Indice

1. FUNCIONES..2

1.1. Naturaleza y definición de función matemàtica 3
1.2. Principales tipos de funciones 9
1.3. Aplicaciones de las funciones 22

2. LÍMITES 23

2.1. Lìmite de una funciòn 24
2.2. Propiedades de los lìmites 27
2.3. Límites al infinito 30
2.4. Propiedades de los lìmites al infinito 30
2.5. Aplicaciones de los lìmites 31

3. DERIVADAS 34

3.1. Derivada de una funciòn 38
3.2. Proceso de los cuatro pasos para determinar la derivada ...38
3.3. Uso e irteprtetaciòn de la derivada 39
3.4. Reglas para determinar la derivada de una función 39
3.5. Segunda derivada 50
3.6. Máximos y mínimos 55
3.7. Aplicaciones de la derivada 63

4. CÁLCULO INTEGRAL..71

4.1. Antiderivadas 72
4.2. Integral indefinida 73
4.3. Reglas de integraciòn 73
4.4. Integración por sustituciòn 75
4.5. Integraciòn por partes 76
4.6. Integral definida 77
4.7. Integración por sustituciòn 78
4.8. Integración por partes 79
4.9. Aplicación de la integral 81

5. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER GRADO 87

5.1. Concepto de ecuación diferencial 88
5.2. Soluciones general y particular 88
5.3. Ecuaciones diferenciales separables 89
5.4. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden 89
5.5. Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales 89

1. FUNCIONES

OBJETIVOS

Entender y explicar el concepto de función
Distinguir y emplear la simbología de funciones
Calcular el valor funcional de una función
Identificar la clasificación de las funciones
Aplicar en forma adecuada el álgebra de funciones

C O N T E N I D O :

1.1 Naturaleza y definición de función
1.2 Principales tipos de funciones
1.3 Aplicación de funciones

I. FUNCIONES

1.1. Naturaleza y definición de función matemàtica

El concepto de función es una de las ideas fundamentales en matemáticas. Cualquier estudio en el que se utilicen las matemáticas para dar solución a problemas prácticos o que se requiera el análisis de datos empíricos emplea este concepto matemático. La función es una idea de que una cantidad dependiente o está determinada por otra. Por ejemplo:

El área de un círculo depende de la longitud de su radio, si se conoce la longitud del radio, podemos determinar el área
El costo de producir cualquier artículo depende del número de artículos producidos[1] por mes.

Función

Definición
Una función f es una regla de correspondencia que asocia a cada elemento x del conjunto llamado dominio, con un sólo elemento f(x) de un segundo conjunto (con uno y sólo uno) llamado rango ó contradominio de la función.

Una función consta de tres partes:

Un conjunto A llamado dominio de la función.
Un conjunto B llamado contradominio de la función.
Una regla de correspondencia f que asocia a todo elemento de A, uno y sólo un elemento del conjunto B.

La regla debe tener las siguientes propiedades.

Ningún elemento del dominio puede quedar sin elemento asociado en el contradominio.
Ningún elemento del dominio puede tener más de un elemento asociado en el contradominio. Esto no excluye que varios elementos del dominio tengan al mismo elemento asociado en el contradominio.

[1] Jagdish C. Arya/Robin W. Lardner, Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía,tercera edición,Prentice Hall,México, p.164.

Si tenemos los conjuntos A y B y la regla de correspondencia se cumple con las propiedades señaladas, entonces la terna (A, B, f) es una función cuya notación es:

$f : A \to B$

Se lee f va de A hacia B

otra forma es:

$f(x)$ y se lee $f\ de\ x$

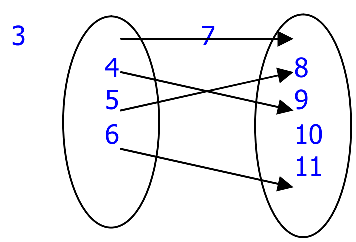
Se emplean por lo regular las letras f, g o h para simbolizar una función.

Si x es un elemento de A, entonces el elemento de B asociado a x por medio de la regla de correspondencia se expresa como f(x) y se le llama la imagen de x bajo f.
La regla de correspondencia de un función puede estar dada por un diagrama, una ecuación, una tabla de valores y una gráfica.

Diagrama.

El diagrama se construye formando dos óvalos y uniendo estos con una flecha que parte del primer óvalo hacia el segundo (dirección de izquierda a derecha). En el primer óvalo en su interior se anotan los valores de entrada de la función (dominio), en el segundo se anotan los valores de salida de la función (contradominio), se une con una flecha el valor de entrada con el valor de salida como se muestra en la figura 1.3.1

Figura 1.3.1 Diagrama de la regla de correspondencia de un función



La imagen de 3 es 7
La imagen de 4 es 9
La imagen de 5 es 8
La imagen de 6 es 11

Ecuación.

En este caso se requiere plantear una ecuación con dos incógnitas como la que se muestra a continuación: $3x^2 - y + 4 = 0$.
Como primer paso se despeja a la variable dependiente (y), $\therefore$ $y = 3x^2 + 4$.
A la expresión anterior la presentamos en forma de función $f(x) = 3x^2 + 4$, en donde la función (f) es el conjunto de todas las parejas ordenadas (x, y) tales que x y y satisfacen a la ecuación $3x^2 - y + 4 = 0$, y se denota como:
$f = \{(x, y) / y = 3x^2 + 4\}$

En el dominio de la función están todos los posibles valores que toma la variable independiente (x) también los valores extremos y en el contradominio de la función se encuentran todos los valores posibles que pueden asignarse por el dominio y regla de transformación a la variable dependiente (y).

Ejemplo:

Sea la función (f) cuya regla es $f(x) = 3x^2 + 4$
El dominio es: {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3},
Los valores extremos son: - 3 y 3
El contradominio es {31, 16, 7, 4, 7, 16, 31} y está determinado por el dominio y la regla de transformación.

Una función que va de los reales a los reales se expresa con la notación:

$$f : R \rightarrow R$$

Los valores extremos en este caso no están determinados (no existen) en el dominio, porque éste contiene a todos los números reales, el contradominio está formado por todos los números reales y la regla de correspondencia está dada por una ecuación.
En los casos en que no se indica o se especifica el dominio de la función, entonces se debe de entender que el dominio incluye a todos los números reales (o también llamado dominio natural).

Ejemplo de funciones:

Si $f(x) = 3x^2 + 2x + 4$

El dominio son todos los reales $f = \{x \in R\}$ y el contradominio también esta formado por todos los números reales.
Para este tipo de funciones polinomiales el dominio siempre será el conjunto de los números R.

Sí $f(x) = \dfrac{4}{x-2}$

Solución:

$$f(x) = \frac{4}{2-2} = \frac{4}{0} = operación\ no\ \det erminada$$

El dominio son todos los reales excepto el 2, ya que la división entre cero no está determinada, $f = \{x \in R / x \neq 2\}$.
El contradominio está formado por todos los números reales positivos excepto el cero, D = {y ∈ R^+/ (0 < x < ∞)}

Para este tipo de funciones racionales el dominio siempre será el conjunto de los números reales excepto los que hacen cero el denominador de la función.

3. Si $f(x) = \sqrt{5x+2}$

Solución:

El subradical se expresa de la siguiente forma: 5x + 2 ≥ 0,
El signo debe ser ≥ , porque no existen raíces cuadradas de números negativos.

Se despeja el valor de x de la inecuación $x \geq -\dfrac{2}{5}$

El dominio de $F = \{x \in R / x \geq -2/5\}$
Para este tipo de función con radical y el índice par, el dominio siempre será formado por todos los números que hagan al subradical igual o mayor a cero.

Casos en el que una expresión no cumple con ser una función:

La expresión $y > x$ no define una función puesto que hay muchos valores de y para cada valor de x.

La expresión $x = y^2$ no define una función puesto que hay dos valores de y para cada valor positivo de x.

$x^2 + y^2 = 9$ no define una función, porque para cada valor positivo de x hay dos de y.

Tabla de valores

Se selecciona primero la expresión que se va analizar, posteriormente se construye una tabla la cual debe de incluir a la variable independiente (x) y la variable dependiente (y) Dentro de esta tabla se anotan los valores que va a tomar la variable independiente (valores de entrada) y se registran todos los valores que toma la variable dependiente (valores de salida).

Ejemplo:
Sea la función $f(x) = x + 2$
Solución:
Utilizando la tabulación, se registran los valores que toma x para encontrar los valores de y (también se registran en la tabla).
Los puntos extremos del dominio son -2 y 4

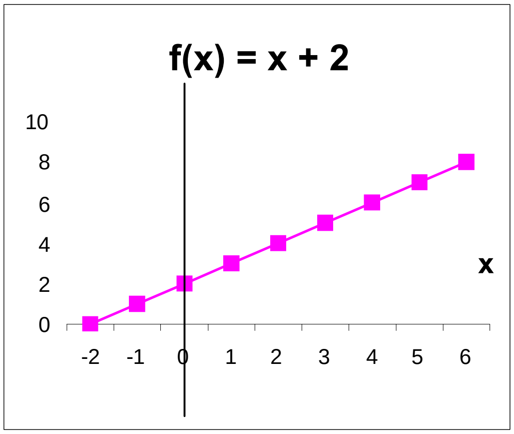
Tabla 1.3.1 Tabulación de la función $f(x) = x + 2$

x	-2	-1	0	1	2	3	4	Dominio
y	0	1	2	3	4	5	6	Contradominio

Gráfica

Para trazar la gráfica de una función es necesario tomar un conjunto de pares ordenados (x,y) de números reales (puntos), y estos puntos se trazan en el plano cartesiano dando como resultado una gráfica de puntos, al unir todos los puntos con una línea recta representa la gráfica de la función en estudio. Es importante aclarar que se pueden unir los puntos con una línea recta si la variable es continua.

Figura 1.3.2 Gráfica de la función $f(x) = x + 2$



Valor funcional de una función.

El valor funcional de una función se refiere a asignar valores a la variable x o que la variable tome valores, para determinar el valor de f(x).

Ejemplo:

Sea $f(x) = x^2 - 2x$ encontrar el valor funcional para los siguientes casos:

si x = 4

$$f(4) = (4)^2 - 2(4)$$
$$= 16-8$$
$$\mathbf{= 8}$$

si x = 4 + h

$$f(4 + h) = (4 + h)^2 - 2(4+h)$$
$$= 16 + 8h + h^2 - 8 - 2h$$
$$\mathbf{= 8 + 6h + h^2}$$

Si $g(x) = (x - 3)^3 + 4$ encontrar el valor funcional para los siguientes casos:

si $g(4) = (4 - 3)^3 + 4 = (1)^3 + 4 = 5$

si $g(-1) = (-1-3)^3 + 4 = (-4)^3 + 4 = -64 + 4 = -60$

si $g(c) = (c - 3)^3 + 4$

Ejercicios.

¿Cuáles de las siguientes expresiones determinan una función f con fórmula f(x)? Para los que lo hagan, determina f(x). Despeja la variable y en términos de x (una y única para cada x).

$x^2 + y^2 = 4$
$xy + y + 3x = 4$
$x = (3y + 1)^{1/2}$
$3x = y / (y + 1)$

Para $g(u) = 3/(u-2)$ encuentra el valor funcional para cada uno de los siguientes casos y llevarlos hasta su mínima expresión.
g(2)
g(2 + h)
g(2+h) – g(2)
(g(2+h) – g (2))/h
Encuentra el dominio natural ($f : R \to R$)

$f(x) = (2x + 3)^{1/2}$
$g(x) = (x^2 - 9)^{1/2}$
$f(t) = (4 - t^2)/(t^2 - t - 6)$

1.2. Principales tipos de funciones

Las funciones se clasifican en algebraicas y trascendentes
De las funciones algebraicas destacan las lineales, polinomiales (en particular la cuadrática), las racionales y las radicales
De las funciones trascendentes destacan la exponencial y la logarítmica

a). **Función lineal** de la forma:

$Ax + By + C = 0$ con $A \neq 0$ y $B \neq 0$, (A, B, C son constantes)

Es la ecuación general de la línea recta y su representación gráfica es una línea recta.

En particular $f(x) = ax + b$ es una función de primer grado o función lineal. Cuando se expresa en la forma $y = mx + b$ se le llama a la ecuación pendiente-ordenada al origen.
m representa la pendiente, b es el punto donde corta al eje de las ordenadas (y).

La pendiente se puede calcular si se conocen dos puntos por donde pase la recta $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ entonces:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

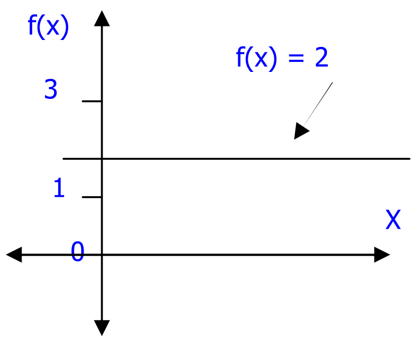
Conociendo la pendiente y un punto se puede encontrar la ecuación de la línea recta con la ecuación punto-pendiente:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Casos especiales de funciones lineales

Función constante:
f(x) = k,

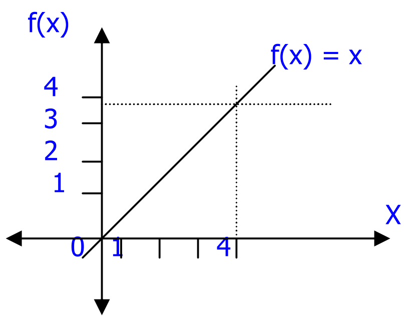
Donde k es una constante (número real).
Su gráfica es una línea horizontal, con pendiente m = 0



Función identidad:

$f(x) = x$.

Su gráfica es una recta que pasa por el origen de los ejes coordenadas, con pendiente $m = 1$.



A partir de éstas funciones simples se pueden construir muchas de las funciones importantes en cálculo.

Función polinomial: cualquier función que pueda obtenerse a partir de la función constante y de la función identidad mediante las operaciones de adición, sustracción y multiplicación se llama función polinomial, es decir f es de la forma:

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

En donde los valores de $a_n, a_{n-1}, \ldots a_0$ son constantes (números reales) y $a_n \neq 0$.
n es un entero no negativo y también indica el grado de la función polinomial.

Como un caso importante de la función polinomial destaca la función cuadrática de la forma:

$Ax + Bx + Cy + D = 0$ con $A \neq 0$ y $C \neq^{2} 0$

Es la ecuación general de segundo grado su representación grafica es una parábola.
La ecuación de una parábola es:

$y = ax^2 + bx + c$

Para realizar la gráfica son necesarios tres pasos:

1). Para determinar hacia donde abre la parábola, es necesario conocer cual es el signo del coeficiente de x^2.
1.1). Si es positivo la parábola abre hacia arriba, $a > 0$.
1.2). Si el signo es negativo la parábola abre hacia abajo, $a < 0$.

2). El vértice de la parábola, es el punto máximo o mínimo de la parábola, se encuentra utilizando las siguientes expresiones:

$$V x = \frac{- b}{2a} \quad \textit{vértice en } x \qquad ; \qquad V y = \frac{4ac - b^2}{4a} \quad \textit{vértice en } y$$

3). La parábola siempre corta el eje de las ordenadas, para determinar en donde lo corta se realizan los siguientes pasos:

3.1). Hacer x = 0

3.2) Sustituir éste en la ecuación: $y = a(0)^2 + b(0) + c = c$, entonces la parábola corta el eje de las ordenadas en el punto (0,c).

Ejemplo:

$$Y = 3x^2 + 12x$$

La parábola abre hacia arriba porque a = 3 > 0.
El vértice se encuentra en el punto (-2, -12).
La parábola corta los ejes en los puntos (0, 0) y (-4, 0).

Función racional: los cocientes de funciones polinomiales se llaman funciones racionales, por lo tanto, f es una función racional si tiene la forma:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + b_1 x + b_0}$$

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{3}{x-4}$$

Cuando los valores son grandes de x, positivos o negativos, los valores de y son pequeños.
Para valores de x cercanos a 4, los valores de y son muy grandes, positivos o negativos.
Cuando x toma el valor de cuatro no existe valor de salida (valor funcional) para y.

Función Raíz

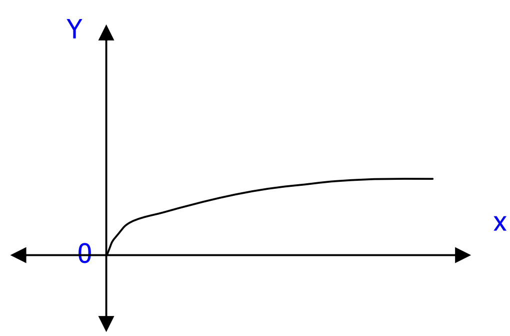
Una función raíz cuadrada de x, se representa como:
$$f(x) = \sqrt{x}$$

esta función tiene como dominio todos los números positivos $x \geq 0$

Tabla de valores

X	0	1	2	3
Y	0	1	1.414	1.732

Gráfica de la función $y = \sqrt{x}$



Funciones trascendentes.

Función exponencial:

La función exponencial se expresa como:

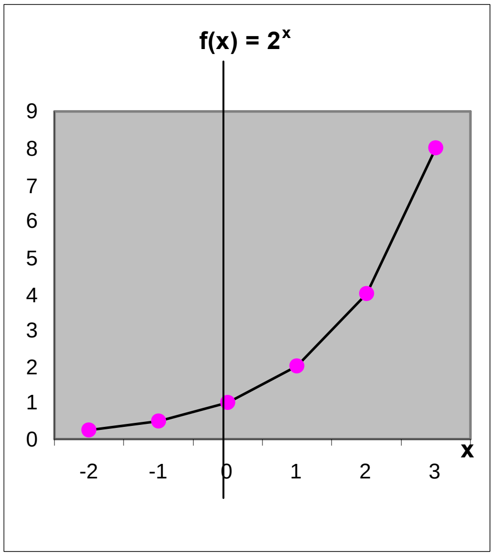
$f(x) = b^x$; si $b > 0$ y $b \neq 1$

en donde:
b es la base de una función exponencial.
x es el exponente de la función exponencial

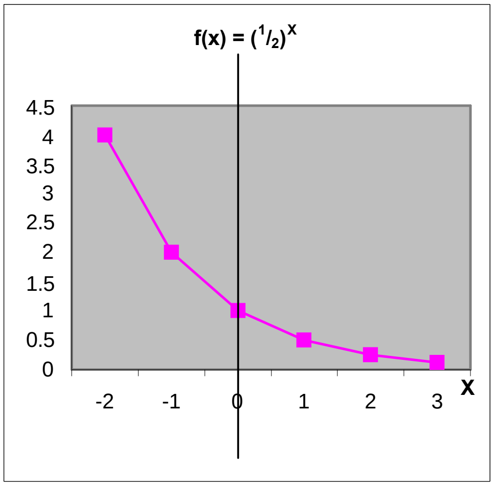
El dominio esta formado por todos los números reales $D_f = \{ R\}$

Ejemplo:

1. $f(x) = 2^x$



2. $f(x) = (1/2)^x$



Propiedades de la función exponencial

Si a > 0, b > 0 y x, y elementos de los reales (R) entonces:

Teorema 1

1.1. $a^x \bullet a^y = a^{x+y}$

1.2. $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$

1.3. $(a \bullet b)^x = a^x b^x$

1.4. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

1.5. $\left[\dfrac{a}{b}\right]^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

Teorema 2

2.1 $Si\ a > 1, \begin{cases} a^x > 1 \ \ cuando \quad x > 0 \\ a^x < 1 \ \ cuando \quad x < 0 \end{cases}$

2.2 $Si\ a < 1, \begin{cases} a^x < 1, \ \ cuando \quad x > 0 \\ a^x > 1, \ \ cuando \quad x < 0 \end{cases}$

Las leyes de los exponentes facilitan los cálculos de estas funciones.

También dentro de esta función se define la función exponencial natural que tiene como base el número e y es de la forma: $y = e^x$

PROBLEMAS PROPUESTOS

Ejemplo:

Se invierten 15 000 pesos a un interés compuesto del 12% anual, calcular
El monto después de dos años, si la capitalización es trimestral.

$$M = C\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt}$$

$$M = 15000\left(1+\frac{0.12}{4}\right)^{(4)(2)}$$

$$M = 19\,001.55 \quad pesos$$

2. Una máquina se deprecia con el uso, al transcurso de los años la ecuación que representa esta depreciación es la siguiente:

$$D(t) = 18000e^{-0.035t}$$

a). Encontrar el valor de desecho después de 10 años.
Solución:

$$D(t) = 18000e^{-0.035(10)}$$

$$D(t(= 12{,}684.4 \quad pesos$$

b). Cuál era el valor original de la máquina.
Solución:

$$Para\ t = 0$$

$$D(0) = 18000e^{-0.03(0)}$$

$$D(0) = 18000$$

Función logarítmica

La función logarítmica:

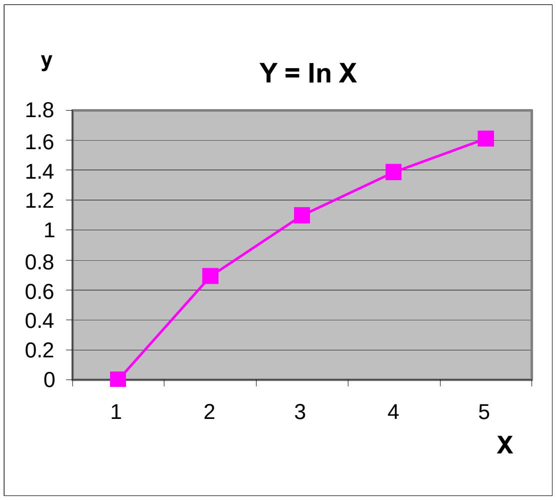
Si $b > 0$ y $b \neq 0$, entonces:

$y = \log_b x$ si y sólo si $x = b^y$; $x > 0$

con el dominio de la función $D_f = \{ R^+ \}$.

$y = \log_b x$ se lee logaritmo de base b de x igual a y

Los cálculos en funciones logarítmicas se facilitan con las leyes de los logaritmos. Dentro de esta función se define la función logaritmo natural que tiene como base al número e y es de la forma: $y = \ln x$



Propiedades de los logaritmos

Logaritmos comunes o de base 10 (briggs), se denotan como **log x**, la base 10 no se escribe. El logaritmo natural (neperiano) de base **e** (e = 2.718281828) se denota como: **ln x.**

LOGARITMO	
Expresión	Nombre
$\log_a a = 1$	Logaritmo de la base
$\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$	Cambio de base
Log (a • b) = log a + log b	Producto
$\log(a/b) = \log a - \log b$	Cociente
$\log a^n = n \log a$	Potencia
$\log \sqrt[n]{a} = \dfrac{1}{n}\log a$	Raíz
Estas propiedades se cumplen para logaritmos con cualquier base.	
Nota: $\log a^n \neq (\log a)^n = \log^n a$	

Ejemplo:

Se cuenta un capital de 2000 pesos invertidos a un interés compuesto anual del 4%. ¿En cuánto tiempo se triplica el capital?

Solución:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{C}(1 + \boldsymbol{i})^{t}$$

$$6000 = 2000\,(1 + 0.04)^{t}$$

aplicando log en ambos lados y simplificando :

$$\log\ 3 = (1.04)^{t}$$

por la propiedad del logaritmo

$$\log 3 = t \log 1.04$$

$$t = \frac{\log 3}{\log 1.04}$$

$$t = 28 \text{ años}$$

Problemas propuestos.

Clasifica cada una de las siguientes funciones:

Función	Respuesta
$f(x) = 3x^{1/2} + 1$	raíz
$f(x) = 3x^{2} + 2x^{-1}$	racional
$f(x) = 3$	constante
$g(x) = x^{-2} + 2x^{-1} + 3$	racional
$h(x) = (1 + 5x)^{-1/2}$	racional
$f(x) = 2^{x-1}$	exponencial
$g(x) = \log_4 x^2$	logarítmica

Aplicaciones de ecuaciones lineales.

Un comerciante de ganado compró 1000 reses a $150.00 cada una. Vendió 400 de ellas obteniendo una ganancia de 25%. ¿A qué precio deberá vender las restantes 600, sí la utilidad promedio del lote completo ha de ser del 30%?

La ganancia es de: (150) (0.25) = $ 37.50
La ganancia total es de: ($ 37.50) (400) = $15000

Sea "x" el precio de venta de la 600 reses restantes, entonces $x - 150$ es la utilidad por res, la ganancia por las 600 reses es $600\,(x - 150)$

La ganancia total por la venta completa es: $15000 + 600\,(x - 150)$

La ganancia deberá ser el 30% del precio que pagó por la 1000 reses, esto es
$1000 \times 150 \times 0.30 = 45000$, entonces:

$$15000 + 600(x - 150) = 45000$$
$$15000 + 600x - 90000 = 45000$$
$$600x = 45000 + 90000 - 15000$$
$$x = \frac{120000}{600}$$
$$x = 200$$

El comerciante debe vender las reses restantes a $200.00 cada una para lograr una ganancia del 30%.

Una persona va a invertir $70000. Esta persona desea recibir un ingreso mensual de $5000. Puede invertir sus fondos en bonos del gobierno a un 6% o con un riesgo mayor al 8.5% de los bonos hipotecarios. ¿Cómo deberá invertir su dinero de tal modo que minimice los riesgos y obtenga $ 5000?
Sea x cantidad invertida en bonos del gobierno.
Sea (70000 – x) cantidad invertida en bonos hipotecarios.

El ingreso percibido por los bonos del gobierno es 0.06x.
El ingreso percibido por los bonos hipotecarios es 0.085(70000 –x).

Entonces:
$$0.06x + 0.085(70000 - x) = 5000$$
$$-0.025x = 5000 - 5950$$
$$x = \frac{-950}{-0.025}$$
$$x = 38\ 000$$

La persona deberá invertir $38000 en bonos del gobierno y $ 32000 en bonos hipotecarios.

1.3. Aplicaciones de las funciones

Lineales

Resuelve las siguientes ecuaciones:

3 – 2(1 - x) = 5 + 7 (x - 3)
1 - 2[4-3(x + 1)] = 4(x - 5) –1

$$\frac{3x+7}{2} = \frac{1+x}{3}$$

Respuestas:

X = 17/ 5
X = -10
X = -19/ 7

Un comerciante de autos usados compra 2 automóviles en
$290 000. Vende uno con una ganancia de 10% y el otro perdiendo 5% y aún obtuvo una ganancia de $ 185 por la transacción completa. Encuentra el costo de cada automóvil.
R. $220 000 y $70 000

2. LÍMITES

OBJETIVOS

Comprender los conceptos básicos
Distinguir y emplear la simbología
Calcular la operaciones básicas de los límites
Identificar y aplicar las propiedades algebraicas de los límites
Desarrollar el producto cartesiano y presentarlo gráficamente

CONTENIDO:

2.1 Límite de una función
2.2 Propiedad de los límites
2.3 Límites al infinito
2.4 Propiedad de los límites al infinito
2.5 Aplicación de los límites

2.1. Lìmite de una funciòn

Definición

Sea f(x) una función que esta definida en todos los valores cercanos a, con la excepción de si mismo. Se dice que L es el límite de f(x) cuando x tiende a **a**, si la diferencia entre f(x) y L puede hacerse tan pequeña como se desea, con sólo restringir x a estar lo suficientemente cerca de a. Quedando entonces representado como:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Ejemplos:

Considerando la función f definida por la ecuación

$$f(x) = \frac{(2x+3)(x-1)}{x-1}$$

f está definida para todos los valores de x excepto cuando x = 1. Además, si:
$x \to 1$, el numerador y el denominador pueden ser divididos entre (x – 1) para obtener :

$$f(x) = 2x + 3 \quad ; \quad x \to 1$$

Como se muestra a continuación: x toma los valores, 0, 0.25, 0.50, 0.75. 0.9, 0.99, 0.999 y así sucesivamente. Entonces x toma valores cada vez más cercanos a **uno** pero x nunca toma el valor de **uno**, en otras palabras, la variable x se aproxima por la izquierda a 1 a través de valores que son números menores muy cercanos a éste. Ahora si analizamos a la variable x cuando se aproxima por el lado derecho a 1, a través de valores mayores que éste, esto hace por ejemplo que x tome valores de 2, 1.75, 1.50, 1.25, 1.10, 1.01, 1.001, 1.0001, 1.00001, y así sucesivamente, pero nunca toma el valor de **uno**.

Acercándonos a 1 por la izquierda:

Tabla 3.2.1.

X	0	0.25	0.5	0.75	0.9	0.99	0.999	0.9999
f(x) = 2x + 3	3	3.5	4	4.5	4.8	4.98	4.998	4.9998

Pero $x \neq 1$

Acercándonos a 1 por la derecha:

Tabla 3.2.2.

X	2	1.75	1.5	1.25	1.1	1.01	1.001	1.0001
f (x) = 2x + 3	7	6.5	6	5.5	5.2	5.02	5.002	5.0002

Pero $x \neq 1$

Se observa en ambas tablas a medida que x se aproxima cada vez más a 1, f(x) también se aproxima cada vez a 5 y entre más cerca esté x de 1, más cerca f (x) a 5, en consecuencia, cuando x se aproxima a 1 por abajo o por arriba, f(x)=2x+3 se acerca a 5.
Se indica que el límite de f(x) cuando x tiende a 1 es igual a 5, esto se representa así:

$$\lim_{x\to 1} (2x+3)=5$$

Encontrar el límite de

$$\lim_{x\to 1} \frac{(2x+3)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1} \; = 5$$

Conclusión f(x) no esta definida en x = 1, sin embargo lím f(x) existe cuando $x \to 1$.

Encontrar el límite de la función

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$$

Sustituyendo el valor de tres donde se encuentra la x se tiene:

$$\lim_{x\to 3} \frac{(3)^2-9}{3-3} = \frac{0}{0} \quad \textit{operación no determinada}$$

conclusión f(x) no esta definida en x = 3 , sin embargo, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ existe, por que la podemos escribir como:

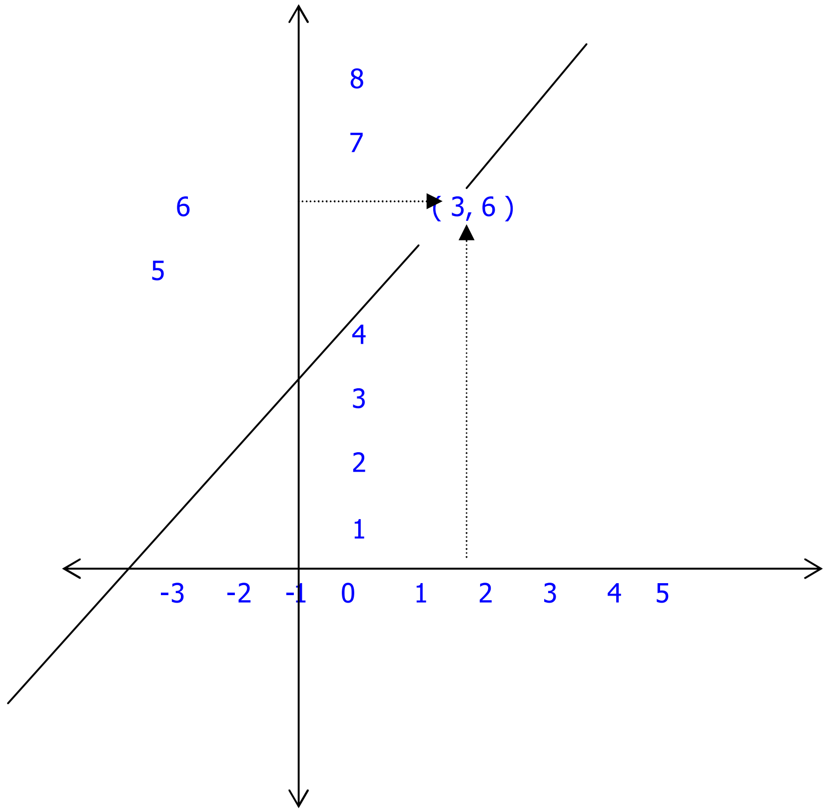
$$\lim_{x\to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \; x+3 = 3+3 = 6$$

Por lo tanto, el límite de la función existe y es igual a 6 ; el punto crítico es:
(3,6) no pertenece a la gráfica.

Tabla 3.2.3.

x	y
-3	0
-2	1
-1	2
3	
4	
5	
6	(no pertenece)

Gráfica 3.2.1.



Función discontinua en (3, 6)

DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD

Una función f(x) es continua en x = a si: la función f(a) como el $\lim_{x \to a} f(x)$ existen y son iguales. Analizamos funciones continua y discontinua con mayor detalle en la sección 3.3.

2.2. Propiedades de los lìmites

Las propiedades básicas de las operaciones con límites de una función son:

Sean f y g dos funciones tales que $\underset{x \to a}{\text{lím}}\, f(x) = L$ y $\underset{x \to a}{\text{lím}}\, g(x) = M$, si los dos límites existen

Entonces:

1. $$\underset{x \to a}{\text{lím}}\; k[f(x)] = k \underset{x \to a}{\text{lím}}\; f(x) = kL$$

2. $$\underset{x \to a}{\text{lím}}\; f(x) \pm g(x) = \underset{x \to a}{\text{lím}}\; f(x) \pm \underset{x \to a}{\text{lím}}\; g(x) = L \pm M$$

3. $$\underset{x \to a}{\text{lím}}\; f(x) \bullet g(x) = \underset{x \to a}{\text{lím}}\; f(x) \bullet \underset{x \to a}{\text{lím}}\; g(x) = L \bullet M$$

4. $$\underset{x \to a}{\text{lím}}\; f(x) \div g(x) = \underset{x \to a}{\text{lím}}\; f(x) \div \underset{x \to a}{\text{lím}}\; g(x) = L \div M, M \neq 0$$

5. $$\underset{x \to a}{\text{lím}}\; x^n = a^n$$

Si k es una constante $\underset{x \to a}{\text{lím}}\; k = k$

7. Si m, b, y c son tres constantes, entonces

$$\underset{x \to c}{\text{lím}}\; (m x + b) = mc + b$$

De acuerdo al análisis de las propiedades de límites se podrá observar que el valor límite de una función se puede obtener con la simple sustitución del valor de límite de x en la función dada. Este método de sustitución siempre nos lleva a una respuesta correcta si la función es continua en el límite que se ésta evaluando.

Todos los polinomios son funciones continuas y cualquier función racional es continua, excepto en los puntos en que el denominador se hace cero, dando como resultado del cálculo de un límite que la operación no este determinada y se concluye que el límite no existe (0 / 0 ó una constante divida entre cero d /0).

Ejemplos:

1. Calcular el límite de la siguiente función, cuando $x \to -1$

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{1 - x^2}$$

haciendo x = -1 en la fórmula válida para f (x), tenemos

$$f(-1) = \frac{(-1)^2 + 3(-1) + 2}{1 - (-1)^2} = \frac{0}{0} \quad \textit{la operación no esta determinada}$$

Factorizando

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{1 - x^2} = \frac{(x+1)(x+2)}{(1-x)(1+x)} = \frac{x+2}{1-x} = \frac{-1+2}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$$

$$\textit{entonces}: \quad \lim_{x \to -1} f(x) = \frac{1}{2}$$

2. Determine $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

Racionalizando se tiene:

$$\lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x-1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{x - 1}{(x-1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

3. Determine $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{5x^3 - 15}$

$$\lim_{x \to 2} (5x^3 - 15)^{1/2} = \left[\lim_{x \to 2} (5x^3 - 15) \right]^{\frac{1}{2}} = (25)^{\frac{1}{2}} = 5$$

Ejercicios propuestos

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x}{x+1}$ $\qquad R. = -\dfrac{2}{3}$

2. $\boldsymbol{\lim\limits_{t \to 1} \dfrac{t^2 - 3t + 2}{t^2 - 1}}$ $\qquad \boldsymbol{R = -\dfrac{1}{2}}$

3. $\lim\limits_{t \to -1} \dfrac{t^2 - 1}{t - 1}$ $\qquad R. = Cero$

6. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$ $\qquad R := \dfrac{3}{2}$

7. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} \right)$ $\qquad R. = Cero$

2.3. Límites al infinito

4. Determine $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x-1}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x-1} = \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

4. $\lim_{x \to \infty} \frac{-2x^3 - 2x + 3}{3x^3 + 3x^2 - 5x}$ $\quad R = -\frac{2}{3}$

5. $\lim_{x \to \infty} \frac{x(3x-6)}{x(4 - \frac{8}{x})}$ $\quad R = \infty$

2.4. Propiedades de los lìmites al infinito[2]

1. Si k es una constante entonces $\lim_{x \to \infty} k = k$ y $\lim_{x \to -\infty} k = k$
2. Si n es un número natural par entonces $\lim_{x \to \infty} x^n = \infty$ y $\lim_{x \to -\infty} x^n = \infty$
3. Si n es un número natural impar entonces $\lim_{x \to \infty} x^n = \infty$ y $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$
4. Si m es un número natural par entonces $\lim_{x \to \infty} \sqrt[m]{x} = \infty$
5. Si m es un número natural impar entonces $\lim_{x \to \infty} \sqrt[m]{x} = \infty$ y $\lim_{x \to -\infty} \sqrt[m]{x} = -\infty$

[2] http://cariari.ucr.ac.cr/~cimm/cap_04/cap4_4-2.html

6. Si k es un número racional positivo y r es un número real arbitrario entonces $\lim_{x \to \infty} \frac{r}{x^k} = 0$ y $\lim_{x \to -\infty} \frac{r}{x^k} = 0$ siempre que x^k esté definido.

2.5. Aplicaciones de los lìmites

Límites de funciones continuas y discontinuas

Se define función continua como aquella, cuya gráfica es una curva que es continua, la cual no tiene huecos (vacíos) o que este segmentada.

Se dice que una función es continua para un valor en x = a, si cumple con:

a. f(a) esta definida

b. $\lim_{x \to a} f(x) \quad existe$

c. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Para que un límite exista la función debe aproximarse al mismo punto x = a por ambos lados

Ejemplos:

1. La función $f(x) = x^2$ ¿es continua en x = 3?

a. $f(x) = x^2$ está definida

b. $\lim_{x \to 3} x^2 = (3)(3) = 9$

c. Valor funcional

$f(3) = (3)^2 = 9$

$\lim_{x \to 3} x^2 = f(3)$

$9 = 9$

Es continua para x = 3

2. $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ ¿es continua en x = 3?

a. $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ está definida

b.

$$\lim_{x \to 3} \frac{3+1}{3-2} = \frac{4}{1} = 4$$

c. $$f(x) = \frac{3+1}{3-2} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{3+1}{3-2} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = f(a)$$

4 = 4

Es continua en x = 3

Función Discontinua

Cuando no se cumplen las condiciones de continuidad de una función, a ésta se le llama Discontinua.

Ejemplos:

1. $$f(x) = \frac{5}{x-1}$$ ¿es discontinua para x = 1?

a. $$f(x) = \frac{5}{x-1}$$ es discontinua para x = 1

b. $$\lim_{x \to 1} = \frac{5}{x-1} = \frac{5}{0} = \text{ no existe el limite}$$

c. $$f(x) = \frac{5}{x-1} = \frac{5}{0} =$$ la operación no esta definida

La función es discontinua en x = 1.

2. $f(x) = \frac{1}{x}$ ¿es continua en x = 0?

a. $f(x) = \frac{1}{x}$ es discontinua en x = 0?

b. $\lim_{x \to 0} = \frac{1}{x}$ no existe el límite

c. $f(0) = \frac{1}{0}$ no esta definida la operación

La función es discontinua en x = 0, pero la función es continua en x ≠ 0.

Una función f(x) es continua en un intervalo abierto a < x < b, si es continua en cada x del intervalo. En un intervalo cerrado a ≤ x ≤ b si f(x) es continua en el intervalo abierto a < x < b y f(x) se aproxima a f(a) a medida que x se acerca al valor de a por la derecha (para a < x) y f(x) se aproxima a f(b) a medida que x tiende al valor b por la izquierda (para x < b).

3. DERIVADAS

OBJETIVOS

Comprender la interpretación geométrica de la derivada
Calcular derivadas de funciones por los métodos de la primera y segunda derivada
Identificar y aplicar las propiedades de las derivadas
Identificar los valores máximos y mínimos de funciones
Desarrollar aplicaciones de la derivada

CONTENIDO:

3.1 Derivada de una función
3.2. Proceso de los cuatro pasos para determinar la derivada
3.3. Uso e interpretación de la derivada
3.4. Reglas para determinar la derivada de una funciòn
3.5. Segunda derivada
3.6. Máximos y mìnimos
3.7 Aplicaciones con la primera derivada

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA.

El cálculo diferencial estudia el cambio que le ocurre a una variable cuando existen variaciones en otra variable de la cual depende la variable original.
Los investigadores del área económica-administrativa se interesan por las razones de cambio promedio e instantáneo y están particularmente interesados en las tasas marginales de cambio, tales como: el costo marginal, el ingreso marginal, la utilidad marginal, el producto marginal, todos los cuales se miden utilizando matemáticamente la derivada.

Para llegar a un concepto claro de derivada, esta sección define lo que se conoce como cambio o incremento de una variable.

DEFINICIÓN DE INCREMENTO DE UNA VARIABLE.

Sea $y = f(x)$ una función, con x_1 y x_2, un par de valores en el dominio de f, de tal forma que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$, entonces:

El cambio en el valor de x al pasar de x_1 a x_2, dado por $x_2 - x_1$, se denomina incremento de x y se representa por Δx, donde $\Delta x = x_2 - x_1$.

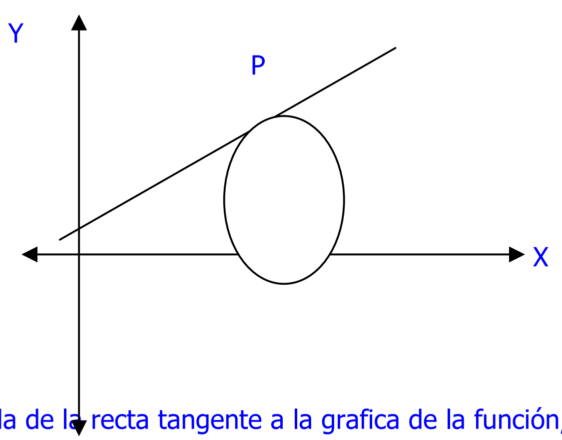
El cambio en el valor de Y al pasar de y_1 a y_2, dado por $y_2 - y_1$, se denomina incremento de y, se representa por ΔY, donde:
$\Delta Y = Y_2 - Y_1 = f(X_2) - f(X_1)$

TASA DE CAMBIO.

Para entender el comportamiento geométrico de la derivada, se define la tasa de cambio de una función f(x), entre x y $x+\Delta x$, al cociente $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$

Muchos de los problemas importantes del cálculo dependen de encontrar la recta tangente a una curva dada en un punto especifico de la curva. Si la curva es una circunferencia, sabemos de la geometría plana que la recta tangente en un punto P de la circunferencia se define como la recta que intersecta a la circunferencia únicamente en el punto P. Esta definición no es suficiente para cualquier curva en general.
Por ejemplo, en la gráfica. 3.3.1 en donde la línea es la recta tangente a la curva en el punto P, la cual intersecta a la curva en el punto P.

Gráfica 3.3.1

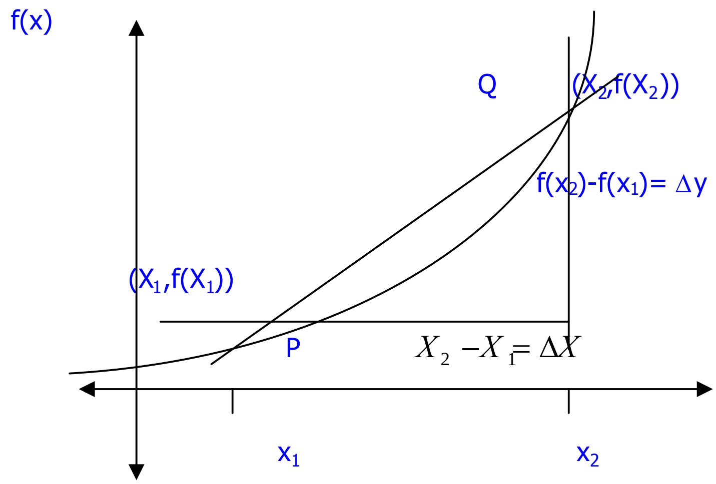


Para llegar a una definición adecuada de la recta tangente a la grafica de la función, se comienza por considerar como se definiría la pendiente de la recta tangente en un punto, si conocemos la pendiente de una recta y un punto sobre la misma, la recta está determinada. (punto- pendiente).

Sea la función f, continua en x_1. Se define la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en P $(x_1, f(x_1))$.

Sea Q $(x_2, f(x_2))$ otro punto sobre la gráfica de la función f.

Figura 3.3.2



Cualquier recta que pase por dos puntos de una curva se llama secante; por lo tanto, la recta a través de P y Q es una recta secante. En la figura 3.3.2 está a la derecha de P. Sin embargo Q puede estar ya sea a la derecha o a la izquierda de P.

Denotemos la diferencia de las abscisas de Q y P por Δx tal que:
$\Delta x = x_2 - x_1$

Δ_x puede ser positivo o negativo. La pendiente de la recta secante PQ está definida por:

$$M_{pq} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Ya que $X_2 = X_1 + \Delta x$, podemos escribir la ecuación anterior como:

$$M_{pq} = \frac{f(x_1 + \Delta_x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Ahora el punto P está fijo, si movemos el punto Q a lo largo de la curva hacia P; entonces Q se aproxima a P. Esto es equivalente a establecer que Δx tiende a cero. Como esto sucede, la recta secante gira sobre el punto fijo P. Si esta recta secante tiene un punto límite, a esta posición límite, común de la recta secante se le define como la recta tangente a la curva en P. Así se querría que la pendiente de la recta tangente a la gráfica en P sea el límite de M_{pq} cuando Δx se aproxima a cero, y el límite existe.

Esto conduce a la siguiente definición:

PENDIENTE DE UNA RECTA TANGENTE

La pendiente de la recta tangente en la gráfica de la función f en el punto
P (x, f(x)) esta dada por:

$$m(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$ si el límite existe.

El límite que mide la pendiente de la recta tangente a la gráfica de Y = f(x) en el punto P (x, f(x)) recibe el nombre especial de derivada de f en x.

3.1. Derivada de una funciòn

La derivada de una función f con respecto de x es la función f' (que se lee "f prima de x"), definida por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Donde el dominio de f' es el conjunto de todas las x donde existe límite.

3.2. Proceso de los cuatro pasos para determinar la derivada

La operación de calcular la derivada de una función se denomina diferenciación.
Si la derivada de una función existe en un punto a, se dice que f es diferenciable en este punto.

EJEMPLO:

Encontrar la pendiente de la recta tangente a la curva $Y = x^2 - 4x + 3$ en el punto (x_1, y_1)

Si: $f(x) = x^2 - 4x + 3$, entonces:

$f(x_1) = x_1^2 - 4x_1 + 3$ y $f(x_1 + \Delta x) = (x_1 + \Delta x)^2 - 4(x_1 + \Delta x) + 3$

de la definición (i) tenemos:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{((x_1+\Delta x)^2 - 4(x_1+\Delta x)+3)-(x_1^2-4x_1+3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_1^2 + 2x_1\Delta x + \Delta x^2 - 4x_1 - 4\Delta x + 3 - x_1^2 + 4x_1 - 3}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{\text{lím}} \frac{2x_1\Delta x + \Delta x^2{}_1 - 4\Delta x}{\Delta x}$$

Ya que $\Delta x \to 0$ podemos factorizar Δx en el numerador

$$= \underset{\Delta x \to 0}{\text{lím}} \frac{\Delta x(2x_1 + \Delta x_1 - 4)}{\Delta x} = 2x_1 + \Delta x - 4$$

En donde:

$$m(x_1) = \underset{\Delta x \to 0}{\text{lím}}\, 2x_1 + \Delta x - 4$$

Por sustitución:

$\mathbf{m\ (x_1) = 2x_1 - 4}$

Nota: Cuando se obtiene como resultado del cálculo de un límite **0 / 0** o **constante / 0**, se concluye que el límite no existe.

Problemas propuestos

Calcular el límite de la siguiente función f(x) = $(x^2 + 3x + 2) / (1-x)$, cuando $x \to -1$
Calcular la derivada aplicando límites f(x) = 3x R. 3
Calcular la derivada aplicando límites f(x) = 1 / x R. −1/x2
Calcular la derivada aplicando límites f(x) = 4x+1 R. 4
Calcular la derivada aplicando límites f(x) = $x^4 - 12x - 13$ R. $4x^3 - 12$

3.3. Uso e irteprtetaciòn de la derivada

Al utilizar la definición dada anteriormente para calcular la derivada de algunas funciones no siempre es sencillo, lleva tiempo y cuidado; por ello, es necesario conocer reglas que faciliten este procedimiento. Estas reglas forman lo que se denomina el álgebra de derivadas. La notación $\frac{dy}{dx}$ representa un sólo símbolo y no deberá interpretarse como el cociente de las cantidades de *dy* y *dx*,

$\frac{dy}{dx}$ indica la derivada dy con respecto a x si y es una función de la variable independiente x, la derivada también se denota por las siguientes representaciones:

$$\frac{d}{dx}(y), \quad \frac{df}{dx}, \quad y', \quad Dxy, \quad Dxf, \quad \frac{d}{dx}(f).$$

3.4. Reglas para determinar la derivada de una función

1. Derivada de una constante es igual acero, si: y = c

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(c) = 0$$

Ejemplos:

a. $\frac{d}{dx}(6) = 0$

b. $\frac{d}{dx}(b) = 0$

Problemas:

1. $\frac{d}{dx}(18)$ R. 0

2. $\frac{d}{dx}(3b)$ R. 0

2. Derivada de una variable es igual a uno, si: y = x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x) = 1$$

Ejemplos:

a. $\frac{d}{dt}(t) = 1$

b $\frac{d}{dr}(r) = 1$

Problemas:

1. $\frac{d}{dy}(y)$ R. 1

2. $\frac{d}{dm}(m)$ R. 1

3. La derivada de la potencia n-ésima de una variable es el producto del exponente n y la potencia del exponente n-1 de la variable, si: $y=x^n$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$$

Ejemplos:

a. $\frac{d}{dx}(x^2)=2x^{2-1}=2x$

b. $\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{8}})=\frac{1}{8}x^{-\frac{7}{8}}$

Problemas:

1. $\frac{d}{dx}(x^{-3})$ $\qquad R.\ -\frac{3}{x^4}$

2. $\frac{d}{dx}(x^{-\frac{5}{3}})$ $\qquad R.\ -\frac{5}{3x^{\frac{8}{3}}}$

4. Derivada del producto de una constante y una función. Si: y =cu en donde u= f(x).

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(cu)=c\frac{du}{dx}$$

Ejemplos:

a. $\frac{d}{dx}(10x)=10\frac{d}{dx}(x)=10$

b. $\frac{d}{dx}(-2x^{\frac{4}{3}})=-2\frac{d}{dx}(x^{\frac{4}{3}})=-2\left[\left(\frac{4}{3}\right)x^{\frac{4}{3}-1}\right]=-\frac{8}{3}x^{\frac{1}{3}}$

Problemas:

1. $\frac{d}{dx}(4x^3)$ $\qquad R.\ 12x^2$

2. $\frac{d}{dx}(16x^{\frac{1}{2}})$ $\qquad R.\ \frac{8}{x^{1/2}}$

5. Derivada de la suma de un número infinito de funciones. Si: Y = u + v en donde u = f(x) y v = g(x)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(u) + \frac{d}{dx}(v)$$

Ejemplos:

a. $\frac{d}{dx}(3x^2 + 4x + 2) = 3\frac{d}{dx}(x^2) + 4\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(2) = 3(2x) + 4 + 0 = 6x + 4$

b. $\frac{d}{dx}(2x - 6x^{-\frac{1}{2}} + 10) = 2\frac{d}{dx}(x) - 6\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{d}{dx}(10) = \frac{-3}{\sqrt{x}} + 2$

Problemas:

1. $\frac{d}{dx}(7x^{\frac{1}{2}} + 5x^{-\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{4}} + 7x - 5)$ $\qquad R. \frac{7}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{5}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}x^{-\frac{3}{4}} + 7$

2. $\frac{d}{dx}(16x^{\frac{1}{2}} + 7x + 4)$ $\qquad R. \; 8x^{-1/2} + 7$

6.- Derivada del producto de dos funciones.

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{d}{dx}(v) + v\frac{d}{dx}(u)$$

Ejemplo:

a. $f(x) = (x^3+3)(x+2)$

Sea: $u=(x^3+3)$ y $v=(x+2)$

$$\frac{d}{dx}(uv) = (x^3 + 3)\frac{d}{dx}(x + 2) + (x + 2)\frac{d}{dx}(x^3 + 3) = 4x^3 + 6x^2 + 3$$

b. $f(x) = (\sqrt{x} + 3)(x + 3)$

Sea: $u = \sqrt{x} + 3$ y $v = x+3$

$f'(x) = (\sqrt{x} + 3)(1) + \left(x + 3\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right) = (\sqrt{x} + 3)\left(\frac{x + 3}{2\sqrt{x}}\right)$

Problemas propuestos:

1. $f(x)=(x^3+2)(x)$ R. $4x^3+2$

2. $f(x)=\left(x^{1/2}+x\right)(2x)$ R. $4x+3\sqrt{x}$

7.- Derivada del cociente de una constante y una función.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{u}\right)=-\frac{c}{u^2}\frac{d}{dx}(u)$$

Ejemplo:

a. $f(x)=\dfrac{4}{x^6}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{x^6}\right)=\frac{d}{dx}\left(-\frac{4}{x^{12}}\right)(6x^5)=-\frac{24x^5}{x^{12}}=-24x^{-7}$$

b. $f(x)=\dfrac{36}{x^3+1}$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{36}{x^3+1}\right)=-\frac{108x^2}{(x^3+1)^2}$$

Problemas propuestos:

1. $f(x)=\dfrac{6}{(x^3+1)^2}$ $R.\dfrac{-36x^2}{(x^3+1)^3}$

2. $f(x)=\dfrac{3}{x^2+2}$ $R.-\dfrac{6x}{(x^2+2)^2}$

8. Derivada del cociente de una función y una constante.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right)=\frac{\frac{du}{dx}}{c}$$

a. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{3}$

Donde: $c = 3$ y u = x^2+1

$$\frac{d}{dx}\frac{x^2+1}{3} = \frac{2x}{3}$$

b. $f(x) = \frac{(x^2+2)^2}{16}$ $\qquad$ $$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\left(\frac{(x^2+2)^2}{16}\right) = \frac{x^3+x}{4}}$$

Problemas propuestos:

1. $f(x)=\frac{3x^3(x^2+2)}{3}$ R. $5x^4 + 6x^2$

2. $\boldsymbol{f(x)=\frac{(x^2+2)^3}{3}}$ R. $\boldsymbol{\frac{2x^2+2x}{3}}$

9. Derivada del cociente de dos funciones.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\left(\frac{du}{dx}\right)-u\left(\frac{dv}{dx}\right)}{v^2}$$

a. $f(x)=\frac{x^3+16}{x^2}$

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3+16}{x^2}\right)=\frac{x^2\left(\frac{d}{dx}(x^3+16)\right)-(x^3+16)\left(\frac{d}{dx}(x^2)\right)}{(x^2)^2}=\frac{x^3-32}{x^3}=1-\frac{32}{x^3}}$$

b. $f(x)=\frac{x^2-4x+1}{x-6}$ $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-4x+1}{x-6}\right)=\frac{x^2-12x+23}{(x-6)^2}$

Problemas propuestos:

1. $f(x)=\frac{x-3}{x^2+4}$ R. $\boldsymbol{\frac{-x^2+6x+4}{\left(x^2+4\right)^2}}$

2. $f(x)=\frac{18x^7+12x^2+3}{x^3+1}$ R. $\boldsymbol{\frac{72x^9+126x^6-12x^4-9x^2+24x}{\left(x^3+1\right)^2}}$

10. Derivada de la potencia n-ésima de una función derivable.

$$\frac{d}{dx}\left(u^n\right) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

Ejemplos:

a. $\boldsymbol{f(x) = \left(x^2 + 3\right)^3}$

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\left(x^2 + 3\right)^3 = 3(x^2 + 3)^2(2x) = 6x(x^2 + 3)^2}$$

b. $\boldsymbol{f(x) = \left(x + 3\right)^{-\frac{1}{3}}}$

$$\frac{d}{dx}\left(x+3\right)^{-1/3} = \frac{-1}{3(x+3)^{4/3}}$$

Problemas propuestos:

1. $f(x) = (x^2 - x)^{-2}$ R. $\dfrac{2-4x}{(x^2-x)^3}$

2. $f(x) = x^2(x+1)^{-1}$ R. $\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

11. Derivada de la raíz n-ésima potencia de una función.

$$\boldsymbol{\frac{d(\sqrt[n]{u})}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}}$$

n es el índice del radical.

a. $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 + x}$

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{2x^2 + x}\right) = \frac{4x+1}{3\sqrt[3]{(2x^2+x)^2}}$$

b. $f(x) = \sqrt{x+1}$

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x+1}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

Problemas propuestos:

1. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ R. $\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

2. $f(x)=\sqrt[4]{x^3+6}$ R. $\dfrac{3x^2}{4\sqrt[4]{(x^3+6)^3}}$

12.

Derivada de una función inversa.
La derivada de una función inversa es igual al recíproco de la derivada de la función. Si y = f(x) y x = g(y) son funciones diferenciables inversas.

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad \text{o bien} \quad \frac{df(x)}{dx}=\frac{1}{\frac{dg(y)}{dy}}$$

a. $x=y^2+6$ obtener $\dfrac{dy}{dx}$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{d}{dy}\left(y^2+6\right)=2y \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}$$

b. $x=y+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{5}y^5$ o bien $\dfrac{df(x)}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dg(y)}{dy}}$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{d}{dy}\left(y+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{5}y^5\right)=\left(1+y^2+y^4\right) \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+y^2+y^4}$$

Problemas propuestos:

1. $x=y^2+6y$ R. $\dfrac{1}{2y+6}$

2. $x=y+y^2$ R. $\dfrac{1}{1+2y}$

Derivadas de las funciones exponenciales y logarítmicas

1. Derivada de una constante elevada a una función.

Si: $f(x)=a^u$ en donde u = f(x) es una función derivable con respecto a x.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(a^u\right) = a^u Lna \frac{du}{dx}$$

Ejemplo:

a. $f(x) = 2^{-x}$

$$\frac{d}{dx}\left(2^{-x}\right) = 2^{-x} Ln(2) \frac{d}{dx}(-x) = -2^{-x} Ln(2)$$

b. $f(x) = 10^{x^2 - x}$

$$\frac{d}{dx} 10^{x^2 - x} = 10^{x^2 - x} \ln 10(2x - 1)$$

Problemas propuestos:

1. $f(x) = a^x x^a$ R. $a^x x^a \left(\frac{a}{x} + \ln(a)\right)$

2. $f(x) = 18^{x^2 + 2}$ R. $18^{x^2 + 2} \ln 18(2x)$

2. Derivada de **e** elevada a una función u.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^u\right) = e^u \frac{du}{dx}$$

Ejemplo:

a. $f(x) = \frac{e^x}{x}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{x}\right) = \frac{x \frac{d}{dx}\left(e^x\right) - e^x \frac{d}{dx}(x)}{x^2} = \frac{e^x (x - 1)}{x^2}$$

b. $f(x) = 10e^{x^2 + 4}$

$$\frac{d}{dx}\left(10 \frac{d}{dx}\left(x^2 + 4\right)\right) = 20xe^{x^2 + 4}$$

Problemas propuestos:

1. $f(x) = 20e^{x+1}$ R. $20e^{x+1}$

2. $f(x) = xe^{x^2}$ R. $\boldsymbol{e^{x^2}(2x^2+1)}$

3 Derivada del logaritmo de base a de una función u.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{\log_a e}{u}\left(\frac{du}{dx}\right)$$

Ejemplos:

$$f(x) = \log\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\log e}{\frac{x}{x+1}}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x+1}\right)\right) = \frac{\log e}{x/x+1}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right) = \frac{\log e}{x(x+1)}$$

b. $f(x) = \sqrt{\log x}$

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\log x}\right) = \frac{\log e}{2x\sqrt{\log x}}$$

Problemas propuestos:

1. $f(x) = \left(\log x^2\right)^3$ R. $\dfrac{6(\log x^2)^2(\log e)}{x}$

2. $f(x) = x^2(\log x^3)^3$ R. $(9x)(\log x^3)^2(\log e) + (\log x^3)^3(2x)$

Regla de la cadena

Sea $y = f(u)$ una función de u y $u = g(x)$ una función de x. Entonces podemos escribir:
$y = f[g(x)]$
Que representa a y como una función de x, denominada la función composición de f y g, y se denota por $(f \circ g)(x)$.
Las derivadas de funciones compuestas puede calcularse mediante el teorema siguiente:
Si y es una función de u y u es una función de x entonces: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \bullet \frac{du}{dx}$

Ejemplo:

a. Calcular $\frac{dy}{dx}$ cuando $y = (x^2 + 1)^5$.

Expresamos a y como la composición de dos funciones de la forma siguiente:

$y = u^5$ donde $u = x^2 + 1$.

donde tendremos $\frac{dy}{du} = 5u^4$ y $\frac{du}{dx} = 2x.$

Aplicando el teorema $\frac{dy}{dx} = 10x(x^2 + 1)^4$.

Problemas propuestos:

1. Sea $\boldsymbol{y = \sqrt[3]{(4x^2 - 8x + 5)}}$ R. $\frac{(8x - 8)}{3\sqrt[3]{(4x^2 - 8x + 5)^2}}$

2. Sea $y = \left[\frac{x^2 + 1}{x + 2}\right]^3$ R. $3\left[\frac{x^2 + 1}{x + 2}\right]^2 \left[\frac{x^2 + 4x - 1}{(x + 2)^2}\right]$

3.5. Segunda derivada

En ocasiones es necesario derivar una función una o más veces. Al resultado de dos o mas derivadas en forma consecutiva de una función, se le conoce como derivada de orden superior y se representa de la siguiente forma:

$$\frac{d^n y}{dx^n} \quad ; \quad f^n(x) \quad ; \quad y^n$$

Ejemplo:

a. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 6$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 0$$

Las derivadas de orden superior, son también iguales a cero.

b. $f(t) = \sqrt{t^2 + 1}$

Solución:

$$\frac{dt}{dy} = t(t^2+1)^{-1/2}$$

$$\frac{d^2t}{dy^2} = (t^2+1)^{-3/2}$$

$$\frac{d^3t}{dy^3} = -3t(t^2+1)^{-5/2}$$

Problemas propuestos:

1. $f(x) = e^{3x}$ encontrar la primera y segunda derivada.

R. $3e^{3x}$, $9e^{3x}$

2. $f(x) = \log\left(\frac{3}{x}\right)$ encontrar la primera y segunda derivada.

R. $-\frac{1}{x}\log e$; $\frac{1}{x^2}\log e$

Funciones crecientes y decrecientes

Función creciente

Definición

Se dice que la función es creciente en un intervalo I, si para cualesquiera x_1 y x_2 dentro del intervalo, $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) < f(x_2)$. Si la primera derivada de f es positiva en todo un intervalo entonces la pendiente será positiva y f será una función creciente en el intervalo.

Función decreciente

Definición

Se dice que la función es decreciente en un intervalo I, si para cualesquiera x_1 y x_2 dentro del intervalo, $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) > f(x_2)$. Si la primera derivada de f es negativa en todo un intervalo entonces la pendiente será negativa y f será una función decreciente en el intervalo.

Ejemplos:

1.

En $f(x) = 5x^2 - 20x + 3$ determinar los intervalos en que f puede describirse como:

Función creciente.

Función decreciente.

La función no es creciente ni decreciente.

Encontrar la primera derivada:

$$f(x) = 5x^2 - 20x + 3$$
$$f`(x) = 10x - 20$$

a.

f será creciente cuando f\`(x)>0 o cuando:

$$10x - 20 > 0$$
$$10x > 20$$
$$x > 20/10$$
$$x > 2$$

b.

f será decreciente cuando f\`(x)<0 o cuando:

$$10x - 20 < 0$$
$$10x < 20$$
$$x < 2$$

c.

f no será creciente ni decreciente cuando f\`(x) = 0 o cuando:

$$10x - 20 = 0$$
$$10x = 20$$
$$x = 2$$

2. En $f(x) = 2x^2 + 10$ determinar los intervalos en que f puede describirse como:

Función creciente.

Función decreciente.

La función no es creciente ni decreciente.

Encontrar la primera derivada:

$$f(x) = 2x^2 + 10$$
$$f`(x) = 4x$$

a.

f será creciente cuando f`(x)>0 o cuando:

$$\mathbf{4}\boldsymbol{x} > \mathbf{0}$$
$$\boldsymbol{x} > \mathbf{0/4}$$
$$\boldsymbol{x} > \mathbf{0}$$

b.

f será decreciente cuando f`(x)<0 o cuando:

$$\mathbf{4}\boldsymbol{x} < \mathbf{0}$$
$$\boldsymbol{x} < \mathbf{0/4}$$
$$\boldsymbol{x} < \mathbf{0}$$

c.

f no será creciente ni decreciente cuando f`(x) = 0 o cuando:

$$4x = 0$$
$$x = 0$$

3. En $f(x) = x^3 + 6x^2 + 15$ determinar los intervalos en que f puede describirse como:

Función creciente.
Función decreciente.
La función no es creciente ni decreciente.

Encontrar la primera derivada:

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 15$$
$$f`(x) = 3x^2 + 12x$$
$$f`(x) = 3x(x+4)$$

a.

f será creciente cuando f`(x)>0 y cuando f(x)< - 4:

$3x > 0$

$x > 0$

$cuando:$

$x < -4$

b.

f será decreciente cuando - 4< f`(x) <0 o cuando:

$\mathbf{3x < 0}$

$\mathbf{x < 0}$

$\mathbf{cuando:}$

$\mathbf{x > -4}$

c.

f no será creciente ni decreciente cuando f`(x) = 0 y cuando f(x) = -4:

$3x = 0$

$x = 0$

$x + 4 = 0$

$x = -4$

Problemas propuestos:

1. En $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ determinar los intervalos en que f puede describirse como:

Función creciente.
Función decreciente.
La función no es creciente ni decreciente.

R. -α<f(x)<1 creciente, x =1 punto estacionario, 1<f(x)<2 decreciente, x=2 punto estacionario, 2<f(x)<+α, creciente.

2. En $f(x) = 3x^3$ determinar los intervalos en que f puede describirse como:

Función creciente.
Función decreciente.
La función no es creciente ni decreciente.

R. Es creciente para valores positivos, es decreciente para valores negativos y es un punto estacionario en cero.

3.6. Máximos y mínimos

Valores máximos y mínimos utilizando el método de la primera derivada

Criterio de la primera derivada para determinar los máximos y mínimos de una función.

Encontrar la primera derivada de la función y se factoriza hasta obtener los factores de primer grado.
Los factores encontrados en el punto anterior se igualan a cero (cada uno) y se resuelve la ecuación hasta obtener sus raíces, que vienen a ser los valores críticos de la variable o abscisa de un máximo o mínimo
Se realiza un cuadro en el que se toma como base los valores críticos de la variable, se le dan valores menores y mayores, pero vecinos para cada valor crítico de la variable, los cuales se sustituyen en la ecuación importante de la segunda operación, si el cambio de signo es de mas (+) a menos (-) hay un máximo, pero si es de menos (-) a mas (+) es un mínimo, si no hay cambio de signo entonces se tiene un punto estacionario.
Los valores críticos de la variable se sustituyen en la función, obteniéndose las ordenadas de los máximos y mínimos.

Los puntos anteriores son utilizados como un procedimiento para localizar los máximos y mínimos que ocurren en los valores de x para los cuales f(x) y f\` (x) son continuas.

Ejemplos:

a.

1.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 16$$
$$f``(x) = 3x^2 - 12x$$
$$f``(x) = 3x(x-4)$$

2. Valores críticos

3x = 0
x = 0

x - 4 = 0
x = 4

3.

	x	3x (x - 4)	
	-1	(-)(-) = +	
0			Máximo
	1	(+)(-) = -	
	3	(+)(-) = -	
4			Mínimo
	5	(+)(+) = +	

4.
a). Ordenada del máximo

$$f(0) = (0)^3 - 6(0)^2 + 16$$
$$f(0) = 16$$

b). Ordenada del mínimo

$$f(4) = (4)^3 - 6(4)^2 + 16$$
$$f(4) = -16$$

5.
Punto del máximo P(0,16)
Punto del mínimo P(4,-16)

b.

1.

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3$$

$$f`(x) = 12x^3 - 12x^2 = x^2(x-1)$$

2.

Valores críticos

$x^2 = 0$ $\quad$ $x - 1 = 0$

$x = 0$ $\quad$ $x = 1$

3.

	x	$x^2\ (x - 1)$	
	-1	(+)(-) = -	
0			Punto estacionario
	1	No hay signo	
	0	(+)(-) = -	
1			**Mínimo**
	2	(+)(+) = +	

4.

a). Ordenada del máximo

$$f(0) = 3(0)^4 - 4(0)^3$$

$$f(0) = 0$$

b). Ordenada del mínimo

$$f(1) = 3(1)^4 - 4(1)^3$$

$$f(1) = -1$$

5.

Punto Estacionario P(0,0)

Punto del mínimo P(1,-1)

c.

1.

$$f(x) = 2x^3 - 6x + 5$$

$$f`(x) = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1)$$

2.

Valores críticos

$6 = 0$ $x^2 - 1 = 0$

$x_1 = 1$ y $x_2 = -1$

3.

	x	$6\,(x^2 - 1)$	
	0	(-)	
1			Mínimo
	2	(+)	
	-2	(+)	
-1			Máximo
	0	(-)	

4.

a). Ordenada del mínimo

$$f(1) = 2(1)^3 - 6(1) + 5$$

$$f(1) = 1$$

b). Ordenada del máximo

$$f(-1) = 2(-1)^3 - 6(-1) + 5$$

$$f(-1) = 9$$

5.

Punto del máximo P(-1,9)

Punto del mínimo P(1,1)

Resumen

Si la función tiene un máximo relativo o un mínimo relativo en un valor x = a, para el que la primera derivada es continuo, entonces f \`(a) = 0, si sólo si.

Si f \`(a) = 0 no necesariamente debe de ser un máximo relativo o un mínimo relativo en x = a, puede ser un punto estacionario con tangencia horizontal, pero f(x) y f \`(x) son continuas en x = a entonces f \`(a) = 0.

Las condiciones necesarias para que exista un máximo o un mínimo son:

f `(a) = 0
o bien
f `(a) no esta definida

Problemas propuestos:

1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 13$ R. $P_{máx}$(-1,20) y $P_{mín}$(2,7)

2. $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x + 2$ R. $P_{máx}$(-1,14/3) y $P_{mín}$(3,2)

Valores máximos y mínimos utilizando el método de la segunda derivada

La segunda derivada se emplea para determinar en donde una función tiene una concavidad hacia arriba o hacia abajo.

La segunda derivada f` `(a) es la pendiente de la gráfica de f`(x) en el punto x = 0.

La segunda derivada f` `(a) de una función y = f(x) es positiva, se afirma que la curva que representa es cóncava hacia arriba y f`(x) es una función de x creciente en x = a.
La segunda derivada f` `(a) de una función y = f(x) es negativa, se afirma que la curva que representa es cóncava hacia abajo (convexa) y f` (x) es una función de x decreciente en x = a.

Si una función f(x) en un valor x = a para el cual f(x) y f`(x) son continuas.

Geométricamente si f`(a) = 0 y f(x) es cóncava hacia abajo en x =a, entonces f(x) tiene un máximo en a.
Geométricamente si f`(a) = 0 y f(x) es cóncava hacia arriba en x =a, entonces f(x) tiene un mínimo en a.

Si $f(x)$ y $f'(x)$ son continuas en $x = a$ y $f'(a) = 0$, entonces:

Mínimo	Máximo	La prueba no es aplicable
En $x = a$, $f''(a) > 0$	En $x = a$, $f''(a) < 0$	$F''(a) = 0$

Criterio de la segunda derivada para calcular máximos y mínimos.

Obtener la primera derivada y encontrar los factores de primer orden.
Igualar a cero los factores de primer orden y obtener los valores críticos.
Obtener la segunda derivada y sustituir en ellos los valores críticos de la variable y ver si el valor numérico obtenido es positivo ($x > 0$) existe un mínimo, si el valor es negativo ($x < 0$) existe un máximo, cuando el valor obtenido es cero ($x = 0$), el criterio no se aplica y se tiene que regresar al criterio de la primera derivada.

Ejemplos:

a. Encontrar los máximos o mínimos y determinar la concavidad.

1.

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 12$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

$$f'(x) = 6(x^2 - x - 2)$$

$$f'(x) = 6(x+1)(x-2)$$

2.

$x + 1 = 0$	$x - 2 = 0$	$6 = 0$
$x = -1$	$x = 2$	

3.

$$\boldsymbol{f'(x) = 6x^2 - 6x - 12}$$

$$\boldsymbol{f''(x) = 12x - 6}$$

Para $x_1 = -1$

$$f''(x) = 12(-1) - 6 = -18$$ Existe un Máximo.

Para $x_2 = 2$

$$f''(x) = 12(2) - 6 = 18$$ Existe un Mínimo

Es cóncava hacia abajo en $x = -1$.
Es cóncava hacia arriba en $x = 2$.

b. Determinar la concavidad de la función en el punto $x = -2$

1.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

2.

$$f`(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$f``(x) = 6x - 4$$

Para x_1 = -2

$$f``(x) = 6(-2) - 4 = -16$$

$$f``(-2) < 0$$

Existe un Máximo.

Para x_2= 3

$$f``(x) = 6(3) - 4 = 14$$

Existe un Mínimo

Es cóncava hacia abajo en x = -2
Es cóncava hacia arriba en x = 3

c. Obtener los máximos o mínimos y determinar la concavidad.

1.

$$f(x) = x^4$$

$$f`(x) = 4x^3$$

2.

$4x^3 = 0$

x = 0

3.

$$f`(x) = 4x^3$$

$$f``(x) = 12x^2$$

Para x_1 = 0

$$f``(x) = 12(0) = 0$$

No existe máximo o mínimo, la prueba no es aplicable.

a). Valor crítico

si x < 0 ; f\`(x) < 0
si x > 0 ; f\`(x) > 0

Entonces existe un Mínimo

	x	$4x^3$	
0	-1	(-)-	**Mínimo**
	1	(+)	

b). Ordenada del máximo

$$f(0) = (0)^4$$

$$f(0) = 0$$

c)
El mínimo esta en el punto P(0,0)
Es cóncava hacia arriba en x = 0

Problemas propuestos

1. Determinar la concavidad de la función $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, por el método de la segunda derivada. R. P(1/3,2/3), cóncava hacia arriba.

2. Determinar la concavidad de la función $f(x) = -4x^3 + 3x^2 + 18x$, por el método de la segunda derivada. R. P(3/2,20.25), cóncava hacia arriba; P(-1,-11) cóncava hacia abajo.

3. Determinar la concavidad de la función $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 6x - 20$, por el método de la segunda derivada. R. P(2,-14), cóncava hacia abajo

RAZÓN DE CAMBIO PROMEDIO

Definición
Suponga que y es una función de x, $y = f(x)$. Correspondiendo a un cambio de x a $x + \Delta x$, la variable (y) cambia a una cantidad $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Así el cociente de diferencias es:

$$\frac{cambio\ en\ y}{cambio\ en\ x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ésta representa la razón de cambio promedio de y con respecto a x.

RAZÓN INSTANTÁNEA DE CAMBIO

Conforme Δx tienda a cero, la razón de cambio promedio tiende a lo que intuitivamente se llama razón instantánea de cambio de (y) con respecto a x, y el cociente de diferencias tiende a la derivada $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, por lo tanto la razón instantánea de cambio de (y) con respecto a x es precisamente la derivada $\frac{dy}{dx}$, o

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

Problemas de Aplicación.

La derivada de una función es una herramienta que permite medir la razón de cambio de una cantidad con respecto a otra. Algunas aplicaciones son en el área económico-administrativo como es el caso del análisis marginal (utilidad, ingreso, costo).

Ejemplo:

1.
Un estudio de productividad sobre el turno matinal en una fabrica indica que un trabajador medio que llega al trabajo a las 8:00 a.m. habrá montado
$F(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x$ aparatos de sonido digitales x horas después.

a. Determine una fórmula para el ritmo al que el trabajador estará montando aparatos de sonido digitales después de x horas.

$$\frac{dF}{dx} = -3x^2 + 12x + 15$$

b. ¿A que ritmo estará montando los aparatos de sonido el trabajador a las 9:00?

$$\frac{dF}{dx} = -3(1)^2 + 12(1) + 15 = 24 \quad aparatos\ de\ sonido\ digitales \Big/ hora$$

c. ¿Cuántos aparatos de sonido montará realmente el trabajador entre 9:00 y 10:00am?

$\Delta F(x) = F(x_2) - F(x_1) = 26$ aparatos de sonido digitales

La gerencia de la compañía de llantas "Azteca", ha determinado que la función de demanda semanal de sus llantas Gran Azteca, está dada por:
P = f(x) = 144 - x^2 , donde P se mide en pesos y x en unidades de producción.

a. Encontrar la razón promedio de cambio en el precio unitario de una llanta.

Respuesta: $$\frac{dp}{dx} = -2x - h$$

La razón del cambio instantáneo del precio unitario de una llanta cuando la cantidad demandada es x unidades.

Respuesta: $$\frac{dp}{dx} = -2x$$

3.7. Aplicaciones de la derivada

COSTO MARGINAL

Se define como el cambio en el costo total C(x) debido al incremento de una unidad en la producción y se escribe como:

$$C'(x) = \frac{dc}{dx}$$

INGRESO MARGINAL

El ingreso marginal es el cambio en el ingreso total R(x) por un incremento de una unidad en la demanda y se representa por:

$$R'(x) = \frac{dr}{dx}$$

COSTO PROMEDIO MARGINAL

Al costo total dividido entre la cantidad producida que es la razón C (x)/x, y ésta representada el costo promedio por unidad producida.

A la derivada de la razón C (x)/x, con respecto a x se le llama costo promedio marginal y se representa como:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{C(x)}{x}\right) = \frac{1}{x}\left[C'(x) - \frac{C(x)}{x}\right]$$

La expresión anterior indica el costo promedio por articulo en la cantidad total producida.

Ejemplos:

1. El costo total de producir un articulo (x) esta dado por:
$C(x)= 0.25x^2 +40x+100$ pesos, el precio de venta de las x unidades esta dado por la ecuación $p(x)= 120\text{-}0.5x$ pesos por unidad.

Encontrar el costo marginal
Calcular el ingreso marginal
¿Cuál es el costo marginal de la venta de 14 unidades?
d) ¿De cuánto es el ingreso marginal que se obtiene de la venta de 14 unidades?

Solución:

La ecuación del costo total es:

$$C(x)= 0.25x^2+40x+100$$

La primera derivada nos da el costo marginal

$$C'(x)= 0.5x+40$$

El precio de venta esta dado por la ecuación p(x)=120-0.5x , al venderse x unidades se expresa como:

$$R(x) = x[p(x)] \qquad\qquad R(x) = x(120 - 0.5x)$$

Al encontrar la primera derivada obtenemos el ingreso marginal

R'(x)= 120-x

De la ecuación de costo marginal del inciso "a", se obtiene:

C' (14) = 0.5 (14) + 40 = 47 pesos

d) El ingreso marginal de la venta de 14 unidades

$$R'(x) = 120 - x$$
$$R'(14) = 120 - 14$$
$$R(14) = 106$$

El ingreso obtenido al vender 14 unidades es 106 pesos.

Encontrar el costo promedio marginal de la siguiente ecuación; cuando x = 150

$$C(x) = 0.003x^3 - 0.5x^2 + 20x + 1500$$
$$C'(x) = 0.009x^2 - 0.5x + 20$$
$$C'(150) = 147.5$$
$$C(150) = 3375$$

COSTO PROMEDIO MARGINAL

$$\frac{1}{x}\left[C`(x) - \frac{C(x)}{x}\right] = \frac{1}{150}\left[147.5 - \frac{3375}{150}\right] = 0.8$$

Así, cuando x = 150, el costo promedio por unidad aumenta en 0.8 por cada unidad adicional producida.

Utilidad Marginal[3]

2. Un fabricante de calzado produce zapatos para hombres y mujeres. Si se producen x zapatos para caballeros, y zapatos para dama a la semana, entonces la ecuación de transformación del producto es de $2x^2 + y^2 = 25$. la utilidad es de $ 20 por cada par de zapatos.

---

[3] Problemas con modificaciones del libro de Jagdish C. Ayra/Robin W. Lander, Matemáticas Aplicadas a la Adminsitación y la Economía, tercera edición, Prentice Halll, México 1992, pp. 545, 546 y 547.

Calcular la utilidad marginal con respecto a x, cuando x toma el valor de 2.

Solución:

La ecuación de utilidad semanal u en miles de pesos es:

$$u = 20x + 20y$$

la ecuación de transformación del producto se expresa como:

$$2x^2 + y^2 = 25$$
$$y = \sqrt{25 - 2x^2}$$

Se expresa u en términos de x como:

$$u = 20x + 20\sqrt{25 - 2x^2}$$

La utilidad marginal con respecto a x no es otra cosa que la derivada du / dx, ésta mide el incremento en la utilidad por unidad de incremento en x cuando x es la producción de calzado de caballero, este incremento es muy pequeño.

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left[20x + 20(25 - 2x)^{1/2}\right]$$
$$\frac{du}{dx} = 20 + 20\frac{d}{dx}\left(25 - 2x^2\right)^{1/2} \quad ------(1)$$

es necesario utilizar la regla de la cadena para derivar el segundo término.

$$\frac{du}{dx} = (25 - 2x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(25 - 2x^2)^{\frac{-1}{2}}\frac{d}{dx}(25 - 2x^2)$$
$$\frac{du}{dx}(25 - 2x^2)^{\frac{1}{2}} = -2x(25 - 2x^2)^{-1/2}$$

se sustituye este resultado en la expresión (1).

$$\frac{du}{dx} = 20 + 20\frac{d}{dx}(25 - 2x^2)^{1/2}$$
$$\frac{du}{dx} = 20 + 20\left[-2x(25 - 2x^2)^{\frac{-1}{2}}\right]$$
$$\frac{du}{dx} = 20 - 40x\left(25 - 2x^2\right)^{\frac{-1}{2}}$$

si x =2, el valor de y es:

$$y = \sqrt{25 - 2x^2} = \sqrt{25 - 2(4)} = \sqrt{17} = 4.1$$

La empresa produce 2000 pares de zapatos para caballero y 4100 pares de zapatos para dama por semana.

La utilidad semanal es:

$$u = 20(x + y) = 20(2 + 4.1) = 122$$

La utilidad marginal es:

$$\frac{du}{dx} = 20 - 40(2)[25 - 2(4)]^{-1/2}$$

$$\frac{du}{dx} = 0.597$$

Un incremento de miles de pares de zapatos para caballero producen un incremento aproximado de 0.6 miles de pesos en la utilidad.

3. La función del costo es c(x) = 3500+ 25x y la ecuación de demanda de un articulo es: p + 0.3x=86

Encontrar la ecuación de la utilidad marginal
Calcular la utilidad marginal cuando se producen y venden 50 unidades.

La función de ingreso es R(x) = x p

$$R(x) = x(86 - 0.3x)$$

$$R(x) = 86x - 0.3x^2$$

De la ecuación de utilidad

$$U_{(x)} = R(x) - C(x)$$

$$U(x) = 86x - 3x^2 - (3500 + 25x)$$

$$U(x) = 61x - 0.3x^2 - 3500$$

La utilidad marginal es:

$$U'_{(x)} = 61 - 0.6x$$

Cuando se producen y venden 50 artículos

$$U`(x) = 61 - 0.6x$$
$$U'(50) = 61 - 0.6x$$
$$U`(50) = 31$$

El resultado indica que cuando se producen 50 unidades hay una utilidad de $31 por unidad adicional.

Costo Marginal

4. Suponga que el fabricante de cierto artículo descubre que a fin de producir x de estos artículos a la semana, el costo total en dólares está dado por:
C = 200 + 0.03x^2. Por ejemplo, si se producen 100 artículos a la semana, el costo total en dólares está dado por C = 200 + 0.03$(100)^2$ = 500. El costo promedio al producir 100 artículos es 500/100 = $5.

$$-2x(25-2x^2)^{\frac{-1}{2}}$$

$$\begin{aligned} C + \Delta C &= 200 + 0.03(100 + \Delta x)^2 \\ &= 200 + 0.03\,[10,000 + 200\,\Delta x + (\Delta x)^2] \\ &= 200 + 300 + 6\,\Delta x + 0.03\,(\Delta x)^2 \\ &= 500 + 6\,\Delta x + 0.03\,(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

Por consiguiente, el costo extra determinado por la producción de los artículos adicionales es:

$$\Delta C = (C + \Delta C) - C = 500 + 6\Delta x + 0.03\,(\Delta x)^2 - 500$$
$$\Delta C = 6\,\Delta x + 0.03\,(\Delta x)^2$$
$$\Delta C = \Delta x\,(6 + 0.3\,\Delta x)$$

En consecuencia, el costo promedio por artículo de las unidades extras es:

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = 6 + 0.03\,\Delta x$$

Si la producción crece de 100 a 150 artículos por semana (de modo que el Δx = 50), se sigue que el costo promedio de los 50 artículos adicionales es igual a 6 + 0.03 (50) = $7.50 por cada uno. Si el incremento es de 100 a 110 (de modo que Δx = 10), el costo promedio extra de los 10 artículos es igual a $6.30 por cada uno.

Definimos el costo marginal como el valor límite del costo promedio por artículo extra cuando este número de artículos extra tiende a cero. Así, podemos pensar del costo marginal como el costo promedio por artículo extra cuando se efectúa un cambio muy pequeño en la cantidad producida. En el caso anterior:

$$\text{Costo marginal} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6 + 0.03\,\Delta x) = 6$$

Regla de la cadena

5. Un importador de café mexicano estima que los consumidores locales comprarán aproximadamente $D(p)=\frac{4.374}{p^2}$ kilogramos de café por semana cuando el precio sea de p pesos por kilogramos.

Se estima que dentro de t semanas, el precio del café mexicano será de $P(t)=0.02t^2+0.1t+6.0$ pesos el kilogramo. ¿A qué ritmo estará cambiando la demanda de café dentro de 10 semanas?

La demanda, ¿Estará creciendo o decreciendo?

$$\frac{dD}{dp}=-\frac{8.748}{p^3} \qquad \frac{dp}{dt}=0.04t+0.1$$

donde $$\frac{dD}{dt}=\frac{dD}{dp}*\frac{dp}{dt}=\frac{-8.748}{(0.02t^2+0.1t+6)^3}$$

Cuando t = 10 semanas $\frac{dD}{dt}=\mathbf{-0.012}$

Por lo tanto la demanda esta decreciendo a un ritmo de 0.012 kilogramos por semana.

Problemas Propuestos:

1. Se estima que dentro de t años, la población de una cierta comunidad será de $P(t)=20-\frac{6}{t+1}$ en miles de habitantes. Un estudio ambiental indica que el nivel medio diario de contaminantes en el aire será de $C(p)=0.5\sqrt{p^2+p+58}$ en porcentaje.

a) Encuentre el ritmo al que el contaminante está cambiando con respecto al tiempo dentro de 2 años.

R. $\frac{dc}{dt}=0.31\%$

2. La ecuación de demanda para el producto de un monopolista es $P=400-2q$ y que la función de costo es $C=0.2q^2+4q+400$ donde q es le número de unidades de producción. Y P como C esta expresado en pesos.

a) Determine el nivel de producción en donde se maximizan las utilidades.
b) Determine la utilidad máxima
c) Determine el precio al cual ocurren las utilidades máximas.

R. a). $q=90.0$ b). $u=\$17420$ c). $P=\$220$

3. Suponga que $P = 100 - \sqrt{q^2 + 20}$ es una ecuación de demanda para el producto de un fabricante.

a)Determine la tasa de cambio de P con respecto a q

b)Determine la función de ingreso marginal.

R. a) $\dfrac{dP}{dq} = -\dfrac{q}{\sqrt{q^2 + 20}}$ b) $\dfrac{d\,\mathrm{Im}\,g}{dq} = 100 - \dfrac{q^2}{\sqrt{q^2 + 20}} - \sqrt{q^2 + 20}$

4. CÁLCULO INTEGRAL

OBJETIVOS

Entender el concepto de integral.
Distinguir entre integral indefinida y definida.
Calcular la integral indefinida.
Calcular la integral definida.

CONTENIDO:

4.1 Antiderivadas
4.2 Integral indefinida
4.3 Reglas de la integraciòn
4.4 Integraciòn por sustituciòn
4.5 Integraciòn por partes
4.6 Integral definida
4.7 Integral por sustitución
4.8 Integraciòn por partes
4.9 Aplicaciòn de la integral

CÁLCULO INTEGRAL.

INTRODUCCIÓN

Empecemos primero por plantear el concepto de integral en forma general y más adelante se estudiará a la integral indefinida y definida.

La integral de una función f se denota como:

$$\int f(x)\, dx$$

Donde:

f(x) función a integrar o integrando
dx diferencial de la variable x,
$\int$ signo de integración

4.1. Antiderivadas

La integral tiene muchas interpretaciones y aplicaciones, se mencionan algunas de éstas:

Antiderivada
La integral es la operación contraria a derivar y se le llama antiderivada.

Ejemplo:

1. La derivada de la función x es 1, dx (x) = 1

Por lo tanto la antiderivada ó integral de 1 es:

$$\int 1\, dx = x + C$$

en donde "C" es una constante de integración que puede tomar cualquier valor, así decimos que:

$F(x) = x + 3$
$F(x) = x + 2$
$F(x) = x + 1$
$F(x) = x + 0$
$F(x) = x - 1$

Todos los casos anteriores son antiderivadas de la función f(x) =1, entonces se puede afirmar que una función f es una antiderivada de f en un intervalo, si:

$$F'(x) = f(x)$$

Las funciones F(x) = x + C representan una familia de rectas, todas ellas con pendiente igual a 1.

2: $\int 2x = x^2 + C$

al derivar la función $f(x) = x^2$,obtenemos como resultado 2x.

Hasta aquí podemos concluir que si conocemos la derivada de una función conocemos su antiderivada o integral también.

4.2. Integral indefinida

La integral indefinida de cualquier función f con respecto a x es una antiderivada indefinida (arbitraria) de f, y se denota como: $\int f(x)dx$

Se afirma que todas las antiderivadas de f difieren sólo en una constante.

Formalicemos lo hasta aquí visto.

La antiderivada general de f(x) es: F(x) + C

por lo tanto

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$

Ejemplo:

a) $\int 5dx = 5\int dx = 5x + C$

b) $\int 3x^2dx = 3\int x^3dx = 3\left[\frac{x^3}{3} + C\right] = x^3 + C$

c) $\int (1-x)dx = \int dx - \int xdx = x - \frac{x^2}{2} + C.$

4.3. Reglas de integraciòn

Algunas de las propiedades de la integral definida.

Si tenemos una función que se está multiplicando por una constante; podemos colocar a la constante fuera de la integral.

En forma general:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

Ejemplo:

$$\int_2^4 6x^3dx = 6\int_2^4 x^3dx = 6\left(1/4\,x^4\right)\Big|_2^4 = 6\left[1/4(4)^4 - 1/4(2)^4\right] = 360$$

Si k es cualquier constante, entonces:

$$\int_a^b kdx = k(b-a)$$

Ejemplo:

$$\int_2^4 2xdx = \left(2x\right)\Big|_2^6 = 2(6-2) = 8$$

Si estamos calculando la integral de la suma o resta de 2 funciones:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)$$

Ejemplo:

$$\int_0^3 \left(x^2 + x^3\right)dx = \int_0^3 x^2dx + \int_0^3 x^3dx = 1/3(x^3)\ \Big|_0^3 + 1/4(x^4)\ \Big|_0^3$$
$$= 1/3\left[(3)^3 - (0)^3\right] + 1/4\left[(3)^4 - (0)^4\right] = 9 + 20.25 = 29.25$$

La inversa del orden de los límites de integración cambia el signo de la integración.

$$\int_a^b F(x)dx = -\int_a^b F(x)dx$$

Sí el límite superior de integraciones es igual al límite inferior de integración, el valor de la integración definida es cero.

$$\int_a^b F(x)dx = F(a) - F(a) = 0$$

La integral definida puede expresarse como la suma de subintegrales.

$$\int_a^c F(x)dx = \int_a^b F(x)dx + \int_b^c F(x)dx \qquad a \leq b \leq c$$

FÓRMULAS BÁSICAS DE INTEGRACIÓN

1. $\int dx = x + C$

2. $\int kdx = kx + C$

3. $\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$

4. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

5. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

6. $\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{2}dx = Ln|x| + C$ $\qquad$ x ≠ 0

7. $\int e^x dx = e^x + C$

4.4. Integración por sustituciòn

$$\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C$$

$$\int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = \frac{x^{-4}}{-4} + C = \frac{-1}{4x^4} + C$$

$$\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{1/3+1}}{1/3+1} + C = \frac{x^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3}{4} x^{4/3} + C$$

$$\int x^3 \sqrt{x} dx = \int x^3 x^{1/2} dx = \int x^{7/2} dx = \frac{x^{7/2+1}}{7/2+1} + C = \frac{2}{9} x^{9/2} + C$$

$$\int x\left(x + x^5\right)dx = \int \left(x^2 + x^6\right)dx = \int x^2 dx + \int x^6 dx =$$
$$\boldsymbol{\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} + C = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{7}x^7 + C}$$

6. $\int \left(2 + y^2\right)^2 dx = \int (4 + 4y^2 + y^4)dy = 4\int dy + 4\int y^2 dy + \int y^4 dy = 4y + \frac{4}{3}y^3 + \frac{y^5}{5} + C$

$$\int \left(3x^5 + 4x^{3/2} - 2x^{-1/2}\right)dx = 3\int x^5 dx + 4\int x^{3/2} dx - 2\int x^{-1/2} dx =$$

$$= \frac{3x^6}{6} + \frac{4x^{5/2}}{5/2} - \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{1/2} + C \ = \frac{1}{2}x^6 + \frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}} - 4x^{\frac{1}{2}} + C$$

4.5. Integraciòn por partes

Este método permite resolver un gran número de integrales no inmediatas.

1. Sean *u* y *v* dos funciones dependientes de la variable *x*; es decir, *u = f(x),*

v = g(x).

2. La fórmula de la derivada de un producto de dos funciones, aplicada a $f(x) \cdot g(x)$, permite escribir,

$d(f(x) \cdot g(x)) = g(x) \cdot f'(x)dx + f(x) \cdot g'(x)dx$

3. Integrando los dos miembros,

$$\int d(f(x)\cdot g(x)) = \int g(x)\cdot f'(x)dx + \int f(x)\cdot g'(x)dx$$

De la misma manera que $\int dx = x$, también $\int d(f(x)\cdot g(x)) = f(x)\cdot g(x)$.

Por tanto, $f(x)\cdot g(x) = \int g(x)\cdot f'(x)dx + \int f(x)\cdot g'(x)dx$. De aquí se obtiene que:

$$\int f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int g(x)\cdot f'(x)dx$$

Ésta no es la fórmula usual de la integración por partes. Puesto que $u = f(x)$, $du = f'(x)dx$, y al ser $v = g(x)$, $dv = g'(x)dx$. Llevando estos resultados a la igualdad anterior,

$$\int u\ dv = u\cdot v - \int v\ du$$

4.6. Integral definida

La integral definida de una función f(x) entre x = a y x = b se denota como:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Se puede interpretar como el área de la región limitada por la gráfica y = f(x) y las rectas x = a, x = b y el eje "x".
Los valores a y b reciben el nombre de límite inferior y superior de integración respectivamente.

Una definición más precisa es mencionar que el área bajo una gráfica de una función continua, puede expresarse como la integral definida de F(x) sobre el intervalo de a hasta b escrito matemáticamente como:

$$\int_a^b F(x)dx = \frac{lím}{x \to \infty} \sum_{i=1}^{n} F(x)\Delta xi$$

Al contrario de la integral indefinida que es un conjunto de funciones que contiene todas las antiderivadas de F(x), la integral definida es un número real que puede ser evaluado empleando el "teorema fundamental del cálculo" que establece que el valor numérico de la integral definida de una función continua F(x) sobre el intervalo de a hasta b está dado por la antiderivada F(x)+C evaluada en el límite superior de integración b, menos la misma antiderivada F(x)+C evaluada en el límite inferior de integración a, con C común a ambos, la constante de integración se elimina en la sustracción matemática expresada.

Donde el símbolo $\Big|_a^b$, $\Big]_a^b$, o $[....]_a^b$ indican que los límites de b y a deben sustituirse sucesivamente para x.

Ejemplo:

Calcular $\int_0^3 (x-1)dx$

Primero el cálculo del área.
El concepto de antiderivada; y la pregunta que plantea es ¿qué función al derivarla da como resultado (x – 1)?

y se obtiene que:

$$\int_0^3 (x-1)dx = \int_0^3 xdx - \int_0^3 dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_0^3$$

$$= \left[\frac{1}{2}(3)^2 - (3)\right] - \left[\frac{1}{2}(0)^2 - 0\right]$$

el resultado es: $\int_0^3 (x-1)dx = \frac{3}{2}$

4.7. Integración por sustituciòn

$$\int_2^4 3x^2dx = 3\int_2^4 x^2dx = 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^4 = (4)^3 - (2)^3 = 56$$

$$\int_4^{36} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_4^{36} x^{\frac{-1}{2}}dx = \left[\frac{x^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1}\right]_4^{36} = \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_4^{36}$$

$$= 2(36)^{\frac{1}{2}} - 2(4)^{\frac{1}{2}}$$

=12 – 4 = 8

c) $\int_1^5 3x^{-1}dx = 3\int_1^5 x^{-1}dx = 3[\ln x]_1^5 = 3\ln 5 - 3(\ln 1)$

=3(ln 5) = 4.82

d) $\int_0^1 e^{\frac{t}{2}} dt = \left[2e^{t/2}\right]_0^1 = 2e^{\frac{1}{2}} - 2e^0 = 2(e^{\frac{1}{2}} - 1)$

4.8. Integración por partes

Este método consiste en identificar *u* con una parte de la integral y *dv* con el resto, con la pretensión de que al aplicar la fórmula obtenida, la integral del segundo miembro sea más sencilla de obtener que la primera. No hay, y éste es el mayor problema de este procedimiento, una regla fija para hacer las identificaciones más convenientes. La resolución de un buen número de problemas es el mejor camino para adquirir la técnica necesaria.

No obstante, se suelen identificar con *u* las funciones de la forma x^m si *m* es positivo; si *m* es negativo, es preferible identificar con *dv* a $x^m dx$. También suelen identificarse con *u* las funciones *ln x, arc senx, arc tg x* y con *dv*, $e^x dx$, *sen x dx, cos x dx,* etc.

Antes de empezar a practicar este método se ha de tener presente que al hacer la identificación de *dv*, ésta debe contener siempre a *dx*.

Ejercicio: integración por partes

ðð ðððððððððððððððððððð

① Calcular $\int ln\ x\ dx$

Resolución:

Éste es uno de los casos más sencillos; la integral consta de una sola función,

ln x.

• Haciendo $u = ln\ x$, y diferenciando, $du = \frac{1}{x} dx$

Necesariamente, $dv = dx$. Integrando ambos miembros, $\int dv = \int dx$. Es decir, $v = x$.

• Aplicando la fórmula, $\int ln\ x\ dx = x\ ln\ x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x\ ln\ x - x + C$

② Calcular $\int sen^2 x\ dx$

Resolución:

Se puede resolver efectuando cambios distintos:

a) ð La identificación, en este caso, puede ser $u = sen\ x$ y $dv = sen\ x\ dx$

ð De $u = sen\ x$ se deduce, diferenciando, que $du = cos\ x\ dx$.

• De $dv = sen\ x\ dx$, integrando, $\int dv = \int sen\ x\ dx$, es decir, $v = -cos\ x$

• Aplicando la fórmula, $\int u\ dv = u \cdot v - \int v\ du$,

$$\int sen^2 x\ dx = sen\ x\ (-cos\ x) - \int (-cos\ x)\ cos\ x\ dx = -sen\ x \cdot cos\ x + \int cos^2 x\ dx$$

Puesto que $cos2x = 1 - sen2x$,

$$\int sen^2 x\ dx = -sen\ x\ cos\ x + \int (1 - sen^2 x)dx = -sen\ x\ cos\ x + \int dx - \int sen^2 x\ dx$$

$$\int sen^2 x\ dx = -sen\ x\ cos\ x + x - \int sen^2 x\ dx$$

Al volver a obtener en el segundo miembro la integral de partida puede llegarse a la conclusión de no haber avanzado en el propósito de calcular la integral. No es

así en este caso, pasando al primer miembro $-\int sen^2 x\ dx$, se obtiene

PROBLEMAS PROPUESTOS

$\int 15x^{-1}dx$	R. $15\ln lxl + C$
$\int 25e^{-5x}dx$	R. $-5e^{-5x} + C$
$\int \frac{2}{x}dx$	R. $Lnx^2 + C$
$\int (20x^4 - 8x^3)dx$	R. $4x^5 - 2x^4 + C$
$\int_2^4 (9x^2 + 6)dx$	R. 180
$\int_1^2 -8x^{-3}dx$	R. –3
$\int_1^9 12\sqrt{x}dx$	R. 208
$\int_0^1 12e^{-4t}dt$	R. 2.94

4.9. Aplicación de la integral

La gerencia de la compañía de equipo para oficina determinó que la función de ingresos marginales diarios asociados con la producción y venta de su sacapuntas de baterías está dada por:

$R'(x) = -0.0006x + 6$

Donde x denota las unidades producidas y $R'(x)$ se mide en dólares por unidad.

Determinar la función de ingresos $R(x)$ asociada con la producción y venta de estos sacapuntas ¿Cuál es la ecuación de demanda que relaciona el precio unitario al mayoreo con estos sacapuntas con la cantidad demandada?

Solución:

La función de ingresos R se encuentra integrando la función de ingresos marginales $R'(x)$. Así,

$$R(x) = \int R'(x)dx = \int (-0.0006x + 6)dx = -0.0006 \int x\, dx + 6\int dx$$
$$= -0.0003x^2 + 6x + C$$

para determinar el valor de la constante "C", hemos de darnos cuenta que los ingresos totales de la empresa son cero cuando el nivel de producción y ventas son nulos; es decir, $R(0) = 0$. Esta condición indica que:

$$R(0) = -0.0003\,(0)^2 + 6(0) + C = 0$$

Por lo tanto: $C = 0$

Así la función de ingresos requerida está dada por:

$$R(x) = -0.0003\,x^2 + 6x$$

Sea "p" el precio unitario al mayoreo de los sacapuntas, entonces:

ingresos $R(x) = p\,x \rightarrow$

precio número de sacapuntas

Despejando:

p = $\dfrac{R(x)}{x} = \dfrac{-0.0003x^2+6x}{x} = -0.0003x+6$

La ecuación de demanda es:

p = -0.0003x + 6

Las tasas de costos e ingresos de cierta operación minera están dados por.

$$C'(t) = 5 + 2t^{\frac{2}{3}} \quad \text{y} \quad R'(t) = 17 - t^{\frac{2}{3}}$$

en donde C y R se miden en millones de pesos y t en años, determine :

¿Qué tanto deberá prolongarse la operación? y
Encuentre la utilidad total que puede obtenerse durante este periodo.
Solución:

a) El instante optimo t, que dará como resultado la utilidad máxima es
el instante en que el costo y el ingreso son iguales es decir:

C′(t)=R′(t)

$$5+2t^{\frac{2}{3}} = 17 - t^{\frac{2}{3}}$$

$$3t^{\frac{2}{3}} = 17-5$$

$$3t^{\frac{2}{3}} = 12$$

$$t^{\frac{2}{3}} = \frac{12}{3}$$

$$t^{\frac{2}{3}} = 4$$

$$t = 4^{\frac{3}{2}} = 8$$

Por lo tanto, la operación deberá mantenerse por t =8 años

b) La utilidad que puede obtenerse durante este periodo de 8 años está dada por:

Utilidad = $\int_0^8 \left[R'(t) - C'(t)\right]dt$

$$= \int_0^8 \left[17 - t^{\frac{2}{3}} - (5 + 2t^{\frac{2}{3}})\right]dt$$

$$= \int_0^8 \left[17 - t^{\frac{2}{3}} - 5 - 2t^{\frac{2}{3}} \right] dt$$

$$= \int_0^8 (12 - 3t^{\frac{2}{3}})\, dt$$

$$= \mathbf{12}t - \frac{\mathbf{3}t^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} \Bigg|_0^8$$

$$= 12t - \frac{9}{5} t^{\frac{5}{3}} \Bigg|_0^8$$

$$= 12(8) - \frac{9}{5}(8)^{\frac{5}{3}}$$

$= 96 - 57.6 = 38.4$ millones de pesos

La función de costo marginal de un fabricante esta dado por la $\frac{dc}{dq} = 0.8q + 4$. Si la producción esta altamente igual a q = 90 unidades por semana ¿Qué tanto costaría incrementar la producción a 110 unidades por semana?

La tasa de cambio del costo es $\frac{dc}{dq}$.

$$C(110) - C(90) = \int_{90}^{110} \frac{dc}{dq} dq = \int_{90}^{110} (0.8q + 4) dq$$

$$= 0.8 \int_{90}^{110} q\, dq + 4 \int_{90}^{110} dq = \frac{0.8q^2}{2} + 4q \Big]_{90}^{110} = 5280 - 3600 = 1680$$

El costo para aumentar la producción de 90 a 110 unidades es $1680.

El valor actual de un flujo continuo de ingresos de $5000 al año durante 10 años al 4% compuesto continuamente esta dado por:

$$\int_0^{10} 5000 e^{-0.04t} dt$$

Calcule el valor actual

$$\int_0^{10} 5000 e^{-0.04t} dt = 5000 \int_0^{10} e^{-0.04t} dt$$

$$= 5000 \left[-\frac{e^{-0.04t}}{0.04} \right]_0^{10} = -83790.0 + 125000$$

valor actual = $ 41210

En estadística, una función de densidad de probabilidad f de una variable x, en donde x toma todos los valores del intervalo $[a,b]$ tiene las siguientes propiedades:

1. $F(x) \geq o$ 2. $\int_a^b F(x)dx = 1$ 3. $P(c \leq x \leq d) = \int_c^d F(x)dx$

Ejemplo:

Suponga que y tiene la función de densidad F(y) = C y en el intervalo $0 \leq y \leq 2.$

Encuentre el valor de la constante C que hace de F(y) una función de densidad de probabilidad.

$$F(y) = \int_0^2 Cydy = 1$$

$$C\int_0^2 ydy = \left. \frac{Cy^2}{2} \right|_0^2 = 1$$

2C=1 $\therefore$ C = $\frac{1}{2}$

Encuentre la probabilidad de $P(1 \leq y \leq 2)$:

$$P(1 \leq y \leq 2) = \int_1^2 \frac{1}{2} ydy = \frac{1}{2}\int_1^2 ydy = \frac{1}{2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^2$$

$$\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(1 \leq y \leq 2) = \frac{3}{4}$$

El tiempo requerido por un grupo de estudiantes de la Facultad de Contaduría para presentar un examen de 1 hora, es una variable aleatoria continua con una función de densidad dada por $F(y) = cy^2 + y$ que se comporta en el intervalo de $0 \leq y \leq 1$.

Determinar el valor de C.

$$F(y) = \int_0^1 [Cy^2 + y]dy = 1$$

$$\left[\frac{cy^3}{3} + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 1$$

$$\frac{C}{3} + \frac{1}{2} = 1$$

$$C = \frac{3}{2}$$

Calcular la probabilidad de que un estudiante termine en menos de media hora.

$$P(o \leq y \leq 0.5) = \int_0^{0.5} \left[\frac{3}{2} y^2 + y \right] dy = \left[\frac{3}{2} \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} \right]_0^{0.5} = 0.1875$$

PROBLEMAS PROPUESTOS[4]

1. La función de costo marginal de un fabricante es $\frac{dc}{dq} = 0.2q + 3.$ Si el costo esta en pesos, determine el costo implicado en un aumento de la producción de 60 a 70 unidades.

R. $160

2. La función de ingresos marginal de un fabricante es $\frac{dr}{dq} = 1000 / \sqrt{100q}$. Si r esta en pesos, obtenga el cambio que se produce en los ingresos totales del fabricante si se aumenta la producción de 400 a 900 unidades. R. $2000

3. Calcule la función de demanda de $\frac{dr}{dq} = \frac{200}{(q+2)^2}$, donde $\frac{dr}{dq}$ función de ingreso marginal.

R. $P = \frac{100}{(q+2)}$

[4] Tomado con modificaciones del libro de Ernest F. Hacusseler. Jr/Richard S. Paul, Matemáticas para Administración y Economía,Grupo Editorial Iberoamerica, México,1998

4. Suponga que $F(x)=\frac{x}{8}$, en donde $0 \le x \le y$. Si F es una función de densidad obtenga:

a) $P(0 \le x \le 1)$,

b) P $(2 \le x \le y)$ R. a) $\frac{1}{16}$, b) $\frac{3}{4}$

5. Suponga que F $(x)=\frac{1}{x}$, en donde $e \le x \le e^2$. Si F es una función de densidad, encuentre $P(3 \le x \le 5.)$

R. $\ln\frac{5}{3}$

5. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer grado

OBJETIVOS

Comprender los conceptos básicos
Distinguir y emplear la simbología
Calcular la operaciones básicas de las ecuaciones diferenciales
Identificar y aplicar las propiedades de la ecuaciones diferenciles

CONTENIDO:

5.1 Conceptos de ecuación diferencial
5.2 Soluciones general y particular
5.3 Ecuaciones diferenciales separables
5.4 Ecuaciones diferenciales de primer orden
5.5 Aplicación de las ecuaciones diferenciales

5.1. Concepto de ecuación diferencial

Concepto.- Una ecuación diferencial es aquella en la cual interviene una derivada de una función desconocida.

Las ecuaciones diferenciales de primer orden implican que la primera derivada de la función se desconoce, mientras que si en la ecuación diferencial aparece la segunda derivada de la función desconocida se trata de una ecuación diferencial de segundo orden. Hay también ecuaciones diferenciales de orden superior.

Resolver una ecuación diferencial implica determinar la función desconocida. Un gran número de leyes científicas, administrativas y de otros campos describen como cambian las cosas y cuando se expresan en forma matemática estas leyes toman la forma de ecuaciones donde intervienen derivadas es decir ecuaciones diferenciales.

5.2. Soluciones general y particular

De la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2}$ determinar:

a) La solución general.

b) la solución particular que satisfaga la condición inicial $y(0) = 2$

Solución:

a) Esta no es una ecuación diferencial simple porque el miembro derecho es una función de x y de y simultáneamente. Se resuelve separando las variables.

Paso 1.- Al separar algebraicamente las variables se obtiene la ecuación:

$$y^2 dy = x dx$$

Paso 2.- Se integran ambos lados:

$$\int y^2 dy = \int x dx \quad \text{lo que resulta:} \quad \frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} + C$$

Paso 3.- Se despeja la variable dependiente “y”:

$$y^3 = \frac{3}{2}x^2 + 3C = \frac{3}{2}x^2 + D$$

(se sustituye $3C$ por D la cual es una constante igualmente arbitraria)

entonces: $$y = \left(\frac{3}{2}x^2 + D\right)^{1/3}$$ siendo esta la solución general de la ecuación diferencial.

b) Se necesita determinar el valor de D que produzca la solución que satisfaga la condición: $y(0) = 2$ por lo que se sustituye x por 0 y y por 2 en la solución general:

$$2=\left(\frac{3}{2}(0)^2+D\right)^{1/3}=D^{1/3}$$ por lo tanto: $D=2^3=8$

Por lo que la solución particular que se busca es:

$$y=\left(\frac{3}{2}x^2+8\right)^{1/3}$$

5.3. Ecuaciones diferenciales separables

Son aquellas que no son simples porque se presentan dos o más funciones simultáneamente. Se resuelven separando las variables correspondientes.

Una ecuación diferencial separable tiene la forma: $\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$

Estas ecuaciones se resuelven separando algebraicamente las "x" y las "y" con el planteamiento siguiente: $\frac{1}{g(y)}dy=f(x)dx$ y se procede a su integración: $\int\frac{1}{g(y)}dy+C_1=\int f(x)dx+C_2$

5.4. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Una ecuación diferencial simple tiene la siguiente forma: $\frac{dy}{dx}=f(x)$ y su solución general es:

$$y=\int f(x)dx+C$$

Al dejar que "C" asuma diferentes valores se obtendrán todas las soluciones posibles. Se puede entonces especificar una solución particular al aplicar las condiciones iniciales indicadas.

Ejemplo 1.- Obtener la solución general de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx}=2x^2-4x^3$$

Solución: $y=\int f(x)dx=\frac{2x^3}{3}-x^4+C$

5.5. Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales

Ejemplo .- El costo de atención medica en el área metropolitana de una gran ciudad ha subido en forma constante a una tasa instantánea del 7.3% anual en los últimos años. Deducir una formula de los costos médicos "y" en función del tiempo "t".

Solución: Este es un problema que conduce a una ecuación diferencial ya que se indica que los costos médicos suben continuamente a una tasa del 7.3% cada año por lo cual la razón instantánea de aumento de "y" es el porcentaje indicado o sea: $\frac{dy}{dt} = 0.073y$

Esta es una ecuación diferencial separable por lo que al separar las variables se obtiene:

$$\frac{1}{y}dy = 0.073dt$$

Al integrar ambos miembros de la ecuación se obtiene: $\int \frac{1}{y}dy = \int 0.073dt$ lo que da como resultado: $\ln y = 0.073t + C$

Al despejar "y" se obtiene: $y = e^{0.073t+C} = e^{C}e^{0.073t} = Ae^{0.073t}$ en donde "A" es una constante positiva.

Es posible determinar el valor de "A" si se conocen los costos médicos por ejemplo en el momento $t = 0$ por lo que "A"$= f(0)$.

Ejemplo 2.- Un automóvil acelera desde el reposo en tal forma que su velocidad es de 10m/s a los "t" segundos después. ¿Que distancia recorrerá en 9 segundos?

Solución: Se puede expresar este problema en forma de una ecuación diferencial. Se requiere determinar la función de posición $s(t)$ del vehículo. El dato con que se cuenta es su velocidad o sea $\frac{ds}{dt}$. Por lo tanto: $\frac{ds}{dt} = 10t$

Esta es una ecuación diferencial que se debe resolver para calcular $s(t)$ por lo que se procede a integrar:

$$s(t) = \int 10tdt = 10\frac{t^2}{2} = 5t^2 + C$$

Esta es la solución general de la ecuación diferencial. Se puede especificar una solución particular para resolver este problema considerando la condición inicial que es $s(0) = 0$.

Sustituyendo en $s(t)$: $0 = s(0) = 5(0)^2 + C = C$ por lo que: $C = 0$ y $s(t) = 5t$

Por consecuencia se determina que el automóvil recorre $s(9) = 5(9)^2 = 455m$ en 9 segundos.

B I B L I O G R A F Í A

Adalid D. C:, Rodríguez F. J., Álgebra Básica soluciones con el paquete Matemáticas, UAM-X, México 2001.

Allen R. A., Álgebra Elemental, cuarta edición, Prentice Hall, México 1998.
Ayra J. y R. Lardner, Matemáticas Aplicadas a la Administración y la Economía, segunda edición, Prentice Hall, México 1985.
Budnick F., Matemáticas Aplicadas a la Administración, Economía y Ciencias Sociales, tercera edición, Mc graw Hill, 1990.
Earl W, S., Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica, segunda edición, Grupo Editorial Iberoamérica, México 1998.
Ernest F.H. Jr. Richard S. Matemáticas para Administración y Economía, segunda edición, Grupo Editorial Iberoamérica, México 1992.
Eslava Ma. E. E., Velasco J. R. Q., Introducción a las Matemáticas Universitarias, Mc Graw Hill, Colombia 1997.
Goban A., Álgebra Elemental, Grupo Editorial Iberoamérica, México 1990.
Kleiman A., Elena K. De Kleiman, Conjuntos Aplicaciones Matemáticas a la Administración, biblioteca didáctica de matemáticas, Noriega Limusa, México 1991.
Jagdish C. A./Robin W. L., Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía, tercera edición, Prentice Hall, México 1992.
Narro R. Ana Elena (coord.), Fundamentos de Algebra, UAM-X, México 1998
National Council of Teachers of Mathematics, Conjuntos 1, Temas de Matemáticas, séptima edición Trillas 1973.
Rees P. K., Sparks F. W., Rees Ch. S., Álgebra, décima edición Mc Graw Hill
Rendón A.T., Rodriguez J.F., Morales A.A., Introducción al Álgebra Lineal y de Matrices Aplicaciones con Excel, UAM-X, México 1998.
Rendón A.T., Rodrìguez J.F., Morales A. A., Haik O. D., Matrices Utilizando Excel, UAM-X, México 2000.
Weber J. Matemáticas para Administración y Economía, Harla, México 1984
William L. P., Álgebra Lineal con Aplicaciones, Mc Graw Hill, México 1990.