sólo se preocupan por cuestiones de principio y, por ende carecen por completo de fidelidad a los partidos. Para simplificar, las opiniones que un votante puede tener se identifican con los números reales en el intervalo (0. 1), en otras palabras, el conjunto de valores de x que satisfacen 0 menor igual a x menor igual a 1. Podemos imaginarnos que este intervalo representa el espectro político de izquierda a derecha. Así, alguien con la opinión x = 0, se cree que la sociedad debería estar organizada como un hormiguero, mientras que alguien en la opinión x = 1 cree que debería estar organizada como una piscina llena de tiburones.

Cada partido centra su programa en algún punto del espectro político y no puede cambiar su posición posteriormente. Los votantes votan por el partido que se encuentra más cerca de su posición. Dado que se supone que los votantes se encuentran distribuidos uniformemente sobre el espectro político, es decir, que una fracción *l* de la población sostiene opiniones que se encuentran en cualquier intervalo de longitud *l*, es fácil ver cuántos votos conseguirá cada partido una vez que han elegido programa. El secreto está en buscar el votante mediano entre aquellos cuyas opiniones se encuentran entre los programas de ambos partidos. El votante mediano se encuentra a medio partido entre las posiciones políticas de los dos partidos. Luego los que se encuentran a la derecha del mediano votante votarán por un partido, y los que se encuentran a la izquierda lo harán por el otro.

La siguiente Figura nos muestra de forma explícita la explicación del ejemplo anterior.



Supongamos que los partidos bajan al ruedo político uno a uno. Los Idealistas escogen en primer lugar, y luego lo hacen los Formalistas. ¿Dónde debería colocarse cada uno? Problemas como éste puede ser resueltos por inducción hacia atrás. Para cada programa posible x, los Idealistas se preguntan qué ocurriría si se colocarán en x. Si x es menor a ½, los Formalistas responderían colocándose inmediatamente a la derecha de x. Entonces los Idealistas recogerían una fracción x de los votantes y los Formalistas recogerían 1-x. Por tanto, los Idealistas ganarían menos de la mitad del voto. Lo mismo ocurre si los Idealistas se sitúan en x menor a ½, excepto que ahora los Formalistas responderán colocándose inmediatamente a su izquierda. Por tanto, lo mejor para los Idealistas es colocarse en el centro del espectro político. Los Formalistas también se colocarán en x = ½, y el voto se dividirá mitad y mitad.

Este modelo puede tener sentido en la escena política americana. Ciertamente es difícil para muchos europeos encontrar diferencias significativas entre Demócratas y Republicanos. El modelo, sin embargo, tiene poco parecido con la escena política europea. ¿Deberían los americanos deducir, por tanto, que los partidos políticos europeos de verdad se toman en serio los principios que hacen suyos? Una conclusión así seria prematura porque es dudoso que la situación europea pueda ser razonablemente analizada con un modelo de dos partidos, y esto es cierto incluso para un país como Gran Bretaña en el que sólo dos de los partidos consigue un número importante de votos en la mayoría de elecciones. Para explorar esta cuestión veamos como cambiarían las cosas si tuviéramos que tomar en consideración un tercer partido.

En este modelo el partido Institucionistas escoge programa después de los Idealistas y Formalistas. Esto cambia mucho las cosas. Los Idealistas y los Formalistas ciertamente no se colocarán ahora en el centro del espectro político. Si lo hicieran los Institucionistas se podrían colocar inmediatamente a su derecha o a su izquierda. Entonces recogerían la mitad del voto dejando que los primeros partidos se dividan la otra mitad. Un razonamiento por inducción hacia atrás, algunas sutilezas surgen debido al hecho que disponemos de un número infinito de opiniones políticas, lo cual hace ver que los Idealistas y los Formalistas se colocarán en x = ¼ y x = ¾, dejando que los Institucionalistas adopten la posición centrista x = ½, como se muestra en la Figura anterior parte (b). Los primeros partidos recibirán entonces 3/8 de los votos cada uno, y los Institucionalistas sólo recogerán ¼.

Pero ¿Por qué querrían los Institucionalistas entrar en la arena política está condenados al papel de Cenicienta, con los primeros partidos en el papel de Hermanas Feas?. Modifiquemos, por tanto, el modelo de manera que los instuticionistas consideren que vale la pena formar un partido sólo si pueden prever que recibirán más del 26% de los votos. En este caso los Idealistas se moverán un poco hacia el centro, aunque no lo bastante como para que los Institucionalistas puedan entrar flanqueándolos por la izquierda. Por tanto, sólo se moverán desde $x = 0,25$ a $x = 0,26$. Análogamente, los Formalistas se moverán desde $x = 0.75$ a $x = 0.74$. El resultado será una elección con dos partidos como lo muestra la parte (c) de la Figura anterior. En esta elección los Idealistas y los Formalistas se dividen el voto a partes iguales y los Institucionalistas se quedan fuera.

Un comentarista político ignorante de la amenaza supone la entrada de los Institucionalistas podría fácilmente malinterpretar las razones por las que los Idealistas y los Formalistas han elegido sus programas. El comentarista podría incluso llegar a pensar que cada partido ni siquiera intenta hacerse con el centro por cuestiones de principio. Pero es sólo tras un análisis estratégico que la conducta de los dos partidos puede ser evaluada correctamente. Obsérvese, en particular, que su conducta ha sido determinada por algo que de hecho no llegó a ocurrir. Como Sherlock Holmes explicaba, a menudo lo importante es que el perro no ladró aquella noche.

En la biologia

Es imposible igualar el entusiasmo con que los biólogos evolucionistas que usan la teoría de juegos explican de conducta animal. No sé si escogen historias poco delicadas deliberadamente, para dar un poco de sabor a sus relatos con implicaciones sexuales, o si éstos son realmente los mejores ejemplos para ilustrar de qué manera la teoría de juegos es relevante. En cualquier caso, lo que los biólogos dicen sobre el pez sol es esto.

Hay dos clases de machos en esta especie. El primero es un individuo regularmente hogareño que necesita siete años para alcanzar la madurez. Una vez alcanzada, construye un nido que atrae a las hembras que ponen que ponen huevos. Cuando los huevos han sido puestos, no sólo los fertiliza, sino que defiende la familia resultante lo mejor que puede mientras, la hembra continua su vida independientemente. La otra clase de macho es un golfo. Por lo que dicen los biólogos, es poco más que un órgano sexual autopropulsado. Este posee ventaja sobre los machos normales, que consiste en alcanzar la madurez en sólo dos años. Sin embargo, es incapaz de responsabilizarse por su familia. En lugar de ello, espera escondido hasta que una hembra ha puesto sus huevos respondiendo a las señales de un macho normal tenga la oportunidad de hacerlo. Si el golfo tiene éxito, el macho normal defiende una familia que no está relacionada con él en absoluto y que lleva por el contrario los genes del golfo.

La teoría de juegos sirve para explicar por que las dos clases de machos pueden coexistir en proporciones fijas.

Para que una historia de teoría de juegos se aguante en este contexto, necesitamos una explicación de cómo los genes se distribuyeron exactamente en la forma necesaria para asegurar a cada pez optimizaría, dada la mezcla actual en la población de hogareños golfos. No basta con decir que la Naturaleza, “con las garras y las fauces llenas de sangre”, actuará de forma que sólo quienes se adaptan sobreviven. Esta respuesta rehuye el problema de cómo y por qué resulta que a veces adaptarse implica actuar racionalmente. Esta parece ser una de esas grandes cuestiones que no tienen respuestas fáciles.

En la filosofía.

Los especialistas en Teoría de Juegos creen que pueden demostrar formalmente por qué incluso el individuo más egoísta puede descubrir que con frecuencia, cooperar con sus vecinos en una relación a largo plazo redundará en su propio interés ilustrado. Con este fin estudian los equilibrios de juegos con repetición –juegos que los mismos jugadores juegan una y otra vez-. Pocas cosas han descubierto en esta área hasta el presente que hubieran sorprendido a David Hume, quien hace ya unos doscientos años articuló los mecanismos esenciales. Estas ideas, sin embargo, están ahora firmemente basadas en modelos formales. Para avanzar más, habrá que esperar progresos en el problema de la selección de equilibrios en juegos con múltiples equilibrios. Cuando estos progresos se den, sospecho que la filosofía social sin teoría de juegos será algo inconcebible – y que David Hume será universalmente considerado como su verdadero fundador.

Propiedades para el conocimiento común en juego

El Filósofo Hobbes dijo que un hombre se caracteriza por su fortaleza física, sus pasiones, su experiencia y su razón.

Fortaleza Física: esta determina lo que alguien puede o no puede hacer. Un atleta puede planear correr una milla en cuatro minutos, pero sería imposible para la mayoría ejecutar este plan. La teoría de juegos incorpora estas consideraciones en las reglas del juego. Esta determinan lo que es factible para un jugador. Más exactamente, un jugador queda limitado a escoger en el conjunto de sus estrategias en el juego.

Pasión y Experiencia: estas corresponden a las preferencias y creencias de un jugador. En la mayoría de los casos, ambas deben ser conocimiento común para que sea posible realizar un análisis en términos de la teoría de juegos.

Razón: en problemas de decisión unipersonales, los economistas simplemente suponen que los jugadores maximizan sus pagos esperados dadas sus creencias. En un juego las cosas son más complicadas, porque la idea de equilibrio da por supuesto que los jugadores saben algo acerca de cómo razona todo el mundo.

Conocimiento común de las reglas

Como en muchos resultados de la teoría de juegos, no es inmediatamente evidente que esta conclusión dependa de que el valor de n debe ser conocimiento común. Sin embargo, si el valor n no es de conocimiento común existe equilibrio de Nash.

La noción de equilibrio es fundamental para la Teoría de Juegos. Pero por qué anticipamos que los jugadores usarán estrategias de equilibrio.

Dos tipos de respuestas hay, en primer lugar del tipo educativo, estos suponen que los jugadores tengan al equilibrio como el resultado de razonar cuidadosamente. No se acepte ante frases que empiezan, “si yo pienso que él piensa que yo pienso ...”, por lo contrario, los jugadores proseguirían con razonamiento así hasta el final, por difícil que fuera.

Sin embargo, la respuesta educativa no es la única posible. También hay respuestas evolutivas. Según éstas, el equilibrio se consigue, no porque los jugadores piensan todo de antemano, sino como consecuencia de que los jugadores miopes ajustan su conducta por tanteo cuando juegan y se repiten durante largos períodos de tiempo.

Racionalizabilidad: es la forma que se comporta alguien bayesiano-racional cuando ha de tomar una decisión en situaciones donde el resultado de la decisión a tomar depende de sucesos inciertos para quien ha de tomarla. El o ella actúa como si dispusiera de una medida de probabilidad subjetivas a los sucesos de los que no está seguro.

En un juego finito de dos jugadores, ningún jugador sabe con seguridad que estrategia pura, incluso si el oponente mezcla, el resultado final será que se juega alguna estrategia pura, la cual terminará por utilizar el oponente. Un jugador bayesiano-racional, por tanto, asigna una probabilidad subjetiva a cada una de las alternativas posibles. Entonces el jugador escoge una estrategia que maximiza su pago esperado con respecto a estas probabilidades subjetivas. Por tanto, el o ella se comportan como si estuviera escogiendo una respuesta óptima a una de las estrategias mixtas del oponente, si la estrategia mixta para la que se elige una respuesta óptima.

La Teoría de Juegos da por supuesto que las creencias de un jugador sobre lo que un oponente hará depende de lo que el jugador sabe acerca del oponente. Sin embargo, no está ni mucho menos claro lo que debemos suponer acerca de lo que los jugadores saben de su oponente. La idea de racionalizabilidad se construye sobre la hipótesis de que por l menos debería ser conocimiento común que ambos jugadores son bayesianos-racionales.

Equilibrio Correlacionado: Aumann sugiere que deberíamos asumir que es “conocimiento común” que los jugadores comparten el mismo universo del discurso. Sugiere, además que los estados de este universo Ω se deben suponer completos. Estos significa que si usted alguna vez llega a saber que ha ocurrido con seguridad, entonces usted absolutamente todo lo que concebiblemente pudiera ser relevante para usted a la hora de tomar una decisión. La descripción de un estado, por tanto, debe especificar cada detalle del “mundo posible” que representa. Esto incluye no sólo como se comportan los jugadores, sino también cuáles son sus estados mentales. Ya que los jugadores son bayesianos-racionales, sus estados mentales se pueden resumir en dos cosas:

Lo que saben y Lo que creen.

Bayesianismo: el Bayesianismo no requiere habilidades mentales excepcionales por parte de los jugadores. Estos revisan mecánicamente sus probabilidades subjetivas a medida que disponen de nueva información, y entonces deciden qué hacer por el método igualmente mecánico de maximizar su pago esperado dadas las creencias actuales.

Los bayesianos ingenuos piensan que no es necesario preguntarse de dónde salen las probabilidades a priori de los jugadores, o cómo saben estos cuáles son sus particiones de posibilidades, en particular, creen que la racionalidad bayesiana dota a quienes la hacen suya con la capacidad de coger del aire sus creencias subjetivas. Esta actitud lleva a bayesianos que son muy ingenuos a argumentar que la teoría de juegos es una pérdida de tiempo. Es indudablemente cierto que si no necesitáramos preocuparnos de por qué la gente cree en lo que cree, entonces las consideraciones sobre equilibrios se harían irrelevantes.

Comentarios generales.

Durante las dos décadas que siguieron a la segunda guerra mundial, uno de los progresos más interesantes de la teoría económica fue la teoría de los juegos y el comportamiento económico, publicada en un libro de este titulo bajo la autoridad conjunta de Jhon Von Neumann y Oskar Morgenstern. Actualmente, el consenso parece ser que la teoría de los juegos es más relevante al estudio de problemas comerciales específicos que a la teoría económica general, por que representa un enfoque único al análisis de las decisiones comerciales en condiciones de intereses competitivos y conflictivos.

El principal objetivo de la teoría de los juegos es determinar los papeles de conducta racional en situaciones de “juego” en las que los resultados son condicionales a las acciones de jugadores interdependientes. Un juego es cualquier situación en la cual compiten dos o más jugadores. El ajedrez y el póker son buenos ejemplos, pero también lo son el duopolio y el oligopolio en los negocios. La extensión con que un jugador alcanza sus objetivos en un juego depende del azar, de sus recursos físicos y mentales y de los de sus rivales, de las reglas del juego y de los cursos de acciones que siguen los jugadores individuales, es decir, sus estrategias. Una estrategia es una especificación de la acción que ha de emprender un jugador en cada contingencia posible del juego.

Se supone que, en un juego, todos los jugadores son racionales, inteligentes y están bien informados. En particular, se supone que cada jugador conoce todo el conjunto de estrategias existentes, no solo para él, sino también para sus rivales, y que cada jugador conoce los resultados de todas las combinaciones posibles de las estrategias.

Igualmente, en una gran variedad de juegos, el resultado es una variable aleatoria cuya distribución de probabilidades debe ser establecida para que pueda ser posible una solución para el juego. A este respecto, debe observarse que las decisiones de los jugadores interdependientes no se toman en un vacío y que los pagos resultantes de estas decisiones dependen de las acciones emprendidas por todos los jugadores. Esta interdependencia implica que puede ser inapropiado suponer que los pagos están siendo generados por un proceso probabilista invariante que no es afectado por el curso de acción que uno escoja. En otras palabras, la acción que emprende un jugador puede dictar los actos de otros jugadores o influir en la probabilidad de que se comporten en una forma particular. Esta potencialidad de posibles efectos en los resultados es la que distingue la toma de decisiones en conflictos y la toma de decisiones en un medio incierto.

La clase más sencilla de modelo de juego rigurosamente adversario, en el que los resultados posibles son calificados en orden opuesto por los jugadores. Entre esta clase, él más común es el juego de suma constante, en el que la suma de las ganancias de los jugadores es igual, cualesquiera que sea su distribución entre ellos. Un caso especial, y el único que consideraremos, de juegos de suma constante se llama juego de suma cero de dos personas.

Juegos de suma cero de dos personas.

Dos compañías de autobuses, A y B, explotan la misma ruta entre dos ciudades y están enzarzadas en una lucha por una mayor parte del mercado. Puesto que la parte total del mercado es un 100 por 100 fijo, cada punto porcentual ganado por uno debe ser perdido por el otro. Se dice que tal situación es un juego de suma cero de dos personas por las razones obvias de que el juego es jugado por dos jugadores diametralmente opuesto y que la suma de las ganancias y perdidas es siempre cero.

Si se supone que la compañía A y la compañía B esta considerando las tres mismas estrategias para ganar una mayor parte relativa del mercado como sigue:

1. a_1 o b_1: Sirve refrescos durante el viaje.
2. a_2 o b_2: Introduce autobuses con aire acondicionado.
3. a_3 o b_3: Anuncia diariamente en estaciones de televisión en las dos ciudades.

Por comodidad, se supone que ante de comenzar el juego ambas compañías no están asiendo ningún esfuerzo especial y comparte por igual el mercado –50 por 100 cada una. Además, si se supone también que cada compañía no puede emplear mas de uno de estas actitudes o estrategias al mismo tiempo y que las tres estrategias tienen idénticos costos.

Por estos supuestos, hay un total de 3 x 3 = 9 combinaciones posibles de movimientos, y cada una es capas de afectar a la parte del mercado en una forma especifica. Por ejemplo, si A y B sirvan refrescos durante el viaje, se dice que A perdería 10 por 100 de la parte del mercado a favor de B, lo que puede indicar que los refrescos de B son mas para los gustos de los clientes, igualmente, si A anuncio y B, por ejemplo, sirve refrescos, se supone que A ganaría 20 por 100 del mercado en perjuicio de B; evidentemente, la publicidad en televisión parece ser más eficaz que servir refrescos.
Ahora, por cada una de las 9 combinaciones puede determinar ganancias o perdidas del mercado para A como se indica en la siguiente matriz de pagos.

	b_1	b_2	b_3
a_1	-10	-11	-1
a_2	9	-8	-6
a_3	20	-10	-13

Estrategias maximin y minimax

El enfoque conservador a la lección de la mejor estrategia es suponer lo peor y actuar de conformidad con ello. Así según este enfoque y con referencia en la matriz de pagos. Si A decide sobre la estrategia a_1, supondría que B escogerá la estrategia b_2, reduciendo con ello el pago a_1 para A aun valor mínimo o de seguridad de –11. Análogamente, los valores de seguridad para a_2 y a_3 son –8 y –3, respectivamente.

Obsérvese que los valores de seguridad para los distintos movimientos que puede hacer A son los mínimos de filas. Dados estos valores mínimos, hará bien en emplear aquella estrategia que da el máximo de estos valores de seguridad mínimos. En el ejemplo A debe adoptar a_2 y aspira a un pago de –8 a B. Esta regla de decisión, que conduce a la elección del mayor de los valores mínimos en que puede resultan cada estrategia, se llama estrategia maximin.

La compañía B, según esta actitud conservadora, supondría que por cada una de sus acciones, la respuesta de A será tal que la ganancia de A en parte del mercado es la máxima posible. Por ejemplo, si B emplea la estrategia b_1, supondría que A adoptara la estrategia $a_{3,}$ la cual dará la peor perdida posible para B. Análogamente, los peores pagos para b_2 y b_3 son –8 y –1, los máximos valores en las columnas 2 y 3, respectivamente. Así, vemos que el máximo en cada columna es el peor pago por un movimiento correspondiente hecho por B. El mejor de estos peores pagos es claramente el valor mínimo de estas cifras mas altas. Esta cifra –8 en la columna 2, correspondiente a la estrategia b_2 y el movimiento contrario $a_{2.}$ Por tanto, la emisión optima, llamada estrategia minimax de B, es $b_{2.}$

Se puede observar según la regla maximin de A y la regla minimax de B el pago es –8. Esta cantidad se llama valor del juego es positivo, se dice que el juego es a favor de A: si negativo, favorece a B; y si cero, se dice que el juego es equitativo. La solución de nuestro problema da un pago de –8, que indica que el juego favorece a B por que B gana 8 por 100 del mercado a expensas de A.

Punto de silla de montar

Se ha alcanzado ahora un punto en el que si A adopta estrategia maximin a_2 su pago es exactamente igual al que B espera que obtenga A sí B emplea la estrategia minimax b_2. Un lector puede poner en duda el acierto de tales reglas de decisión. Por ejemplo, ¿ por qué A no se esfuerza por ganar 20 por 100 de la parte del mercado empleando a_3, en vez de perder 8 por 100 a favor de B empleando a_2?. La respuesta es que, si A lo hiciera así B podría tomar b_2 por lo que A podría perder 10 a 13 por 100 del mercado a favor de B, en vez de perder solo 8 por 100. Similarmente, puede arguirse que B debe adoptar b_2 por lo que A podría perder 10 o 13 por 100 del mercado a favor de B, en pensas de A. Sin embargo, este pago solo es posible sí A hace el movimiento de a_3.

En otro caso, la ganancia de B seria menor de 8. Argumentos similares usados en la "cautela" dictan que a_2 y b_2 son las mejores estrategias para A en B respectivamente, por que esta combinación ofrece a A y B una medida de seguridad. Esto es así por que el criterio de decisión maximin de A da a A la "máxima" parte del mercado que puede impedirse a B que reduzca más, y que la regla minimax de B ofrece B la "mínima" parte del mercado que puede impedirse a A que aumente más.

En otras palabras las estrategias maximin y minimax conducen a los dos jugadores del juego a situaciones en las que ningún jugador tiene razón o incentivo alguno para cambiar su posición. A no desea cambiar por que cuando B juega b_2, el se encuentra mejor jugando a_2 que a_1 o a_3. B no desea cambiar por que cuando A juega a_2 se encuentra mejor jugando b_2 que b_1 o b_3. Evidentemente, se ha alcanzado una situación de equilibrio.

El pago en tal punto de equilibrio es la solución minimax y se conoce como punto de silla de montar de la matriz de pagos en el sentido de que es el mínimo de sus datos de columna. Considerémosla solución del par de decisiones en nuestro ejemplo a_2 y $b_{2.}$ Cuando A adopte a_2 el pago se reduce de 9 a –8 y luego aumenta de –8 a -6. Cuando B escoge b_2, su pago disminuye de –11 a –8 y luego aumenta de –8 a –10. El numero –8 en medio forma un valle cuando es visto desde la segunda fila forma una cordillera cuando es visto desde la segunda columna. La solución minimax semeja exactamente una silla de montar: de ahí el nombre de "punto en silla de montar", que es a la vez un mínimo, como un valle máximo, como una cordillera.

Es posible que pueda haber mas de un punto en silla de montar en la matriz de pagos de un juego. Si es así, los pagos correspondientes a los puntos en silla de montar es empleado para determinar movimientos óptimos para los dos jugadores se puede considerar el siguiente juego, por ejemplo:

Estrategia de B

	b_1	b_2	B_3	Mínimo de fila
a_1	2	-3	7	-3
a_2	5	5	6	5º
a_3	1	4	-4	-4
Máximo de columna	5º	5º	7	

Aquí se tienen dos puntos en silla de montar; uno corresponde a a_2 y $b_{1,}$ y el otro corresponde a a_2 y $b_{2.}$ Según el criterio minimax, el jugador A haría el movimiento $a_{2.}$ Al hacerlo, no importa si el jugador B emplea la estrategia b_1 o $b_{2,}$ por que en cada caso B debe pagar a A una cantidad de, por ejemplo, 5 útiles.

También, puesto que el valor del juego en este ejemplo es positivo, se dice que el juego favorece A.

Se dice que un juego de suma cero de dos personas es rigurosamente determinado si existe un punto en silla de montar, por que ese punto en es una solución aceptada al juego de encontrar la mejor estrategia para cada uno de los dos jugadores.

Estrategia dominante.

Se dice que un jugador posee una estrategia dominante si una estrategia particular es preferida a cualquier otra estrategia a disposición de el. Es posible que cada uno de los dos jugadores tenga estrategia dominante.

Estrategia mixta.

Es una combinación de dos estrategias escogidas a azar, una cada vez, según determinadas probabilidades, en contraste con una estrategia pura que no contiene tales elementos de azar.

Modelo de formación de colas.

Modelos de formación de colas basicos

El esfuerzo de A.K. Erlang por analizar la congestión de tráfico telefónico, con objeto de satisfacer la demanda de servicios surgida al azar del sistema telefónico automático de Copenhague en 1909,produjo una nueva teoría que ha llegado a conocerse como teoría de formación de cola o línea de espera. Esta teoría es uno de los instrumentos más valiosos de la ciencia de administración de empresas, por que muchos problemas de la gerencia pueden caracterizarse como problemas de "llegada y partida"

En los problemas de formación de cola, a menudo se habla de clientes, tales como personas que esperan la desocupación de líneas telefónicas, la espera de máquinas para ser reparadas y los aviones que esperan aterrizar y estaciones de servicios, tales como mesas en un restaurante, operarios en un taller de reparación, pistas en un aeropuerto, etc. Los problemas de formación de colas a menudo contienen una velocidad variable de llegada de clientes que requieren cierto tipo de servicio, y una velocidad variable de prestación del servicio en la estación de servicio.

Cuando se habla de líneas de espera, se refieren a las creadas por clientes o por las estaciones de servicio. Los clientes pueden esperar en cola simplemente por que los medios existentes son inadecuados para satisfacer la demanda de servicio; en este caso, la cola tiende a ser explosiva, es decir, a ser cada vez mas larga a medida que transcurre el tiempo. Las estaciones de servicio pueden estar esperando por que los medios existentes son excesivos en relación con la demanda de los clientes; en este caso, las estaciones de servicio podrían permanecer ociosas la mayor parte del tiempo. Los clientes puede que esperen temporalmente, aunque las instalaciones de servicio sean adecuadas, por que los clientes llegados anteriormente están siendo atendidos. Las estaciones de servicio pueden encontrar temporal cuando, aunque las instalaciones sean adecuadas a largo plazo, haya una escasez ocasional de demanda debido a un hacho temporal. Estos dos últimos casos tipifican una situación equilibrada que tiende constantemente hacia el equilibrio, o una situación estable.

En la teoría de la formación de colas generalmente se llama sistema a un grupo de unidades físicas, integradas de tal modo que pueden operar al unísono con una serie de operaciones organizadas. La teoría de la formación de colas busca una solución al problema de la espera prediciendo primero el comportamiento del sistema. Pero una solución al problema de la espera consiste en no solo en minimizar el tiempo que los clientes pasan en el sistema, sino también en minimizar los costos totales de aquellos que solicitan el servicio y de quienes lo prestan.

El modelo de cola de una sola estacion

Analíticamente, este modelo se construye con el siguiente conjunto de supuestos:

1. LLEGADA DE CLIENTE O INSUMO: Se supone que las llegadas se producen al azar y que la probabilidad de una llegada durante cualquier intervalo de tiempo de longitud fija permanece constante, independientemente de lo que ha sucedido anteriormente y de la longitud de la cola. En otras palabras se supone que las llegadas obedecen la ley de probabilidades de Poisson con una frecuencia media de llegadas, o promedio de llegadas, λ, por unidad de tiempo. Aquí,λ es igual para cualquier unidad de tiempo. Si se define de nuevo la unidad de tiempo, como en un cambio de un segundo a un minuto, por supuesto,λ cambia su valor numérico apropiadamente. Su reciproca, $1/\lambda$ es el promedio de unidades de tiempo entre dos llegadas sucesivas. Por esta hipótesis, la probabilidad de exactamente n en una unidad de tiempo se da por: $Pn = \lambda^n e^{-\lambda} / n!$

2. DISCIPLINA DE COLA O REGLA DE PRIORIDAD: Cuando un cliente llega al sistema, generalmente ha de esperar antes de que se le preste servicio. Su partida es influida, entre otras cosas, por la disciplina de cola, la regla establecida por la cual los clientes que esperan en la cola son servidos. Si se supone vigente la regla acreditada por el tiempo de el primero que llega, el primero en ser servido. Nuestra regla también abarca el requisito de que ningún cliente del sistema partirá sin recibir servicio.

3. PRODUCCION: Este criterio se refiere al numero de estaciones de servicio y la distribución del tiempo de servicio.

4. FRECUENCIA DE SERVICIO: Se supone también que él número de clientes servidos por la única estación sigue la Ley de Poisson con el promedio de frecuencias de servicio representado como μ.Por tanto: $P_n = \mu^n e^{-\mu} / n!$, es la probabilidad de n servicios por una unidad de tiempo. Se observa que $1/\mu$ es el tiempo medio de servicios de la variable aleatoria exponencial “tiempo de servicio.

   Cuando se satisfacen estos supuestos, se tiene un modelo matemático para problemas de formación de colas de una sola estación, el primero en llegar, el primero en ser servido.

Nota sobre regla de prioridad.

Esta regla es muy apropiada si la “ injusticia” será resentida, o si los clientes son de igual importancia y requieren en promedio la misma cantidad de servicio. Pero en muchas situaciones puede haber fuertes razones para la practica de reglas de prioridad. Por esta regla de prioridades tenemos, en realidad, dos colas: una para los clientes rápidos y otra para los lentos.

La reducción relativa del tiempo de espera medio por nuestra nueva disciplina de cola depende de tres factores:

1. El parámetro de utilización.

2. La razón del tiempo de servicio medio de los clientes rápidos a la de los clientes lentos. Sea s_1 el tiempo medio de servicio para clientes rápidos y s_2 para clientes lentos; entonces, podemos designar esta razón por R= s_1/s_2 que obviamente varia de 0 a1.

3. La fracción F del numero total de clientes rápidos, f, al número total de clientes, n; es decir, F= f /n. Nuevamente F varía de 0 a 1.

Modelo de cola de una estación múltiple.

Existe un modelo de cola de estación de servicio múltiple cuando los clientes de una sola cola pueden ser servidos por mas de una estación de servicio igualmente bien. Aquí, todas las k, k >= 2, estaciones de servicio tienen idéntica capacidad de servicio, y la cola es única en el sentido de que una línea de espera alimenta a todas las estaciones como en los sistemas de " tome un numero" de las tiendas al por menor.

Simulación Monte Carlo.

La simulación Monte Carlo es la amiga de los matemáticos no refinados. Para comprenderla y usarla, se necesita poca capacitación matemática. Puede ser adaptada fácilmente a cualquier situación, con tal que las alternativas puedan ser especificadas cuantitativamente y que los datos requeridos puedan ser calculados con aceptable confianza.

Monte Carlo es un proceso de resolver un problema simulando datos originales con generadores de números al azar. Su aplicación sólo requiere dos cosas básicas:

1. Se debe tener un modelo que represente una imagen de realidad tal como lo vemos. El modelo en este caso no es mas que la distribución por probabilidades de la variable que se considera. El mérito importante de la simulación es que puede ser aplicada aunque las distribuciones de probabilidades no puedan ser expresadas explícitamente en cualquiera de las formas teóricas, tales como aquellas que han sido presentadas en este texto. Todo lo que se requiere es una tabla o un gráfico de una distribución de una variable directa o, indirectamente, por el uso de registros pasados.

2. Es un mecanismo para simular el modelo. El mecanismo pudo ser cualquier generador de números al azar, tal como un par de dados, un puntero giratorio, una rueda de ruleta, una tabla de dígitos al azar o una computadora de alta velocidad apropiadamente instruida.

3. El método Monte Carlo es para simular, mediante procedimientos al azar, situaciones del mundo real de naturaleza probabílistica.

Tamaño optimo de un equipo de servicio.

El tamaño optimo de un equipo de servicio se considera un segundo ejemplo de simulación Monte Carlo. Una nueva empresa industrial que ha estado en el negocio por espacio de 3000 horas de operación, tiene en uso un gran numero de máquinas idénticas. Tiene una sola estación de servicio con un equipo de operarios, La reparación de cualquier maquina es un esfuerzo conjunto del equipo. Cuando la estación de servicio es ocupada por una maquina y ocurren otras descomposturas, se crea una línea de espera. Se han registrado cuidadosamente durante las 3000 horas pasadas datos sobre él numero de computadoras por hora y él número de reparaciones que requieren varios periodos de tiempo para prestarles servicio. Las probabilidades de estos dos conjuntos de hechos basados en datos del pasado se indican en los cuadros 1 y 2,respectivamente.

Descomposturas por horas	Probabilidad	Probabilidad Acumulativa	Intervalo de números al azar de tres dígitos
0	0.900	0.900	000-899
1	0.090	0.990	900-989
2	0.008	0.998	990-997
3	0.002	1.000	998-999

cuadro 1,datos sobre descomposturas

HORAS DE REPARACION	**PROBABILIDAD**	**PROBABILIDAD ACUMULATIVA**	**INTERVALO DE NUMEROS AL AZAR DE TRES DIGITOS**
1	0.251	0.251	000-250
2	0.375	0.626	251-625
3	0.213	0.839	626-838
4	0.124	0.963	839-962
5	0.037	1.000	963-999

cuadro 2, datos sobre tiempo requerido para reparación

Se considera que los dos conjuntos de hechos son estadísticamente independientes. Una prueba Chi Cuadrado sobre las frecuencias absolutas conjuntas mostraría si la independencia estadística es razonable.

Lo primero que debemos hacer es asignar intervalos de números al azar a descomposturas de maquinas por hora y a números de horas requeridos para reparar las máquinas. Estos intervalos se dan en las ultimas columnas de los cuadros 1 y 2. Obsérvese que en ambos casos los intervalos de números al azar asignados *n* proporcionales a las probabilidades de ocurrencia de los hechos respectivos.

Conclusiones

- La Teoría de Juegos consiste en razonamientos circulares, los cuales no pueden ser evitados al considerar cuestiones estratégicas. La intuición no educada no es muy fiable en situaciones estratégicas, razón por la que se debe entrenar.

- La Teoría de Juegos fue creada por Von Neumann y Morgenstern en 1944. Otros habían anticipado algunas ideas. Los economistas Cournot y Edgeworth fueron particularmente innovadores en el siglo XIX. Otras contribuciones posteriores mencionadas fueron hechas por los matemáticos Borel y Zermelo.

- A principio de los años cincuenta, en una serie de artículos muy famosa el matemático John Nash rompió dos de las barreras que Von Neumann y Morgenstern se habían auto-impuesto.

- La Teoría de Juegos actualmente tiene muchas aplicaciones, entre las disciplinas tenemos: la Economía, la Ciencia Política, la Biología y la Filosofía.

- Según el Filósofo Hobbes un hombre se caracteriza por su fortaleza física, sus pasiones, su experiencia y su razón.

- Hay dos tipos de respuesta, la del tipo educativo, los jugadores suponen que tienen al equilibrio como el resultado de razonar cuidadosamente y un segundo tipo de respuestas, las evolutivas, según éstas, el equilibrio se consigue, no porque los jugadores piensan todo de antemano, sino como consecuencia de que los jugadores miopes ajustan su conducta por tanteo cuando juegan y se repiten durante largos períodos de tiempo.

- Racionabilidad: es la forma que se comporta alguien bayesiano-racional cuando ha de tomar una decisión en situaciones donde el resultado de la decisión a tomar depende de sucesos inciertos para quien ha de tomarla.

- Los jugadores son bayesianos-racionales, sus estados mentales se pueden resumir en dos cosas: lo que saben y lo que creen.

- Las estrategias maximin y minimax conducen a los dos jugadores del juego a situaciones en las que ningún jugador tiene razón o incentivo alguno para cambiar su posición.

- Se dice que un jugador posee una estrategia dominante si una estrategia particular es preferida a cualquier otra estrategia a disposición de él.

Estrategia mixta es una combinación de dos estrategias escogidas a azar, una cada vez, según determinadas probabilidades, en contraste con una estrategia pura que no contiene tales elementos de azar.

Bibliografía.

http://www.itson.mx/dii/elagarda/apagina2001/PM/uno.html
http://www.itlp.edu.mx/publica/tutoriales/investoper1/
http://www.itson.mx/dii/elagarda/apagina2001/PM/pl.html
http://www.itson.mx/dii/elagarda/apagina2001/PM/metodos.html
http://gemini.udistrital.edu.co/comunidad/profesores/jgmedina/tema1.html
http://www.investigacion-operaciones.com/inventarios_EOQ.htm
http://mx.geocities.com/troyescvm/MD1.htm
http://www.investigacion-operaciones.com/Teoria_colas_web.htm
http://www.monografias.com/trabajos5/teorideju/teorideju.shtml#loque
http://personales.ya.com/casanchi/mat/tjuegos1.htm
http://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_juegos

Introducción a la Investigación de Operaciones.
Hiller y Lieberman.
Ed. Mc Graw-Hill.
México, 1997.

TAHA, Hamdy A. Investigación de Operaciones, Una Introducción. 1989. Ediciones Alfaomega, S.A. México. D.F. México.

MONTAÑO, Agustín. Iniciación al Método del Camino Crítico. 1972. Editorial Trillas, S.A. México. D.F. México.