:ESTADÍSTICA 1. UNIDAD 1. INTRODUCCIÓN

Temario detallado.

1.1 Concepto y utilidad de la estadística en la contaduría, la administración y la informática.

La estadística agrupa un conjunto de técnicas mediante las que se recopilan, agrupan, estructuran y, posteriormente, se analizan conjuntos de datos. El propósito de la estadística es darles sentido o “carácter” a estos datos es decir, que nos puedan dar una idea de la situación que reflejan para, con base en esta idea, tomar decisiones. Algunos ejemplos nos pueden aclarar este concepto.

A un administrador le entregan en una caja, un listado de computadora de 3000 hojas que contiene el detalle (departamento, cliente, productos vendidos e importe de cada transacción) de las ventas de un mes de una gran tienda departamental. Los datos del listado tal como están, difícilmente le serán útiles para la toma de decisiones; el administrador tendrá que ordenarlos, clasificarlos y concentrarlos para que le sean útiles. Las técnicas que permiten ese ordenamiento, clasificación y concentración son, precisamente, técnicas estadísticas.

En una situación similar, a un auditor le muestran el archivo en el que se encuentran las copias fiscales de las 46,000 facturas que una empresa emitió durante el ejercicio fiscal. Desde luego los datos contenidos en las copias son valiosos para su trabajo de auditoría y, tal vez sean indispensables para fundamentar su opinión de la empresa y, de esa manera, emitir su dictamen. Sin embargo, la información “cruda”, tal como se encuentra en las copias ya mencionadas difícilmente le será útil. Otra vez, como en el caso anterior, será necesario ordenar, clasificar y sumarizar los datos para obtener conclusiones sobre ellos.

En el caso de los licenciados en informática y, dado que su profesión se dedica, precisamente a buscar los mejores medios de procesar la información, es de suyo evidente, que las técnicas (estadísticas) que hacen más eficiente ese trabajo, deben de interesarle.

1.2 Poblaciones y muestras, estadísticos y parámetros.

En nuestro estudio de la realidad, frecuentemente debemos de hacer frente a conjuntos muy grandes de hechos, situaciones, mediciones, etc. A continuación se dan algunos ejemplos:

Si deseamos instalar una cafetería en nuestra facultad, debemos tener muy en claro quienes serán nuestros clientes: pueden ser los estudiantes de la propia facultad, los maestros y el personal administrativo de la misma y tal vez algunos visitantes. Todas estas personas conformarán la población cuyos hábitos de consumo de alimentos y bebidas deseamos conocer.

Cuando un auditor que desea investigar los egresos de una entidad económica deberá estudiar todos los cheques emitidos por ésta. La población que desea estudiar es, por tanto, la de todos los cheques emitidos por el organismo en el periodo que desea investigar.

Un administrador desea estudiar la duración o vida útil de todos los focos producidos por una pequeña fábrica durante un mes. La población de estudio será la de todos los focos producidos durante ese mes.

Podemos ver de los ejemplos anteriores que el concepto de "población", se parece, en algunos casos, a la idea que tenemos de un conjunto de personas (como en la población de un país). Tal es el caso del primer ejemplo. En los otros dos, las poblaciones mencionadas no son de personas, sino de cheques en un caso y de focos en el otro. Podemos decir para generalizar que **una población es el conjunto de <u>todas</u> las mediciones u observaciones de interés para el investigador que realiza un trabajo con un objetivo concreto de conocimiento de la realidad.**

Existen diversas circunstancias por las cuales un investigador no desea o no puede físicamente verificar observaciones en toda la población y se tiene que conformar con estudiar un subconjunto de ellas. Entre estas circunstancias se encuentran las siguientes:

Limitaciones de tiempo. Si deseamos instalar la cafetería del ejemplo ya citado dentro de seis meses y la investigación de los hábitos de consumo de <u>todos</u> los clientes potenciales nos lleva ocho meses, es claro que deberemos resolver nuestra necesidad de información de otra manera.

Limitaciones de recursos. El auditor de nuestro segundo ejemplo podría desear estudiar todos los cheques emitidos, pero la empresa auditada no puede pagar el costo de una revisión tan exhaustiva. Por ello, el auditor debe basar su opinión en una investigación más limitada.

Imposibilidad física. Si el administrador de la fábrica de focos ya mencionada desea saber la duración o vida útil de un foco, lo único que puede hacer es dejarlo prendido constantemente hasta que se funde y registrar el tiempo en el que eso ocurre. Desde luego si sigue este procedimiento con todos los producidos, al final la fábrica no contará con ningún foco para vender.

Cuando por los motivos antes citados otros no es conveniente o, incluso posible, obtener la información que se necesita de toda la población, los investigadores recurren a estudiar una parte de esa población, a la que se llama muestra. **Una muestra es, entonces, cualquier subconjunto de una población.** El estudiante verá en la materia de estadística II diversas maneras de obtener muestras.

A las características de las poblaciones las denominamos **parámetros** y a las características similares de las muestras las denominamos **estadísticos**. Así, la media de la población (la que conocemos con la letra griega mu o μ,) es un parámetro. La media de la muestra, a la que conocemos como x barra o x testada **ojo, no puedo encontrar x testada en el teclado** es un estadístico. La desviación estándar de la población a, la que conocemos como sigma o σ es un parámetro, la desviación estándar de la muestra, a la que denominamos **s**, es un estadístico. Normalmente cuando hacemos estudios con base a muestras, conocemos los estadísticos (los datos de la muestra) y éstos nos sirven para estimar los datos reales de la población a los que conocemos como parámetros. Resumiendo, los parámetros son datos de las poblaciones, en tanto que los estadísticos son datos de las muestras. Los estadísticos nos sirven para tratar de estimar o inferir los parámetros cuando no podemos conocerlos estudiando directamente toda la población..

1.3 Estadística descriptiva y estadística inferencial.

La estadística descriptiva incluye aquellas técnicas que nos permiten el resumen y la descripción de datos. La preparación de tablas, la elaboración de gráficos y las técnicas para el cálculo de los diferentes parámetros de las poblaciones, forman parte de las técnicas de la estadística descriptiva. Los administradores, contadores e informáticos que se han mencionado en los ejemplos arriba citados, harán bien en allegarse de técnicas de estadística descriptiva para resumir y caracterizar sus datos, con el objeto de tomar decisiones correctas.

En México, una vez cada diez años se hace un estudio general de la población del país, que recibe el nombre de “Censo general de población y vivienda”. Este es un estudio muy amplio de estadística descriptiva para conocer diversas características demográficas de los mexicanos. A todos los estudios que se realizan estudiando a todos los elementos de una población se les conoce como estudios censales o censos.

La estadística inferencial comprende un conjunto de técnicas que nos permiten estimar (o inferir y de allí su nombre), las características (frecuentemente los parámetros) de una población con base en una muestra obtenida de ella y, una vez estimados, tomar decisiones sobre esa población. Estas decisiones incluyen un factor de riesgo, dado que las características de la población se infieren aproximadamente pero no se conocen con certeza. Por ello, para la estadística inferencial se utilizan conceptos de probabilidad.

El lector habrá escuchado frecuentemente durante las elecciones federales y locales, que se pronostican los resultados con base en lo que se ha dado en llamar “conteos” rápidos. Estos conteos se realizan registrando los datos de un pequeño conjunto de casillas electorales cuidadosamente seleccionadas. Estos conteos rápidos son un ejemplo de un estudio muestral, es decir, hecho mediante muestras con el objeto de inferir características de toda la población.

1.4 Los datos y los métodos estadísticos.

Los métodos estadísticos que se utilizan, dependen, fundamentalmente del tipo de trabajo que se desee hacer. Si lo que se desea es trabajar con los datos de las poblaciones para representarlos y caracterizarlos de una manera tal que sean útiles, estaremos hablando de métodos de la estadística descriptiva. Si lo que se desea es aproximar las características de una población con base en una muestra, se utilizarán las técnicas de la estadística inferencial. Estas últimas son tema de la materia de Estadística II, que el alumno estudiará posteriormente. En cuanto a las primeras, existe un sinnúmero de ellas. Las principales las podemos agrupar como técnicas de resumen de datos, técnicas de presentación de datos y técnicas de obtención de parámetros.

Las técnicas de resumen nos indican la mejor manera para ordenar y agrupar la información, de manera tal que haga sentido para el usuario, de una manera que los datos en bruto no lo harían. Las técnicas de agrupación de datos y preparación de tablas se incluyen dentro de las técnicas de resumen. Las técnicas de presentación de datos nos permiten obtener una serie de gráficas que, adecuadamente utilizadas nos dan una idea visual e intuitiva de la información que manejamos. El lector recuerda, sin duda, haber visto en algún periódico, gráficas de barras o circulares (llamadas de pie o“pay” por su pronunciación en inglés). Por último, las técnicas de obtención de parámetros nos llevan a calcular números que nos dan una idea de las principales características de la población. En conjunto de las 45 calificaciones que un alumno ha obtenido durante sus estudios profesionales nos pueden dar no mucha idea de su desempeño, pero si obtenemos su promedio (técnicamente llamada media aritmética) y éste es de 9.4, nos damos una clara idea de que es un buen estudiante. Los parámetros son números que nos sirven para representar (hacernos una idea) de las principales características de las poblaciones.

1.5 Los datos estadísticos. Datos discretos y datos continuos.
1.6 Escalas de medición
1.9 El concepto de “variable”.

Los datos estadísticos, el concepto de variable y las escalas de medición son conceptos profundamente relacionados, por lo que se verán conjuntamente en esta sección.

En cualquier estudio estadístico, los datos pueden modificarse de sujeto en sujeto. Si, por ejemplo estamos haciendo un estudio sobre las estaturas de los estudiantes de sexto de primaria en una escuela, la estatura de cada uno de los niños y niñas será distinta, variará. Por ello decimos que la estatura es una variable.

Los datos variables pueden registrarse de diversas maneras, de acuerdo con los objetivos de cada estudio en particular y, conforme a ello podemos decir que podemos tener diferentes escalas de medición:

Escala para datos de tipo nominal.

Son aquellos que no tienen un orden o dimensión preferente o particular. En un estudio de preferencias sobre los colores de automóviles que prefriere un determinado grupo de consumidores, se podrá decir que algunos prefieren el color rojo, otros el azul o el verde, pero no se puede decir que el magenta vaya “después” que el morado o que el azul sea “más grande” (o más chico, pare el caso) que el verde.

Para trabajar adecuadamente con escalas de tipo nominal, cada uno de los individuos, objetos o mediciones debe pertenecer a una y solamente a una de las categorías o clasificaciones que se tienen y el conjunto de esas categorías debe ser exhaustiva, es decir, tiene que contener a todos los casos posibles.

Escala para datos de tipo ordinal.

En esta escala, las variables sí tienen un orden natural (de allí su nombre) y cada uno de los datos puede localizarse dentro de alguna de las categorías disponibles. El estudiante habrá tenido oportunidad de evaluar a algún maestro; las preguntas implican frecuentemente categorías como “siempre, frecuentemente, algunas veces, nunca”. Es fácil percatarse que “siempre” es más frecuente que “algunas veces” y “algunas veces” es más frecuente que “nunca”. Es decir, en las escalas de tipo ordinal se puede establecer una graduación u orden natural para las categorías. No se puede, sin embargo establecer comparaciones cuantitativas entre las categorías. No podemos decir, por ejemplo que “frecuentemente” es el doble que “algunas veces”o que “nunca” es tres puntos más malo que “frecuentemente”.

Para trabajar adecuadamente con escalas de tipo ordinal, debemos recordar que las categorías son mutuamente excluyentes (cada dato puede pertenecer o una y sólo a una de las categorías) y deben ser exhaustivas (es decir, cubrir todos las posibles respuestas).

Escalas numéricas.

Estas escalas, dependiendo del manejo de se le dé a las variables pueden ser discretas o continuas. Las escalas discretas son aquellas que solo pueden aceptar determinados valores dentro de un rango. El número de hijos que tiene una pareja es, por ejemplo un dato discreto. Una pareja puede tener 1, 2, 3 hijos, etc., pero no tiene sentido decir que tienen 2.3657 hijos. Una persona puede tomar 1, 2, 3, 4, etc., baños por semana, pero tampoco tiene sentido decir que toma 4.31 baños por semana. Las escalas continuas son aquellas que pueden aceptar cualquier valor dentro de un rango y, frecuentemente el número de decimales que se toman dependen más de la precisión del instrumento de medición que del valor del dato en sí. Podemos decir, por ejemplo, que el peso de una persona es de 67 Kg.; pero si medimos con más precisión, tal vez informemos que el peso es en realidad de 67.453 Kg. Y, si nuestra báscula es muy precisa podemos anotar un mayor número de decimales.

El objetivo del investigador condiciona fuertemente el tipo de escala que se utilizará para registrar los datos. Tomando el dato de la estatura, éste puede tener un valor puramente categórico. En algunos deportes, por ejemplo, el básquetbol, de determinada estatura para arriba los candidatos a jugador se admiten en el equipo y de esa estatura para abajo no se admiten. La variable estatura tiene solo dos valores “aceptado” y “no aceptado” y es una variable nominal. Esta misma variable, para otro estudio, puede trabajarse con una escala de tipo ordinal: “bajos de estatura”, “de mediana estatura” y “altos”. Si tomamos la misma variable y la registramos por su valor en centímetros, la estaremos trabajando como una variable numérica. Dependiendo de las intenciones del investigador, se le puede registrar como variable discreta o continua (variable discreta si a una persona se le registra, por ejemplo, como de 173 cm., o como de 174cm., y si mide unos milímetros más o menos se redondeará al centímetro más cercano; variable continua si el investigador registra la estatura reportada por el instrumento de medición hasta el límite de precisión de éste. Por ejemplo. 173.345 cm.)

Las escalas de tipo numérico pueden tener una de dos características:

Escalas de intervalo:

Son aquellas en las que el cero es convencional o arbitrario y pueden existir cantidades negativas. Un ejemplo de este tipo de escalas es la de los grados Celsius o centígrados que se usan para medir la temperatura. En ella el cero es el punto de congelación del agua y, sin embargo existen temperaturas más frías que se miden mediante números negativos. En estas escalas podemos hacer comparaciones por medio de diferencias o de sumas. Podemos decir, por ejemplo, que hoy la temperatura del agua de una alberca está cuatro grados más fría que ayer; pero no se pueden hacer comparaciones por medio de multiplicaciones, divisiones o porcentajes, porque este tipo de comparaciones implica divisiones y éstas no tienen sentido en las escalas de intervalo. Si hoy la temperatura ambiente es, por ejemplo, de diez grados, no tiene sentido decir que hace el doble de frío que ayer, pues ayer estaba a veinte grados.

Escalas de razón:

Son aquellas en las que el cero absoluto sí existe. Tal es el caso de los grados Kelvin, para medir temperaturas o, muchas medidas que utilizamos en nuestra vida cotidiana. La estatura de las personas medida en centímetros, por ejemplo, está medida en una escala de razón pues sí existe el cero absoluto (nadie tiene estatura negativa). En el caso de las estaturas si se puede decir que alguien mide el doble (o la mitad) que otra persona cualquiera.

La mayor parte de las herramientas que se aprenden en este curso son válidas para escalas numéricas; algunas lo son para escalas ordinales y unas pocas (muchas de las que se ven en el tema de estadística no paramétrica) sirven para todo tipo de escalas.

1.7 Uso de computadoras en estadística.

Algunas de las técnicas que se ven en este curso (por ejemplo las técnicas de regresión y correlación) y muchas que se ven en cursos más avanzados de estadística, requieren un conjunto de operaciones matemáticas que, con frecuencia no son demasiado difíciles desde el punto de vista conceptual, pero sí son considerablemente engorrosas por el volumen de cálculos que conllevan. Por ello las computadoras, con su gran capacidad para el manejo de grandes volúmenes de información son un poderoso auxiliar. Existen herramientas de uso general como el Excel o el Lotus que incluyen algunas funciones estadísticas y son útiles para muchas aplicaciones. Si se desea, sin embargo, estudiar con mayor profundidad el uso de técnicas más avanzadas, es importante contar con herramientas específicamente diseñadas para el trabajo estadístico. Existen diversos paquetes de software en el mercado que están diseñados específicamente para ello. Entre otros se encuentran el SPSS y el SAS. Recomendamos al estudiante que ensaye el manejo de estas herramientas.

ESTADÍSTICA 1. UNIDAD 2. ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

CONTENIDO.

2.1 Tablas y gráficas

En esta unidad veremos diversas maneras de representar conjuntos muy grandes de datos, para formarnos una idea de sus características. Dos maneras prácticas de lograr esta representación es a través de tablas y de gráficas; mismas que vemos con algún detalle en este apartado. Debemos hacer la advertencia al estudiante de que, tanto en tablas como en gráficas existen un sinnúmero de presentaciones y de ordenamientos y continuamente se inventan otros, por lo que en este material solamente se verán los conceptos y las presentaciones fundamentales.

2.1.1 Tablas.

2.1.1.1. Introducción.

Son formas convencionales de representar información en renglones y columnas. El estudiante recuerda, sin duda, que en Matemáticas 1 estudió un tema llamado “matrices”, que eran conjuntos de números ordenados en renglones y columnas. Las tablas son un uso especial de las matrices. En ellas algunas columnas o renglones pueden no ser estrictamente números sino palabras o conceptos. Pueden tener diversas presentaciones como a continuación se indica.

2.1.1.2 Principales elementos de las tablas.

A continuación se presenta una tabla sencilla, tomada de un ejemplo hipotético. En ella se examinan sus principales elementos y se expresan algunos conceptos generales sobre ellos.

Título. Todas las tablas deben tener un título para que el lector sepa el asunto al que se refiere.

Encabezado. Se refiere a las categorías de datos que se manejan dentro de la propia tabla.

Cuerpo. En él se encuentran los datos propiamente dichos.

Fuente de información. Si los datos que se encuentran en la tabla no fueron obtenidos por el autor del documento en el que se encuentra la misma, es importante indicar de qué parte se obtuvo la información que allí se encuentra.

Estudiantes de la FCA que trabajan
Porcentajes por semestre de estudio*

Semestre que estudian	P o r c e n t a j e	
	Hombres	Mujeres
1	20	15
2	22	20
3	25	24
4	33	32
5	52	51
6	65	65
7	70	71
8	87	88
9	96	95

*Fuente: Perez José, "El trabajo en la escuela", Editorial Académica, México, 19XX

Título

Enacabezado

Cuerpo de la Tabla

Fuente de información

Independientemente de los principales elementos que puede tener una tabla, existen diversas maneras de presentar la información en ellas. No existe una clasificación absoluta de la presentación de las diferentes tablas, dado que, siendo una obra humana, se pueden inventar diversas maneras de presentar información estadística. No obstante lo anterior, se puede intentar una clasificación que nos permita entender las principales presentaciones.

Tablas simples.

Relaciona una columna de categorías con una o más columnas de datos, sin más elaboración. A continuación se presenta un ejemplo de una tabla simple.

FCA. Maestros de las distintas coordinaciones
que han proporcionado su correo electrónico

Administración Básica	23
Administrción Avanzada	18
Matemáticas	34
Informática	24
Derecho	28
Economía	14

Tablas de frecuencias.

Es un arreglo rectangular de información en el que las columnas representan diversos conceptos, dependiendo de las intenciones de la persona que la elabora, pero que tiene, siempre, en una de las columnas, información sobre el número de veces (frecuencia) que se presenta cierto fenómeno. La siguiente tabla es un ejemplo de esta naturaleza. En ella, la primera columna representa las categorías o clases, la segunda las frecuencias llamadas absolutas y la tercera las frecuencias relativas. Esta última columna recibe esa denominación, porque los datos están expresados en relación con el total de la segunda columna. Las frecuencias relativas pueden expresarse en porcentaje, tal como en nuestro ejemplo, o en absoluto (es decir, sin multiplicar los valores por 100). Algunos autores llaman al primer caso “Frecuencia porcentual” en lugar de frecuencia relativa.

Deportes Batista, S.A. de C.V.
Número de bicicletas vendidas por tienda
Primer trimestre de 20XX

Tienda	**Unidades**	**Porcientos**
Centro	55	29.1
Polanco	45	23.8
Coapa	42	22.2
Tlalnepantla	47	24.9
Totales	**189**	**100.0**

Tablas de doble entrada.

En algunos casos, se quiere presentar la información con un mayor detalle. Para ello se usan las tablas de doble entrada. Se llaman así, porque la información se clasifica por medio de dos criterios en lugar de utilizar solamente uno. A continuación se presenta un ejemplo de tabla de doble entrada.

Deportes Batista, S.A. de C.V.
Bicicletas vendidas por modelo y tienda
Primer trimestre de 20XX

	Infantil	**Carrera**	**Montaña**	**Turismo**	**Total**
Centro	13	14	21	7	**55**
Polanco	10	14	11	10	**45**
Coapa	12	11	17	2	**42**
Tlalnepantla	9	8	13	17	**47**
Totales	**44**	**47**	**62**	**36**	**189**

Podemos observar que esta tabla, en la columna de totales presenta una información idéntica a la segunda columna de la tabla anterior. Sin embargo, en el cuerpo de la tabla se desglosa una información más detallada, pues nos ofrece datos sobre los modelos de bicicletas, mismos que el la tabla anterior no teníamos.

Tablas de contingencia.

Un problema frecuente es el de definir la independencia de dos métodos para clasificar eventos. Supongamos que una empresa que envasa leche se desea clasificar los defectos encontrados en la producción tanto por tipo de defecto como por turno en el turno (matutino, vespertino o nocturno) en el que se produjo el defecto. Lo que se desea estudiar es si es cierto que se presenta el caso (la contingencia y de allí el nombre) de que exista una relación entre ambas clasificaciones.¿Cómo se comporta la proporción de cada tipo de defecto de un turno a otro?

En el ejemplo de la empresa que quiere hacer este tipo de trabajo se encontró un total de 312 defectos en cuatro categorías distintas: volumen, empaque, impresión y sellado. La información encontrada se resume en la siguiente tabla.

Lechería La Laguna, S,A.
Tabla de contingencia en laque se clasifican los defectos del empaque de leche por tio de defecto y por turno.

Turno	Volumen		Empaque		Impresión		Sellado		Totales	
Matutino	16	5.13	22	7.05	46	14.74	13	4.17	**97**	**31.09**
Vespertino	26	8.33	17	5.45	34	10.90	5	1.60	**82**	**26.28**
Nocturno	33	10.58	31	9.94	49	15.71	20	6.41	**133**	**42.63**
Totales	**75**	**24.04**	**70**	**22.44**	**129**	**41.35**	**38**	**12.18**	**312**	**100.00**

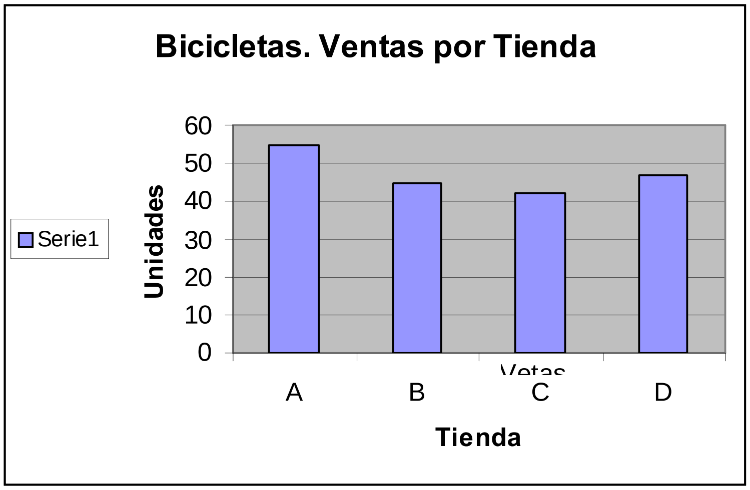
Los números en rojo representan los porcentajes

De la información de la tabla antecedente, podemos darnos cuenta de que el mayor porcentaje de errores se comete en el turno nocturno y que el área en la que la mayor proporción de defectos se da es la de impresión. Como vemos, la clasificación cruzada de una tabla de contingencia puede llevarnos a obtener conclusiones interesantes.

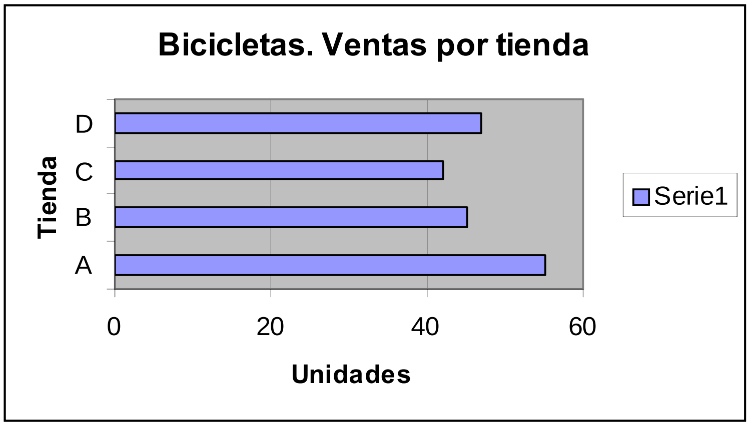
2.1.2 Gráficas

Existe una gran variedad de maneras gráficas de representar la información estadística y diversos paquetes de computación de uso común permiten la obtención de las mismas de una manera cómoda. Por ello, te recomendamos que comentes con tu asesor qué tipos de gráficas considera más interesante estudiar y hacia cuales debes esforzarte más. En los siguientes párrafos mencionamos los tipos más comunes de gráficas.

Columnas.
Este tipo de gráficas nos permite visualizar información de categorías con mucha facilidad



Barras.
Tiene la misma utilidad que las columnas, pero en este caso con un formato horizontal.



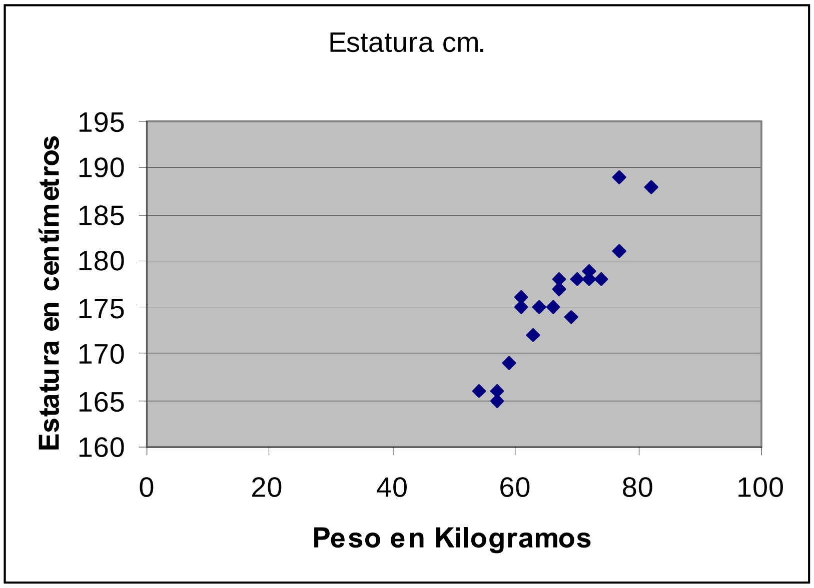
Circular .

Presenta de una manera muy objetiva las proporciones que tiene cada una de las categorías en el total a manera de las tajadas de un pastel.

Diagrama de dispersión.

En este diagrama se presentan dos variables en el mismo plano y los puntos indican el valor del fenómeno de estudio en relación con ambas variables. A continuación se presenta una tabla que relaciona el peso con la estatura de un conjunto de personas y a continuación, se encuentra el diagrama de dispersión que los relaciona.

Sujeto	Peso Kg.	Estatura cm.
1	54	166
2	57	165
3	63	172
4	67	177
5	72	178
6	61	175
7	67	178
8	77	181
9	82	188
10	67	177
11	70	178
12	59	169
13	57	166
14	64	175
15	72	179
16	77	189
17	61	176
18	69	174
19	74	178
20	66	175



En esta gráfica podemos ver de una manera informal que sí existe una relación entre los pesos y las estaturas, pues a mayor estatura corresponde un peso también mayor (las variables están correlacionadas). Este tipo de relaciones entre variables es fácil de apreciar en el diagrama.

2.2 Medidas

Hemos visto que, tanto las tablas como las gráficas, pueden sernos útiles para representar y comprender informacion numérica. Existen, sin embargo, circunstancias en las que ni las tablas ni las gráficas nos dan información suficiente para tomar decisiones. En estos casos debemos procesar nuestra información de diversas maneras para obtener medidas de la misma. A estas medidas se les llama “parámetros” de acuerdo con lo visto en la unidad 1. Se dividen en medidas de posición y medidas de dispersión.

2.2.1 Medidas de posición.

Son aquellas que nos definen (o nos informan) del valor de datos que ocupan lugares importantes en nuestra distribución de datos; las podemos dividir en medidas de tendencia central y otras medidas de posición.

Las medidas de tendencia central son aquellas que nos indican cual es el dato más representativo de una distribución. Las otras medidas de dispersión tienen el obejtivo de localizar diversos puntos de interés, por ejemplo, el punto que divide la distribución en dos partes: a la izquierda (datos más pequeños) el 25% de la información y a la derecha (datos más grandes), el 75% de la información. A este punto se le denomina primer cuartil o Q1.

A continuación daremos las definiciones y algunos ejemplos de las medidas de tendencia central y concluiremos el apartado con las otras medidas de posisición.

Las medidas de tendencia central que se contemplan en este material son: la media aritmética, la mediana y la moda.

Media aritmética.

La media aritmética es el promedio que todos conocemos desde nuestros años e infancia. Se obtiene sumando todos los datos y dividendo el total entre el número de datos. La manera formal de expresar este concepto es la siguiente:

$$\mu = \sum_{i=1}^{N} x_i \,/\, N$$

Esta fórmula nos dice que la media aritmética, que está representada por la letra griega M, se obtiene sumando todos los datos a los que llamamos X subíndice i para, posteriormente, dividir el resultado entre "N", que es el número total de datos con los que se cuenta.

Ejemplo. Las calificaciones de un alumno de administración en los dos primeros semestres de la carrera se listan a continuación: 9, 10, 8, 8, 9, 7, 6, 10, 8, 8,7.

La media aritmética está dada por:

$$\mu = (9 + 10 + 8 + 8 + 9 + 7 + 6 + 10 + 8 + 8 + 7)\,/\,11$$

Haciendo las operaciones encontramos que la media aritmética es de 8.27 aproximadamente.

Mediana.

Es el valor que divide la distribución en dos partes iguales. Para obtenerla se deben de rdenar los datos (puede ser de menor a mayor o viceversa, no importa) y se encuentra el dato medio. En el caso de las calificaciones del estudiante vistas arriba, los datos ordenados tendrían el siguiente aspecto:

6, 7, 7, 8, 8, **8**, 8, 9, 9, 10 ,10

El dato que divide la distribución a la mitad se señala con una flecha. Este dato correponde a la mediana. Como se puede ver a la izquierda del 8 encontramos cinco datos y, a su derecha encontramos otros cinco datos. Este dato es, entonces, el correspondiente a la mediana: Md = 8.

Cuando en lugar de un número non de datos (como en nuestro ejemplo anterior), nos encontramos con un número par de observaciones, lo que se hace es promediar los dos datos medios. El procedimiento se muestra en el siguiente ejemplo:

Las ventas diarias de una pequeña tienda durante una corta temporada vacacional se consignan a continuación. Ya se ordenaron de menor a mayor para facilitar el trabajo posterior:

3,200; 3,500; 3,650: **3,720; 3,750**; 3,810; 3,850; 3,915

Puede verse fácilmente que no hay un dato central que divida la distribución en dos, por ello se toman los dos datos centrales y se promedian. En este caso la mediana es de 3,735, que es la media aritmética de los dos datos centrales.

Moda, es el dato más frecuente de nuestro conjunto. En el caso de las calificaciones del estudiante que se vio arriba, el dato más frecuente es “8”, como se puede ver si repetimos nuestro conjunto de datos.

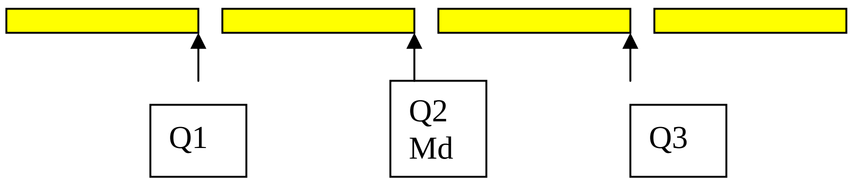
6, 7, 7, **8, 8, 8, 8**, 9, 9, 10 ,10.

En el caso de las ventas de la tienda, se puede ver que nos hay dos datos iguales; por lo mismo, este conjunto de datos no tiene moda.

Puede darse el caso, en conjuntos más grandes de datos, que el “honor” de ser el valor más frecuente sea compartido por dos datos. En ese caso se afirma que la distribución es bimodal, pues tiene dos modas. Algunos autores llegan a hablar de distribuciones trimodales e incluso más, pero para el efecto de estas líneas, lo más que se considera es la distribución bimodal.

Otras medidas de posición.

Así como la mediana divide la distribución de nuestros datos en dos partes iguales, existen medidas de posición llamadas cuartiles. Hay tres cuartiles en cada distribución de datos; el primer cuartil o Q1 divide la distribución en dos partes: a la izquierda está la cuarta parte (de allí su nombre) o el 25% de los datos. El segundo cuartil o Q2 se asimila a la mediana y divide la distribución de nuestros datos en dos partes iguales. El tercer cuartil o Q3 hace la misma función, dividiendo nuestra distribución de datos en dos partes, la parte izquierda agrupa al 75% de los datos más pequeños y la parte derecha el 25% de los datos más grandes. El siguiente esquema puede aclarar la situación de los cuartiles:



Cada una de las barras amarillas representa un 25% de los datos.

Un concepto parecido al de cuartiles se tiene con el de “deciles” y con el de “percentiles”, pero en lugar de separar los datos en grupos del 25%, lo hacen en grupos del 10% y del 1% respectivamente. Desde luego, para que los cuartiles, deciles y percentiles tengan algún sentido se requiere tener conjuntos grandes de datos. No tiene ningun objeto hablar de percentiles si se tienen 14 datos, por ejemplo. La manera de encontrar los cuartiles, deciles u percentiles sería, en teoría, la misma, alinear los datos de menor a mayor y contar cuál de ellos es el que cumple el requisito de dividir la distribución de la manera que queremos, pero este método es completamente impráctico, por lo que nos ocuparemos de su obtención cuando trabajemos datos agrupados.

2.2.2 Medidas de dispersión

Saber cual es el dato central de una distribución es importante, pero también lo es el saber que tan concentrada o extendida está nuestra información. Por ejemplo, el saber que una tienda tiene ingresos diarios medios de $10,000 es interesante, pero además es importante saber si todos los días esas ventas están muy cerca de los diez mil pesos o, en realidad se alejan mucho. En seguida damos los datos de dos tiendas que tienen la misma media de ventas diarias.

Tienda A. $10,000; $10500; $11,000; $9,000; $9,500.
Tienda B. $10,000; $5,000; $15,000; $19,000; $1,000

Es fácil observar que ambas tiendas tienen las mismas ventas medias ($10,000). Sin embargo en la tienda A la planeación de flujo de efectivo es más sencilla que en la tienda B. En la primera (tienda A) podemos contar con un flujo más o menos constante de efectivo que nos permite afrontar los compromisos diarios. En la tienda B podemos tener un flujo muy abundante o casi nada. Eso nos lleva a tener que prever cómo invertir excedentes temporales y cómo cubrir faltantes a corto plazo.

Las medidas que nos permiten cuantificar la dispersión de los datos son cuatro: el rango o recorrido, la varianza, la desviación estándar y el coeficiente de variación. A continuación definimos cada una de ellas.

Rango o recorrido. Es la diferencia entre el dato mayor y el dato menor. En el ejemplo de las tiendas sus rangos son:

Tienda A: 11,000-9,000= 2,000
Tienda B: 19,000-1,000= 18,000.

El rango se expresa frecuentemente con la siguiente fórmula: $R=X_M- X_m$
En esta fórmula R representa al rango; X_M al dato mayor y X_m al dato menor.

El rango es una medida de dispersión que es muy fácil de obtener, pero es un tanto burda, pues solamente toma en cuenta los datos extremos y no hace caso de los datos que están en medio. Para tomar en cuenta todos los datos se inventaron las siguientes medidas de dispersión que son la varianza y la desviación estándar.

Varianza y desviación estándar.

Supongamos que tenemos un caso similar al de las tiendas ya mencionadas y cuyas ventas se dan a continuación.

Tienda C: $5,000; $10,000; $10,000; $10,000; $15,000.
Tienda D: $5,000; $6,000; $10,000; $14,000; $15,000.

Ambas tiendas tienen una media de $10,000 y un rango de $10,000 como fácilmente el alumno puede comprobar; sin embargo podemos daros cuenta de que en la tienda D la información está un poco más dispersa que en la tienda C, pues en esta última,, si exceptuamos los valores extremos todos los demás son diez mil y, en cambio, en la tienda D existe una mayor diversidad de valores.

Un enfoque que nos puede permitir tomar en cuenta todos los datos es el siguiente:

Supongamos que deseamos saber que tan alejado está cada uno de los datos de la media. Para ello podemos sacar la diferencia entre cada uno de los datos y esa media para, posteriormente promediar todas esas diferencias y ver, en promedio, que tan alejado está cada dato de la media ya citada. En la siguiente tabla se realiza ese trabajo.

	Tienda C			**Tienda D**	
datos	cada dato menos la media		datos	cada dato menos la media	
5000	5000-10000=	-5000	5000	5000-10000=	-5000
10000	10000-10000=	0	6000	6000-10000=	-4000
10000	10000-10000=	0	10000	10000-10000=	0
10000	10000-10000=	0	14000	14000-10000=	4000
15000	15000-10000=	5000	15000	15000-10000=	5000
	suma	**0**		**suma**	**0**

Nos damos cuenta de que, desgraciadamente la suma de las diferencias entre la media y cada dato tuvo cero como resultado y entonces ya no tiene caso dividir. Le tenemos al estuidante una mala noticia, este trabajo siempre dará cero por la definición misma de la media aritmética, que es el punto medio entre todos los datos.

Nuestro primer intento de encontrar diferencias promedio entre los datos y la media estuvo destinada a fracasar. Sin embargo tomando este trabajo como base a alguien se le ocurrió que los cuadrados de todos los números reales, diferentes de cero, son siempre positivos, por lo que las diferencias entre la media y cada uno de los datos (casi) siempre nos dará un número positivo (la única excepción es el caso trivial en el que todos los datos son iguales, pues entonces todas las diferencias entre el dato y la media dan cero). A continuación se muestra este trabajo y la suma correspondiente.

	Tienda C				**Tienda D**		
datos	cada dato menos la media		Cuadrado de lo anterior	datos	cada dato menos la media		Cuadrado de lo anterior
5000	5000-10000=	-5000	25,000,000	5000	5000-10000=	-5000	25,000,000
10000	10000-10000=	0	0	6000	6000-10000=	-4000	16,000,000

10000	10000-10000=	0	0	10000	10000-10000=	0	0
10000	10000-10000=	0	0	14000	14000-10000=	4000	16,000,000
15000	15000-10000=	5000	25,000,000	15000	15000-10000=	5000	25,000,000
	suma	**0**	**50,000,000**		**suma**	**0**	**82,000,000**

En este caso ya la suma de las diferencias entre cada dato y la media (elevadas al cuadrado) nos da un valor diferente de cero con el que podemos trabajar. A este ultimo dato (el de la suma), dividido entre el numero total de datos lo conocemos como varianza (o variancia, según el libro que se consulte).

Por lo mismo tenemos que la varianza de los datos de la tienda C es igual a 50,000,000/5, es decir 10,000,000. Siguiendo el mismo procedimiento podemos obtener la varianza de la tienda D, que es igual a 82,000,000/5, es decir 16,500,000. Llegados a este punto nos podemos percatar que la varianza de la tienda D es mayor que la de la tienda C, por lo que la información de la primera de ellas (D) está más dispersa que la información de la segunda (D).

La fórmula para la varianza de una población es un resumen del procedimiento que acabamos de seguir y de reproduce a continuación.

$$\sigma^2 = \sum_{1}^{N} (Xi - \mu)^2 / N$$

Esta fórmula (como la mayoría de ellas) se ve un tanto complicada al principio, sin embargo, si la examinamos con detenimiento veremos que simplemente simboliza un trabajo que ya llevamos a cabo, por lo que no debe impresionarnos.

La varianza es una medida muy importante y tiene interesantes aplicaciones teóricas. Sin embargo es difícil e comprender de manera intuitiva; entre otras cosas porque, al elevar las diferencias entre el dato y la media al cuadrado, las unidades de medida son las de los datos al cuadrado y no es nada fácil captar lo que significan pesos al cuadrado o (en algún otro problema) focos al cuadrado. Por ello se determinó obtener la raíz cuadrada de la varianza. De esta manera las unidades vuelven a expresarse de la manera original y su sentido es menos difícil de captar. En el caso de nuestras tiendas, las desviaciones estándar son:
Para la tienda C de $3,162.28 y para la tienda D de $4,062.02

La fórmula para la varianza es:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{1}^{N} (Xi - \mu)^2 / N}$$

El lector podrá observar que la sigma ya no está al cuadrado, lo que es lógico, pues si la varianza es sigma al cuadrado, la raíz cuadrada de la misma es, simplemente sigma. Es necesario informar al lector que esta es la fórmula de la desviación estándar para una población. En el siguiente semestre, el estudiante verá estadística inferencial y, en ella, aprenderá a obtener la desviación estándar de las muestras (no de las poblaciones). La fórmula es muy similar; pero en el caso de la muestra, el divisor, en lugar de ser N (el total de los datos de la población) es (n-1) el total de los datos de la muestra menos una unidad. El estudiante deberá notar que al total de la población se le denota con “N” mayúscula y al total de datos de la muestra se le denota con “n” minúscula.

El coeficiente de variación.

Dos poblaciones pueden tener la misma desviación estándar y, sin embargo, podemos percatarnos intuitivamente que la dispersión no es la misma para efectos de toma de decisiones. El siguiente ejemplo aclara estos conceptos.

Un comercializador de maíz vende su producto de dos maneras distintas:

a) En costales de 50 Kg.
b) A granel, en sus propios camiones repartidores que cargan 5 toneladas (5000) Kg.

Para manejar el ejemplo de manera sencilla, supongamos que en un día determinado solamente vendió tres costales y que además salieron tres camiones cargados y, para verificar el trabajo de los operarios, se pesaron tanto unos como otros en presencia de un supervisor. Sus pesos , la media de los mismos y sus desviaciones estándar aparecen en la siguiente tabla. (el alumno puede comprobar las medias y las desviaciones estándar calculándolas él mismo, a manera de ejercicio.

Peso de los costales	Peso de los camiones
40 Kg.	4990Kg
50 Kg.	5000 Kg.
60 Kg.	5010 Kg.

Media de los costales 50 Kg.
Media de los camiones 5000 Kg.
Desviación Estándar de los costales 8.650 Kg.
Desviación estándar de los camiones 8.650 Kg.

Podemos percatarnos de que las variaciones en el peso de los camiones son muy razonables, dado el peso que transportan. En cambio las variaciones en el peso de los costales son muy grandes, en relación a lo que debería de ser. Los operarios que cargan los camiones pueden ser felicitados por el cuidado que ponen en su trabajo, en cambio podemos ver fácilmente que los trabajadores que llenan los costales tienen algún problema serio, a pesar de que la variación (la desviación estándar) es la misma en ambos casos.

Para formalizar esta relación entre la variación y lo que debe de ser, se trabaja el coeficiente de variación, que no es otra cosa que la desviación estándar entre la media y todo ello por cien. En fórmula lo expresamos de la siguiente manera:

$$C.V. = (\sigma / \mu)100$$

En el caso de los costales tendíamos:

C.V.=(8.165/50)100=16.33.

Esto nos indica que la desviación estándar del peso de los costales es del 16.33% del peso medio (una desviación importante de lo que debía de ser).

Por otra parte, en el caso de los costales el coeficiente de variación nos arroja:

C.V.=(8.165/5000)100= 0.1633

Esto nos indica que la desviación estándar del peso de los camiones es de menos del uno por ciento del peso medio (una desviación realmente razonable).

Datos Agrupados.

Cuando se tiene un fuerte volumen de información y se debe trabajar sin ayuda de un paquete de computación, no es práctico trabajar con los datos uno por uno, sino que conviene agruparlos en subconjuntos llamados “clases”, pues así es más cómodo manipularlos aunque se pierde alguna precisión. Imagine el estudiante si se tienen 400 datos, el trabajo que representaría ordenarlos uno por uno para obtener la mediana. Por ello se han desarrollado un conjunto de técnicas que permite el trabajo rápido mediante agrupamiento de datos. A continuación se dan algunas definiciones, para acto seguido pasar a revisar las técnicas antes citadas.

Clase. Cada uno de los subconjutos en los que dividimos nuestros datos.

Número de clases. Debemos definirlo con base en el número total de datos. Diversos autores proporcionan diferentes criterios. Algunos dicen que el número de clases debe ser aproximadamente la raíz cuadrada del número de datos. Otros afirman que el número de clases es aproximadamente el logaritmo del número de clases entre el logaritmo de 2. Normalmente se afirma que las clases no deben ser ni menos de cinco ni más de veinte. De cualquier manera, el responsable de trabajar con los datos debe utilizar su criterio para lograr los resultados que desea. A continuación se dan algunos ejemplos del número de clases que se obtienen según los dos criterios antes señalados.

Número de datos	número de clases (criterio de la raíz cuadrada)	(criterio del logaritmo)
50	Aproximadamente 7	6
100	Aproximadamente 10	7
150	Aproximadamente 12	7
200	Aproximadamente 14	8

Supongamos que tenemos 44 datos (mismos que aparecen en la tabla que se presenta a continuación), que corresponden a las ventas, en días consecutivos de una pequeña miscelánea y que seguimos el criterio de los logaritmos. El número de clases será: logaritmo de 44 entre logaritmo de 2. Si denominamos K al número aproximado de clases tendremos: K=log 44 / log 2= 1.6434/0.3010 = 5.46... o aproximadamente 5 clases.

Miscelánea "La Esperanza"

Ventas de 44 días consecutivos

día	Venta	día	Venta	día	Venta	día	Venta
1	508	***13***	628	**25**	671	**37**	951
2	918	***14***	935	**26**	965	**38**	667
3	911	***15***	606	**27**	816	**39**	897
4	639	***16***	680	**28**	525	**40**	742
5	615	***17***	993	**29**	846	**41**	1000
6	906	***18***	693	**30**	773	**42**	800
7	638	***19***	586	**31**	547	**43**	747
8	955	***20***	508	**32**	624	**44**	500
9	549	***21***	885	**33**	524		
10	603	***22***	590	**34**	603		
11	767	***23***	763	**35**	890		
12	532	***24***	829	**36**	772		

Ancho de clase.

Es el tamaño del intervalo que va a ocupar cada clase. Se considera que el ancho de clase se obtiene dividiendo el rango entre el número de clases. Por ejemplo, si en el ejemplo de la miscelánea del párrafo anterior nuestro dato mayor es 999.70, nuestro dato menor es 500 y anteriormente habíamos definido que necesitábamos cinco clases, el ancho de clase es, como ya lo habíamos mencionado, el rango (es decir 499.70 o prácticamente 500) entre el número de clases (es decir 5). Por tanto el ancho de clase es de 100.

Límites de clase.

Es el punto en el que termina una clase y comienza la siguiente. En el ejemplo del párrafo anterior podemos resumir la información de la siguiente manera:

Primera clase: comienza en 500 y termina en 600
Segunda clase: comienza el 600 y termina en 700
Tercera clase: comienza el 700 y termina en 800
Cuarta clase: comienza el 800 y termina en 900
Quinta clase: comienza el 900 y termina en 1,000

Estas clases nos permitirán clasificar nuestra información. Si un dato, por ejemplo es 627.50, lo colocaremos en la segunda clase. El problema que tiene esta manera de clasificar la información es que en los casos de datos que caen exactamente en los límites de clase, no sabríamos en cual de ellas clasificarlos. Si un dato es exactamente 700, no sabríamos se debemos asignarlo a la segunda o a la tercera clase. Para remediar esta situación existen varios caminos, pero el más práctico de ellos (y el que usaremos para los efectos de este trabajo) es el de hacer intervalos abiertos por un lado y cerrados en el otro. Esto se logra de las siguientes maneras:

La	Incluye datos Iguales o mayores a	y menores a

Primera	500	600
Segunda	600	700
Tercera	700	800
Cuarta	800	900
Quinta	900	1000

Como vemos, los intervalos de cada clase están cerrados del lado izquierdo y abiertos del derecho. Se puede tomar la decisión inversa y dejar abierto el intervalo del lado izquierdo y cerrado del lado derecho. Este enfoque se ejemplifica en la siguiente tabla.

La	Incluye datos mayores a	y menores o iguales a
Primera	500	600
Segunda	600	700
Tercera	700	800
Cuarta	800	900
Quinta	900	1000

En lo único que se debe de tener cuidado es en no excluir alguno de nuestros datos al hacer la clasificación. En el caso de la última tabla, por ejemplo excluimos a los datos cuyo valor es exactamente de 500. Podemos dejarlo así partiendo de la base de que el impacto en nuestro trabajo es, para efectos prácticos, despreciable o modificar los límites para dar cabida a todos los datos. A continuación se presenta un ejemplo de esta segunda alternativa.

La	Incluye datos Iguales o mayores a	y menores a
Primera	499.99	599.99
Segunda	599.99	699.99
Tercera	699.99	799.99
Cuarta	799.99	899.99
Quinta	899.99	999.99

De esta manera tenemos contemplados todos nuestros datos. El investigador deberá definir cual criterio prefiere con base en el rigor que desea y de las consecuencias prácticas de su decisión. Posteriormente, conforme desarrollemos el ejemplo se verá el impacto e elegir na o la otra de las alternativas.

Marca de clase.

La marca de clase es, por así decirlo, la representante de cada clase. Se obtiene sumando el límite inferior y el superior de cada clase y promediándolos. A la marca de clase se le conoce como Xi. A continuación se calcula para las clases de nuestro ejemplo, al tiempo que se le da una presentación más formal a las tablas:

i	Incluye datos Iguales o mayores a	y menores a	Xi	Xi
1	500	600	(500+600)/2=	550

2	600	700	(600+700)/2=	650
3	700	800	(700+800)/2=	750
4	800	900	(800+900)/2=	850
5	900	1000	(900+1000)/2=	950

Podemos ver con facilidad que las marcas de clase de la segunda tabla son iguales a estos; en cuanto a las marcas de clase de la tercera tabla, éstas se calculan a continuación.

I	Incluye datos Iguales o mayores a	y menores a	Xi	Xi
1	499.99	599.99	(499.99+599.99)/2=549.99	
2	599.99	699.99	(599.99+699.99)/2=649.99	
3	699.99	799.99	(699.99+799.99)/2=749.99	
4	799.99	899.99	(799.99+899.99)/2=849.99	
5	899.99	999.99	(899.99+999.99)/2=949.99	

Podemos ver que la diferencia entre la marca de clase de las dos primeras tablas y la tercera es de solamente un centavo. Veremos en el resto del ejemplo las consecuencias que tiene esa diferencia en el desarrollo del trabajo.

Una vez que se tiene la “armadura” o estructura en la que se van a clasificar los datos, se procede a clasificar éstos. Para esto usaremos una de las clasificaciones ya especificadas:

Clase	Incluye datos mayores a	y menores o iguales a		Frecuencia en cada clase (se denominan Fi)
1	500	600	IIIII IIIII I	
2	600	700	IIIII IIIII I	
3	700	800	IIIII II	
4	800	900	IIIII I	
5	900	1000	IIIII IIII	

2.2.3 Cálculo de medidas mediante paquetes de computación.

ESTADÍSTICA 1. UNIDAD 4.

Temario detallado.

4.1 Introducción.

Algunas personas dicen que solamente existen dos cosas en la vida que seguramente nos acontecerán; éstas son los impuestos y la muerte. Todos los demás eventos pueden o no sucedernos; es decir, tenemos un cierto nivel de duda sobre su ocurrencia. Para tratar de cuantificar el nivel de duda (o de certeza) que tenemos de que ocurra un determinado fenómeno se creó la teoría de la probabilidad. En esta unidad nos encontraremos con lo que se conoce como probabilidad básica. En ella no existen muchas fórmulas a las cuales recurrir (desde luego existen algunas). La mayor parte de los problemas se resuelven mediante la aplicación de un reducido conjunto de principios básicos y de una regular dosis de ingenio. Para ello es indispensable entender claramente el problema en sí, por lo que la lectura cuidadosa y crítica es indispensable.

A reserva de adentrarnos más en el tema, podemos adelantar que la probabilidad siempre es un número entre cero y uno. Mientras más probable sea la ocurrencia de un evento más se acercará a uno; mientras más improbable sea, se acercará más a cero. Las razones de ello se explican en la siguiente sección de esta unidad.

Es necesario, por último, hacer una advertencia sobre la presentación de datos. Al ser la probabilidad un número entre cero y uno, es frecuente expresarla en porcentaje. A la mayoría de las personas se nos facilita más la comprensión cuando la cantidad está expresada de esta última manera. Si decimos, por ejemplo, que la probabilidad de que llueva hoy es del 10%, damos la misma información que si decimos que la probabilidad de que llueva hoy es de 0.10. Ambas manera de presentar la información son equivalentes y en el texto se utilizarán indistintamente.

4.2 Probabilidad objetiva y subjetiva.

Para determinar la probabilidad de un suceso podemos tomar dos enfoques. El primero de ellos se denomina “objetivo” y tiene, a su vez, dos enfoques que a continuación se detallan.

Enfoque “a priori” (es decir, antes del hecho). Se parte de la base de que se conocen todos los resultados posibles y a cada uno de ellos se les asigna una probabilidad de manera directa sin hacer experimento o medición alguna. Frecuentemente decimos que, al arrojar una moneda existen 50% de probabilidades de que salga águila y 50% de probabilidades de que salga sol, basándonos en el hecho de que la moneda tiene dos caras y que ambas tienen las mismas probabilidades de salir. Igual camino seguimos al asignar a cada cara de un dado la probabilidad de un sexto de salir. Razonamos que el dado tiene seis caras y por tanto, si el dado es legal, cada de ellas tiene las mismas probabilidades.

El otro enfoque objetivo es el llamado “a posteriori" (es decir, después del hecho). Para asignarle probabilidad a un suceso se experimenta antes y, con base en los resultados se asignan probabilidades. En el caso de la moneda, este enfoque nos recomendaría hacer un número muy grande de “volados”, por ejemplo mil, y con base en ellos definir la probabilidad. Si decimos, por ejemplo: “la probabilidad de que salga águila es de 488/1000, porque lancé mil veces la moneda y esos fueron los resultados, estaremos aplicando la probabilidad a posteriori. En ejemplos menos triviales, las compañías de seguros desarrollan tablas de mortalidad de las personas para diferentes edades y circunstancias con base en sus experiencia. Ese es un caso del enfoque a posteriori.

En cuanto a la probabilidad subjetiva, ésta se da cuando no existen antecedentes para determinarla (como en el caso de las tablas actuariales de las compañías de seguros) ni una base lógica para fijarla a priori. Si pensamos, por ejemplo, en la final de fútbol del mundial de 2002, en le que se enfrentaron Brasil y Alemania, vemos que no había historia previa de enfrentamientos entre los dos equipos y había tantos factores en juego que difícilmente se podía dar una probabilidad sobre las bases que anteriormente llamamos “objetivas”, por lo mismo se debe recurrir al juicio de las personas para definir las probabilidades. A esta manera de fijar probabilidades se le llama, por este hecho, probabilidad subjetiva.

4.3 Probabilidad básica.

Para trabajar con comodidad la probabilidad, vale la pena expresar algunas ideas que necesitaremos posteriormente.

Experimento. Es aquel proceso que da lugar a una medición o a una observación.

Experimento aleatorio. Es aquel experimento cuyo resultado es producto de la suerte o del azar. Por ejemplo, el experimento de arrojar un dado.

Evento. El resultado de un experimento.

Evento aleatorio. El resultado de un experimento aleatorio. . Por ejemplo
A: el evento de que al arrojar un dado salga un número non.

Evento compuesto: el que puede ser descompuesto en eventos más simples. Por ejemplo, el evento A mencionado anteriormente se puede descomponer en los siguientes eventos:

E1: el evento de que al arrojar un dado salga un uno.

E2: el evento de que al arrojar un dado salga un tres.
E3: el evento de que al arrojar un dado salga un cinco.

. Los eventos que no pueden descomponerse en otros más sencillos se conocen como eventos simples El estudiante habrá notado el cambio de nomenclatura, pues para los eventos simples, pues éstos además de la letra tienen un subíndice(el número después de la letra mayúscula del evento. Otra manera de denominar a los eventos simples es la de “puntos muestrales”. Esta denominación es útil cuando se trata de representar gráficamente los problemas de probabilidad pues cada evento simple (punto muestral) se representa efectivamente como un punto.

Llegando a este momento podemos dar ya una definición más formal de probabilidad:

Sea A un evento cualquiera; N el número de veces que repetimos un experimento en el que se puede representar el evento A; n_A, el número de veces que efectivamente se representa el evento A y P(A) a la probabilidad de que se presente el evento A.

Entonces tenemos que P(A)= $\lim_{N \to \infty} n_A / N$

Es decir que la probabilidad de que ocurra el evento A, es la división entre el número de veces que A efectivamente apareció entre el número de veces que se intentó el experimento cuando el experimento se intentó muchas, muchas veces (eso quiere decir que N tiende a infinito). Podemos ver que el menor valor que puede tener P(A) es de cero, en el caso de que en todos los experimentos intentados A no apareciera ni una sola vez. El mayor valor que puede tener P(A) es de uno, en el caso de que en todos los experimentos intentados A apareciera todas las veces, pues en ese caso n_A sería igual a N y todo número dividido entre sí mismo es igual a 1. En todos los demás casos, la probabilidad de ocurrencia estará entre estos dos números extremos y por eso podemos decir que la probabilidad de ocurrencia de cualquier evento estará entre cero y uno. Esta es la justificación de la afirmación análoga que se realizó al principio de la unidad y también la justificación de la afirmación que se hace frecuentemente de que la probabilidad se expresa como la frecuencia relativa de un evento; es decir relativa al total de experimentos que se intentaron.

4.4 Probabilidad simple (marginal)

La probabilidad simple de un evento es la que tiene éste, sin considerar las conexiones que pueda tener con otros eventos. También se le llama probabilidad marginal. A continuación se define un procedimiento sencillo para calcular la probabilidad simple de un evento.

a. Defina el experimento
b. Haga la lista de todos los eventos simples asociados con el experimento que definió (es decir, haga la lista de todos los puntos muestrales).
c. Asigne probabilidades a cada uno de los puntos muestrales. La suma total de las probabilidades de TODOS los puntos muestrales debe ser igual a la unidad.
d. Defina el evento que le interesa como un conjunto de puntos muestrales.

e. Encuentre la probabilidad del evento que le interesa sumando la probabilidad de los puntos muestrales que lo componen.

A continuación se dan varios ejemplos que nos permitirán comprender mejor este procedimiento.

Ejemplo 1.

a. El experimento consiste en arrojar un dado normal y bien balanceado de seis caras.
b. Todos los resultados posibles (los eventos simples o puntos muestrales) se listan a continuación:

E1: que salga un uno.
E2: que salga un 2
E3: que salga un 3
E4: que salga un 4
E5: que salga un 5
E6: que salga un 6.

c. Para asignar probabilidades a cada evento, suena razonable darle la misma probabilidad a cada evento simple y, si hay seis resultados posibles, también resulta razonable darle 1/6 a cada uno.

d. A continuación definimos tres eventos como de interés y los definimos como conjuntos de puntos muestrales.

Evento A: que salga un número menor a cuatro: Se compone de los eventos E1,E2 y E3.
Evento B: que salga un número par: Se compone de los eventos E2, E4, E6.
Evento C que salga un número mayor que seis. Ningún evento lo compone.

e. La probabilidad de A es la suma de las probabilidades de E1,E2 y E3: 1/6+1/6+1/6 = 3/6=1/2.
f. La probabilidad de B es la suma de las probabilidades de E2, E4, E6: 1/6+1/6+1/6 = 3/6=1/2.
g. La probabilidad de C es de cero, pues no existe ningún evento que lo componga.

Ejemplo 2. El comité directivo de la sociedad de padres de familia de una escuela primaria está compuesto por cinco personas: tres mujeres y dos hombres. Se van a elegir al azar dos miembros del comité para solicitar al delegado que ponga una patrulla a vigilar la salida de los niños ¿Cuál es la probabilidad de que el comité esté compuesto por un hombre y una mujer?

El experimento es elegir al azar dos personas de las cuales tres son mujeres y dos son hombres.

Para listar todos los eventos simples simbolizaremos a las mujeres con una M y los hombres con una H. Así el comité está compuesto por: M1, M2, M3, H1,H2, siendo M1 la primera mujer, M2 la segunda, H1 el primer hombre y así sucesivamente.

Los eventos simples que son posibles se listan a continuación:

M1M2; M1M3; M1H1 M1H2
M2M3; M2H1; M2H2;
M3H1; M3H2;
H1H2.

Vemos que pueden darse 10 pares distintos. Si cada par es elegido al azar, es razonable suponer que todos ellos tienen la misma probabilidad de ser seleccionados, por ello podemos afirmar que cada par tiene una probabilidad de 1/10 de ser seleccionado. Los pares que están constituidos por un hombre una mujer son: M1H1 M1H2; M2H1; M2H2; M3H1 y M3H2; es decir, seis de los diez pares posibles.

La probabilidad de nuestro evento de interés es entonces, de seis veces un décimo o 6/10. Expresada en porcentaje, esta probabilidad será del 60%.

Ejemplo 3. Una tienda de electrodomésticos va a recibir un embarque de 6 refrigeradores, de los cuales, dos están descompuestos. El dueño de la tienda someterá a prueba a 2 refrigeradores al recibir el embarque y solamente lo aceptará si ninguno de ellos presenta fallas. Diga usted que probabilidades tiene de aceptar el embarque.

El experimento es el e elegir dos refrigeradores al azar para ver si funcionan o no funcionan.

Si llamamos B al refrigerador que trabaja bien y D al descompuesto, podemos listar a todos los refrigeradores del embarque de la siguiente manera:

B1, B2, B3, B4, D1, D2..

Todos los eventos posibles (es decir, todos los pares diferentes que se pueden elegir) se listan a continuación. Los eventos simples de interés (aquellos en que los dos refrigeradores están en buen estado, se resaltan en negritas.

B1B2; B1B3; B1B4; B1D1; B1D2;
B2B3; B2B4; B2D1; B2D2;
B3B4; B3D1; B3D2;
B4D1; B4D2
D1D2

Vemos que existen quince eventos posibles, de los cuales en seis se presenta el caso de que ambos refrigeradores estén en buen estado. Si, como en lo ejemplos anteriores, asignamos una probabilidad igual a todos los eventos simples (en este caso 1/15); nos percataremos que la probabilidad de aceptar el embarque está dada por 6/15.

4.5 Probabilidad Conjunta

El enfoque visto hasta el momento es útil para comprender el concepto de probabilidad. Sin embargo, la mayoría de los eventos con los que nos podemos encontrar están constituidos por muchos eventos simples y resulta engorroso el cálculo de los mismos. Afortunadamente podemos recurrir a un procedimiento menos incómodo. Para ello debemos recurrir a las nociones de conjuntos que el estudiante aprendió en Matemáticas Básicas y a algunas definiciones que se detallan a continuación.

Evento compuesto es aquel que consta de más de un punto muestral.

Para componer eventos hacemos uso de las operaciones de conjuntos llamadas unión e intersección y bien podemos hacer uso de una combinación de ambas.

Si definimos a los eventos A y B como resultados de un experimento aleatorio y recordamos que todos los eventos posibles (el conjunto universal) lo denominamos espacio muestral y lo representamos como “S”; tenemos que la unión de A y B es un evento que contiene todos los puntos muestrales que pertenecen al evento A o/y que pertenecen al evento B. Si usamos la notación de conjuntos nos queda como: $A \cup B$. La probabilidad de $A \cup B$ es la probabilidad de que suceda el evento A o de que suceda el evento B o de que ambos sucedan conjuntamente. Por otra parte, tenemos que la intersección de A y B es la situación en que ambos A y B suceden conjuntamente. La intersección se denota con la simbología de conjuntos como $A \cap B$. Enseguida aparece un ejemplo que nos ayudará a dejar en claro este concepto.

Si una pareja tiene dos hijos y definimos los siguientes eventos:

A: La pareja tiene por lo menos un varón.
B: La pareja tiene por lo menos una niña.

Defina el espacio muestral y encuentre los puntos muestrales de los siguientes eventos:

Evento A.
Evento B.
Evento $A \cap B$
Evento $A \cup B$

Si llamamos V al hecho de tener un varon y M al hecho de tener una mujercita, el espacio muestral está integrado por los siguientes eventos:

E1: VV
E2: VM
E3: MV
E4: MM.

Nuestros eventos de interés están integrados de la siguiente manera

Evento A. E1, E2, E3
Evento B. E2, E3, E4

Evento $A \cap B$. E2, E3
Evento $A \cup B$. E1, E2, E3, E4.

Una vez hecho lo anterior, si asignamos probabilidades iguales a cada uno de los eventos simples, en este caso podemos asignar ¼ o .25 a cada uno y por ello tenemos que:

P(A)= .75
P(B)=.75
$P(A \cap B)$= .50
$P(A \cup B)$=1.00

Con base en los conceptos que acabamos de desarrollar y de la teoría de conjuntos ya mencionada, podemos clasificar las relaciones entre diversos eventos de la siguiente manera:

Si A y B son eventos aleatorios en el espacio muestral S

Eventos complementarios: Son todos los eventos que están en el espacio muestral S y que no están el evento de interés. En nuestro caso, El complemento de A, denotado como A´, son todos los eventos que estando en el espacio muestral no etán en A.

Por definición la probabilidad de A más la probabilidad de su complemento es igual a 1. Esto lo podemos expresar de la siguiente manera:

P(A) + P(A´)=1. Por lo mismo: P(A)=1 – P(A´).

Si S son todos los resultados posibles al arrojar dos dados, tenemos que

S={2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}

Si definimos A como el hecho de que el tiro sume menos de cuatro se da que:

A={2,3}; en tanto que A´={4,5,6,7,8,9,10,11,12}

Eventos mutuamente excluyentes: Son aquellos eventos que si se produce uno de ellos, no puede producirse el otro. Dicho en el lenguaje de los conjuntos podemos afirmar, que si dos eventos son mutuamente excluyentes la intersección de ellos está vacía. En terminología de conjuntos también se dice que estos eventos son disjuntos.

Ejemplo. Sea S el mismo que en el ejemplo anerior.

Sea A: La suma de puntos de los dos dados es de 12.
Sea B: Aparece por lo menos un “uno” en los dados arrojados.

Vemos que es imposible que se den A y B simultáneamente, pues para que la suma de doce ambos dados tienen que salir en “”seis, en tanto que si uno de los dos dados tiene “uno” como resultado, la suma máxima que se puede lograr es de “siete”.

4.6 Regla de adición

Si tal como lo hemos venido trabajando A y B son dos eventos del espacio muestral S, tenemos que la probabilidad de la unión de dos eventos es la suma de las probabilidades de ambos eventos menos la probabilidad de la intersección. Expresado en simbología de conjuntos tenemos que:

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B)$

Si se da el caso de que A y B sean mutuamente excluyentes, entonces la intersección está vacía y, por lo mismo, la probabilidad de la unión de dos eventos es la suma de las probabilidades de los eventos tomados individualmente. Los siguientes ejemplos nos ayudará a dejar en claro estos conceptos.

En una investigación de mercado se encontró qué entre los integrantes de un club el 30% de los hombres usan loción para después de afeitarse, en tanto que el 40% de ellos utiliza desodorante y el 10% utiliza ambos productos. Si elegimos al azar a un varón de ese club ¿Qué probabilidades existen de que utilice desodorante **o** de que use loción para después de afeitarse?

Sea A: El sujeto usa loción para después de afeitarse.
Sea B: El sujeto usa desodorante.

Dado que estamos buscando que utilice, no ambos productos simultáneamente sino cualquiera de los dos de manera indistinta, estamos buscando la unión de los dos eventos. El cálculo de la probabilidad aparece a continuación:

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B)$
$P(A\cup B) = 0.40 + 0.30 – 0.10 = 0.60$

Esto quiere decir que existe un 60% de probabilidades de que un socio de este club elegido al azar use alguno de los dos productos.

En el mismo club el ejemplo anterior el 20% de los socios pertenece al equipo de natación y el 10% al equipo de waterpolo. Ningún socio pertenece a ambos equipos simultáneamente. Diga cual es la probabilidad, si elegimos al azar un socio del club, de que sea integrante de alguno de los dos equipos. El cálculo de probabilidades aparece a continuación. El estudiante tiene que recordar qué, dado que ningún socio pertenece a los dos equipos simultáneamente, la intersección está vacía y por lo mismo, la probabilidad de su ocurrencia es de cero.

$P(A\cup B) = 0.20 + 0.10 – 0 = 0.30$

Si tenemos varios eventos mutuamente excluyentes en el espacio de eventos S y queremos saber cual es la probabilidad de que ocurra cualquiera de ellos es la probabilidad de la unión de los mismos. Dado que al ser eventos mutuamente excluyentes la intersección está vacía, la probabilidad de ocurrencia es simplemente la suma o **adición** de las probabilidades individuales; es por ello que a esta regla se la conoce como regla de la adición.

4.7 Probabilidad Condicional.

En muchas circunstancias encontramos que la probabilidad de ocurrencia de un evento se ve modificada por la ocurrencia de otro evento. Por ejemplo, la probabilidad de pasar un examen depende del hecho de que el estudiante haya estudiado para el mismo. A esta probabilidad se le conoce como probabilidad condicional. Se expresa simbólicamente de la siguiente manera:

La probabilidad condicional de que ocurra B dado que A ya ocurrió es:

$P(B \mid A)= P(A \cap B)/P(A)$; Es decir, la probabilidad de B dado que A (eso quiere decir la línea vertical entre la B y la A)está dada por la probabilidad de que ocurran ambos eventos simultáneamente dividido por la probabilidad de que ocurra A, que en este caso es el evento antecedente.

La probabilidad condicional de que ocurra A dado que B ya ocurrió es:

$P(A \mid B)= P(A \cap B)/P(B)$; Es decir, la probabilidad de A dado que B (eso quiere decir la línea vertical entre la B y la A)está dada por la probabilidad de que ocurran ambos eventos simultáneamente dividido por la probabilidad de que ocurra A, que en este caso es el evento antecedente. El siguiente ejemplo nos ayudará a clarificar estas ideas.

Sea el evento A: Amanece Nublado en la región X
Sea el evento B: Llueve en la tarde en la región X.

De acuerdo con información meteorológica de muchos días, tenemos la siguiente información:

Amanece nublado y llueve el 40% de los días.
Amanece nublado y no llueve el 20% de los días.
Amanece despejado y llueve el 10% de los días.
Amanece despejado y no llueve el 30% de los días.

Dado lo anterior, la probabilidad de que llueva en la tarde, es la suma de las probabilidades de que llueva tanto si amaneció despejado como si amaneció nublado. Esto es 40% más 10%, esto es 50%. La probabilidad de que no llueva es su complemento, en este caso también el 50%.

Deseamos averiguar lo siguiente.

a) La probabilidad de que llueva en la tarde dado que amaneció nublado.
b) La probabilidad de que llueva en la tarde dado que amaneció despejado.

En el inciso “a” deseamos averiguar B dado que A. Con la información que tenemos ya podemos sustituir directamente en la fórmula.

La probabilidad condicional de que ocurra B dado que A ya ocurrió es:

P(B │A)= P(.40)/P(.60)= 2/3 ó el 67% aproximadamente. Es decir, que la probabilidad de que llueva, dado que amaneció nublado es del 67%. Podemos percatarnos a simple vista de que el hecho de que amanezca nublado efectivamente afecta la probabilidad de que llueva en la tarde. Recordemos que la probabilidad de que llueva (simplemente y sin tener antecedentes, es del 50%. Pasemos al siguiente inciso.

La probabilidad de que llueva en la tarde dado que amaneció despejado.

En este caso estamos buscando B dado que A´. Dado que amanece nublado el 60% de los días y despejado el 40% de ellos, ya podemos sustituir en la fórmula.

P(B │A´)= P(.10)/P(.40)=0.25 ó 25%. Vemos qué, si la probabilidad de que llueva es del 50% y la probabilidad de que llueva estando despejado es de solo el 25%, el hecho de que amanezca despejado, efectivamente afecta las probabilidades de que llueva.

Esto nos lleva al la última definición de relaciones entre eventos que es la de eventos independientes.

Dados dos eventos A y B del espacio de eventos S; decimos que A y B son independientes si la probabilidad de que ocurra A no influye en la probabilidad de que ocurra B y, simultáneamente, la probabilidad de que ocurra B no influye en la probabilidad de que ocurra A. En caso contrario decimos que los eventos son dependientes. Esto lo expresamos simbólicamente del siguiente modo:

Para considerar que A y B son independientes se deben cumplir las dos condiciones siguientes:

P(B │A)= P(B) y P(A │B)= P(A).

Es decir, el hecho de que ocurra un evento no modifica la probabilidad de que ocurra el otro en ningún orden que se tomen.

4.8 Regla de la multiplicación

Si tomamos la fórmula de la probabilidad condicional que ya vimos y despejamos la intersección , el resultado es el siguiente:

$P(B \mid A) = P(A \cap B)/P(A)$;

$P(A \cap B) = P(A) \; P(B \mid A)$

Si los eventos A y B son independientes, la probabilidad de B dado que A es igual a la probabilidad de B o P(B), por lo qué:

$P(A \cap B) = P(A) \; P(B)$

Es decir que la probabilidad de que ambos eventos ocurran (ambos juntos no uno **o** el otro) está dada por el producto de sus probabilidades individuales. A continuación se da un par de ejemplos que nos ayuda a comprender mejor este concepto.

Una tienda de artículos de línea blanca recibe de su proveedor 50 refrigeradores. Entre estos aparatos hay diez que están defectuosos. El comprador inspeccionará dos refrigeradores elegidos al azar ¿Cuál es la probabilidad de que ambos estén defectuosos?

Definimos primero nuestros eventos:

A: El primer refrigerador está defectuoso.
B: El segundo refrigerador está defectuoso.

Si hay diez aparatos defectuosos de un total de 50, la probabilidad de que ocurra el evento A es de 10/50 ó 0.20.

Si el primer refrigerador sale defectuoso, nos quedan 49 refrigeradores, de los cuales nueve están defectuosos, por ello la probabilidad de B dado que A es de 9/49. Esta información se expresa formalmente enseguida y a continuación se hace el cálculo de la probabilidad

$P(A) = 10/50$
$P(B \mid A) = 9/49$

$P(A \cap B) = P(A) \; P(B \mid A) = (10/50)(9/49) = 9/245$; esto es aproximadamente 3.67%

Si se arroja un dado bien balanceado dos veces de manera consecutiva diga cual es la probabilidad de que aparezcan dos unos como resultado.

Definimos nuestros eventos:

A: Sale uno en la primera tirada.
B: Sale uno en la segunda tirada.

$P(A) = 1/6$

$P(B \mid A) = P(B)= 1/6$, puesto que ambas tiradas son independientes

$P(A \cap B)= P(A)\ P(B) = (1/6)(1/6)=1/36$. Esto es 2.75%.

4.9 Teorema de Bayes

Cuando calculamos la probabilidad de A dado que B, de alguna manera se piensa que el evento B es algo que sucede antes que A y que B puede ser (tal vez) causa de A o puede contribuir a su aparición. También de algún modo podemos decir que B normalmente ocurre antes que A. Pensemos, por ejemplo que deseamos saber la probabilidad de que un estudiante apruebe el examen parcial de estadística, dado que estudió por lo menos veinte horas antes del mismo.

En algunas ocasiones sabemos que ocurrió el evento A y queremos saber cual es la probabilidad de que haya ocurrido el evento B. En nuestro ejemplo anterior sería preguntarnos cuál sería la probabilidad de que el alumno haya estudiado por lo menos veinte horas dado que, efectivamente, aprobó el examen parcial de estadística.

Esta probabilidad se encuentra aplicando una regla que se conoce como teorema de Bayes, mismo que se muestra enseguida.

$$P(B \mid A)= P(A \cap B)/P(A)= P(A \mid B)\ P(B)\ /[\ P(A \mid B)\ P(B) + P(A \mid B´)\ P(B´)]$$

En este caso el evento A sería que el estudiante aprobó examen de estadística y el evento B seria que el alumno estudió más de 20 horas. Como vemos, en este caso estamos preguntando la probabilidad de que el alumno haya estudiado más de veinte horas dado el hecho de que efectivamente aprobó el examen. Para resolver este tipo de problemas es indispensable tener alguna información. A continuación se da un ejemplo que nos permite comprender mejore este tipo de problemas.

En el caso del examen de estadística suponemos que se realizó un estudio de muchos casos que arrojó la siguiente información

	Estudia		
	Más de 20 h.(B)	20 h o menos.(B´)	
Aprueba examen (A)	.45	.15	**.60**
Reprueba examen (A’)	.10	.30	**.40**
	.55	**.45**	

De la tabla anterior tenemos:

$P(A \mid B) = .45/.55 = .8181$
$P(B) = .55$
$P(A \mid B)\ P(B) = 45$
$P(A \mid B´) = .15/.45 = .3333$

P(B´) = .45

Con base en esta información podemos sustituir en nuestra fórmula original para obtener:

$P(B \mid A)= P(A \mid B)\ P(B)\ /[\ P(A \mid B)\ P(B)\ + P(A \mid B´)\ P(B´)]$

$P(B \mid A)= .45/ [.45+ .3333 (.45)] = .75$ ó 75%

La probabilidad de que el estudiante haya estudiado más de 20 horas, tomando en cuenta que aprobó el examen es del 75%. Este es un ejemplo de cómo se puede aplicar el teorema de Bayes.

4.10 Aplicaciones

Pueden plantearse muchos problemas basándose en la probabilidad elemental. A continuación se ejemplifican algunos que pueden servir de guía al estudiante.

1. Si en una quiniela de pronósticos deportivos se debe acertar el resultado de 14 partidos de fútbol para tener derecho a un premio, suponemos que para cada partido los tres resultados posibles (gana local, gana visitante o empatan) son igualmente probables y al concursante solamente se le admiten quinielas sencillas, indique usted cuál es la probabilidad de que una quiniela cualquiera sea la ganadora.

Si hay tres resultados posibles en cada partido y hay 14 de ellos, el número de posibilidades es de 3 elevado a la 14 potencia; es decir: 4,782,969. Si de ellos solamente uno de ellos es acertada, entonces la probabilidad es de 1/4,782,969.

2. Indique usted cual es la probabilidad de obtener un poker de ases si se extraen consecutivamente cuatro cartas de una baraja bien mezclada.

Si la baraja tiene 52 cartas de las que 4 son ases tenemos que:

La probabilidad de sacar un as en el primer intento es de 4/52.
La probabilidad de sacar un as en el segundo intento es de 3/51; dado que solamente quedan 3 ases de las 51 cartas disponibles.
La probabilidad de sacar un as en el tercer intento es de 2/50; dado que solamente quedan 2 ases de las 50 cartas disponibles.
La probabilidad de sacar un as en el cuarto intento es de 1/49; dado que solamente queda 1 ases de las 49 cartas disponibles.

Usando la ley del producto, podemos darnos cuenta de que la probabilidad de obtener un poker de ases es el producto de las cuatro probabilidades anteriormente señaladas, es decir:

(4/52)(3/51)(2/50)(1/49)=24/6,370,000 . Esto es 3 de cada 796250 intentos.

3. Un intermediario bursátil ofrece 100 acciones, de las cuales 40 son de empresas de servicios y 60 son de empresas manufactureras. Por otra parte, de todas las acciones 35 obtendrán utilidad y 65 perderán algo de su valor. De las que ganan 20 son de empresas manufactureras. Si una persona compra una acción al azar de una empresa manufacturera, diga cual es la probabilidad de que haya sido de las afortunadas que tuvieron utilidad.

Sea A: Acción de empresa manufacturera.
Sea B: Acción que tuvo utilidad.

El problema nos pregunta el evento B dado que A. Si resumimos la información que tenemos nos será más fácil encontrar la solución.

	B	B´	
A	20		60
A´			40
	35	65	100

Con esta información como base podemos llenar todas las celdas restantes obteniendo los datos por diferencia.

	B	B´		
A	20	**40**	60	
A´	**15**	**15**	40	
	35	65	100	Los números en negrita son los que obtuvimos por diferencia.

Con esta información ya podemos obtener directamente lo que se nos pide

$P(B \mid A) = P(A \cap B)/P(A) = .20/.60 = 1/3.$

4. Este turno la máquina X produjo 500 piezas y la máquina Y produjo 400 Se sabe que la máquina X produce un 5% de piezas defectuosas y que la máquina Y produce el 10% de piezas defectuosas. Se eligió una pieza al azar y resultó defectuosa. Indique usted que probabilidad hay de que haya sido producida por la máquina X.

Sea el evento A: La pieza resultó defectuosa.
Sea el evento B: pieza estuvo producida por la máquina X.

Buscamos la probabilidad de B dado que A y es un ejemplo típico del uso del teorema de Bayes. Vaciamos la información que tenemos en una tabla, tal como lo hemos hecho anteriormente.

	.(B)	.(B´)	
(A)	25/900	40/900	**65/900**
(A')	475/900	360/900	**835/900**
	500/900	**400/900**	**900/900**

De la tabla anterior tenemos:

$P(A|B) = 25/500$
$P(B) = 500/900$
$P(A|B)\,P(B) = 25/900$
$P(A|B') = 40/400$
$P(B') = 400/900$

Con base en esta información podemos sustituir en nuestra fórmula original para obtener:

$P(B|A) = P(A|B)\,P(B) / [P(A|B)\,P(B) + P(A|B')\,P(B')]$

$P(B|A) = (25/900) / [(25/900) + (40/400)(400/900)] = 5/13$. Aproximadamente 38.5%.

Si la pieza fue defectuosa tiene un 38.5% de probabilidades de haber sido producida por la máquina X.

Estadística 1. Unidad 5

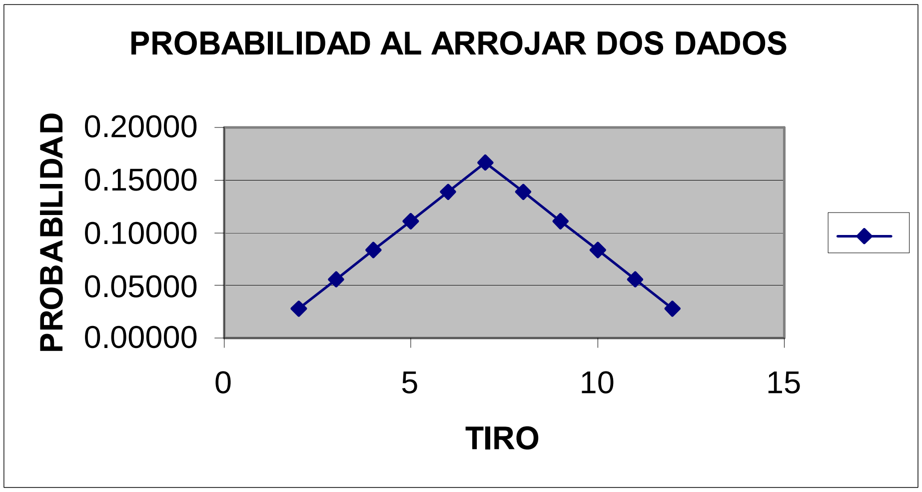
Temario detallado.

5. Distribuciones de Probabilidad
5.1 Distribuciones de probabilidad discretas.
 5.1.1Biomial
 5.1.2 Poisson
 5.1.3 Hipergeométrica
5.2 Distribuciones de probabilidad continuas.
 5.2.1 Normal

5. Distribuciones de Probabilidad

Diversos fenómenos de la naturaleza tienen distintas probabilidades de ocurrencia. El lector ya se percató en la unidad anterior que, aunque al arrojar dos dados se pueden obtener resultados del 2 al doce, no todos son igualmente probables. De hecho las probabilidades (expresadas en decimal y no en quebrados) se distribuyen de la siguiente manera. Se da el resultado en la forma de tabla y en una gráfica:

TIRO	PROBABILIDAD
2	0.02778
3	0.05556
4	0.08333
5	0.11111
6	0.13889
7	0.16667
8	0.13889
9	0.11111
10	0.08333
11	0.05556
12	0.02778



A la información de la manera en la que se distribuyen todos los resultados posibles de un experimento se les conoce como distribución de probabilidad de ese experimento. En este caso nuestro experimento fue el de arrojar dos dados. Desde este punto de vista cada experimento tiene su propia distribución de probabilidad, sin embargo, existen clases o tipos de experimentos que son útiles para diversas disciplinas y que comparten características comunes. Esto ha permitido desarrollar fórmulas o procedimientos estándares para obtener, ya sea las distribuciones de probabilidad, ya sea la probabilidad de experimentos o de eventos específicos.

Si hablamos en términos muy generales los diferentes tipos de distribuciones de probabilidad se dividen en discretas y continuas. En las primeras, la variable aleatoria solamente puede tomar valores positivos o cero. Tal es el caso de los dados que ya vimos, los hijos que puede tener una pareja, el número de goles que puede meter un equipo, etc. Por otra parte, en las distribuciones continuas la variable puede tomar cualquier valor que sea (entero, fraccionario o irracional); por ejemplo, el rendimiento porcentual de una acción cualquiera en un año determinado, el rendimiento en kilómetros por litro de un automóvil, etc.

En esta unidad revisaremos primeramente las distribuciones discretas para, posteriormente pasar a las continuas.

5.1 Distribuciones de probabilidad discretas.

5.1.1Biomial

La distribución binomial se relaciona con un experimento aleatorio conocido como experimento de Bernoulli y que tiene las siguientes características:

- El experimento está constituido por un número de pruebas idénticas (por ejemplo arrojar una moneda).
- Cada prueba tienen exactamente dos resultados posibles. A uno de ellos se le llama arbitrariamente éxito y al otro se le denomina fracaso.
- La probabilidad de éxito de cada prueba aislada es constante para todas las pruebas y recibe la denominación de “p”.
- La probabilidad de fracaso de cada prueba es, igualmente constante para todas las pruebas y se le denomina “q”.
- Las características antes mencionadas hacen que p+q=1.
- Por medio de la distribución binomial tratamos de encontrar un número dado de éxitos en un número igual o mayor de pruebas.

La probabilidad de r éxitos en n intentos está dada por la siguiente fórmula:

$P(r)= nCr\ p^r q^{(n-r)}$.

Esta fórmula nos dice que la probabilidad de obtener r éxitos en n pruebas (como ya se indicó arriba) está dada por la multiplicación de n combinaciones de r (el almno debe recordar el tema de reglas de conteo) por la probabilidad de éxito elevada al número de éxitos deseado y por la probabilidad de fracaso elevada al número de fracasos deseados.

A continuación se ofrecen varios ejemplos que nos ayudarán a comprender el uso de esta distribución.

Para los siguientes problemas indique usted si se trata de un problema binomial y si así es el caso resuélvalo.

Un embarque de 20 televisores incluye 3 unidades defectuosas. Si se inspeccionan 3 televisores al azar indique usted cual es la probabilidad de que se encuentren dos defectuosos.

Respuesta. Vemos que este problema no es binomial porque al seleccionar el primer televisor se tienen 3/20 de probabilidades se acertar con un defectuoso, en tanto que al seleccionar el segundo las probabilidades de que este sea defectuoso variarán según el caso. Si el primero efectivamente fue defectuoso la probabilidad es de 2/19. En cambio si el primero no fue defectuoso la probabilidad es de 3/19. Esta situación viola la suposición del experimento de Bernoulli que nos indica que la probabilidad debe permanecer constante entre ensayo y ensayo. El alumno puede ya resolver este problema con las herramientas que adquirió en el tema de probabilidad elemental. Su solución queda como ejercicio.

Una pareja de recién casados planea tener tres hijos. Diga usted cual es la probabilidad de que los tres hijos sean varones si consideramos que la probabilidad de que el descendiente sea varón o hembra es igual.

Respuesta. En este caso sí se trata de un experimento binomial. Si llamamos éxito al hecho de tener un varón, el número de éxitos que se busca es de 3 en tres intentos y la probablidad en cada intento es del 50%. La probabilidad está dada por:

$P(r)= nCr\ p^r q^{(n-r)}$; $P(3)= 3C3\ 0.5^3 0.5^{(3-3)}=0.125$.

Se sabe que el 30% de los estudiantes de secundaria de México es incapaz de localizar en un mapa el lugar donde se encuentra Afganistán. Si se entrevista a 6 estudiantes de este nivel elegidos al azar;

a) ¿Cuál será la probabilidad de que exactamente dos puedan localizar este país?
b) ¿Cuál será la probabilidad de que un máximo de dos puedan localizar este país?

Respuesta. También en este caso se trata de un experimento binomial, pues la probabilidad no cambia de ensayo en ensayo y solo hay dos resultados posibles: el estudiante puede localizar el país en el mapa o no puede. En este caso denominaremos éxito al hecho de poder localizar Afganistán en el mapa.

La solución del inciso “a” es la siguiente:

$P(r)= nCr\ p^r q^{(n-r)}$. $P(2)= 6C2\ 0.3^2 0.7^{(6-2)}=.324135$

Para la solución del inciso “b” debemos de tomar en cuenta que “un máximo de dos” implica que ningún estudiante sea capaz, que solamente uno lo sea o que dos lo logren. Dado que son eventos mutuamente excluyentes debemos de sumar las probabilidades de cada uno de ellos. La sustitución en la fórmula se presenta a continuación.

$P(0)= 6C0\ 0.3^{0}0.7^{(6-0)}=.117649$
$P(1)= 6C1\ 0.3^{1}0.7^{(6-1)}=.302526$
$P(2)= 6C2\ 0.3^{2}0.7^{(6-2)}=.324135$

P(0 ó 1 ó 2)=.117649+.30526+.324135=.74431

Se ha detectado que en una empresa que emite 100,000 facturas al año, 5,000 tienen errores de impresión. Si se extrae al azar una muestra de 50 facturas, cual es la probabilidad de encontrar 3 con errores de impresión.

Respuesta. En este problema el experimento no es estrictamente binomial. De hecho pertenece a una distribución que veremos más adelante y que se conoce como hipergeométrica Sin embargo, la probabilidad de un ensayo a otro cambia tan poco (enseguida se explica cuanto puede cambiar), que podemos usar la distribución binomial como una aproximación razonable. Denominamos éxito al encontrar una factura con error.

La probabilidad de encontrar una factura con error:

En el primer ensayo es 5000/10000=0.050000.
En el segundo, si la primera tuvo error, la probabilidad es de 4999/99999=0.0499905; si la primera no tuvo error es de 5000/99999=0.0500005.

Si deseamos ver la diferencia entre los dos valores en porcentaje, basta con dividir el segundo entre el primero, restarle uno al resultado y multiplicarlo por cien, tal como a continuación se realiza:

(0.0500005/.0499905-1)100=0.0200038%. La diferencia entre el valor mayor y el menor es de dos centésimas de uno por ciento. Una diferencia tan pequeña hace que podamos considerar, para efectos prácticos la probabilidad como constante para todos los ensayos. Dado que 5000/100000 nos da 0.05, tomaremos esta razón como la probabilidad de éxito. En estas condiciones el resultado está dado por:

$P(3)= 50C3\ 0.05^{3}0.95^{(50-3)}=.0.219875$. Es decir, se tiene poco menos del 22% de probabilidades de encontrar tres documentos con error en una muestra aleatoria de 50 documentos.

Media y varianza de una variable aleatoria binomial.

A continuación se dan las fórmulas para estos dos parámetros y posteriormente se da una interpretación de los mismos.

Media. μ=np

Varianza. σ^2= npq

Desde luego la desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza.

El siguiente ejemplo nos ayudará a entender este concepto.

De acuerdo con estudios realizados en un pequeño poblado, el 20% de la población tiene parásitos intestinales. Si se toma una muestra es de 1400 ¿Cuántos esperamos que tengan parásitos intestinales?

μ=np; μ=1400(.20)=280. Este es el número de elementos de la muestra que tendría ese problema. Usando el teorema de Tchevichev podríamos considerar que el valor real estaría a dos desviaciones estándar con un 75% de probabilidades y a tres con un 89%. De acuerdo con ello obtenemos la desviación estándar y posteriormente determinamos los intervalos.

Desviación estándar: . $\sigma= \sqrt{}(npq)= \sqrt{}1400x.20x.80)=14.97$

La media más menos dos desviaciones estándar nos daría el intervalo de 1370.06 a 1429.94

La media más menos tres desviaciones estándar nos daría el intervalo de 1355.09 a1444.91

5.1.2 Poisson

En un experimento de Bernoulli, tal como los que acabamos de ver e la distribución binomial, puede suceder que el numero de ensayos sea muy grande y/o que la probabilidad de acierto sea muy pequeña y los cálculos se vuelven muy engorrosos. En estas circunstancias podemos usar la distribución de Poisson como una aproximación a la distribución binomial. A continuación se muestra dicha fórmula.

$P(x)= (\mu^x e^{-\mu})/x!$

En esta fórmula la x representa al número de éxitos cuya probabilidad deseamos calcular; μ es la media de la distribución, tal como aprendimos a calcularla en la sección pasada, la "e" es la base de los logaritmos naturales y el símbolo de admiración representa la operación de factorial que ya vimos al estudiar las reglas de conteo.

A continuación se da un ejemplo del uso de la distribución de Poisson.

Una fábrica recibe un embarque de 1,000,000 de rondanas. Se sabe que la probabilidad de tener una rondana defectuosa es de .001. Indique usted, si obtenemos una muestra de 3000 rondanas ¿Cuál será la probabilidad de encontrar un máximo de 3 defectuosas?

Este ejemplo, desde el punto de vista de su estructura, corresponde a una distribución binomial. Dados los volúmenes y probabilidades que se manejan es conveniente trabajar con Poisson, tal como se realiza a continuación. Debemos recordar que un máximo de tres defectuosas incluye la probabilidad de encontrar 0,1,2 y 3 piezas defectuosas.

Media. μ=np, . μ=3000(.001)=3

$P(x) = (\mu^{x} e^{-\mu})/x!=.$
$P(0) = (3^{0} e^{-3})/0!=. 0498$
$P(1) = (3^{1} e^{-3})/1!=. 1494$
$P(2) = (3^{2} e^{-3})/2!=. 2240$
$P(3) = (3^{3} e^{-3})/3!=. 2240$

La probabilidad de encontrar, un máximo de 3 piezas defectuosas está dado por la suma de las probabilidades arriba calculadas, es decir: 0.6472 ó 64.72% aproximadamente.

5.1.3 Hipergeométrica

Tanto la distribución de Poisson como la binomial tienen por condición que la probabilidad de éxito no se modifique de ensayo en ensayo. Líneas arriba vimos un ejemplo (el de la probabilidad de encontrar facturas con error) en que la modificación es tan pequeña que podemos hacer caso omiso de ella. En otros casos, sin embargo, la diferencia sí es significativa. En esos casos debemos utilizar la distribución hipergeométrica, tal como se puede observar en el siguiente ejemplo.

Un banco recibe un embarque de 20 impresoras para sus ejecutivos. Cuatro de entre las impresoras tienen fallas. El encargado de la instalación de los equipos en el banco somete a cinco impresoras elegidas al azar a una serie de pruebas y rechaza el embarque completo si más de una impresora resulta defectuosa (si solo una resulta defectuosa simplemente la manda a servicio correctivo). Indique usted cual es la probabilidad de que el embarque sea aceptado.

Podemos ver fácilmente que habiendo 4 máquinas defectuosas, la probabilidad de elegir una de ellas en la primera prueba es de 4/20 (0.20) y qué, si esa primera, efectivamente sale defectuosa la probabilidad de elegir una segunda defectuosa es de 3/19 (ó .1579). Ni con la mejor voluntad podemos considerar que ambas probabilidades son iguales. En estos casos se aplica la distribución hipergeométrica. Esta distribución tiene la siguiente fórmula:

$P(x)=[{}_{k}C_{x}\,{}_{(N-k)}C_{(n-x)}/{}_{N}C_{n}]$

En esta fórmula la C corresponde al concepto de combinaciones que el alumno ya estudió en las reglas de conteo. Las demás literales se explican a continuación.

a) N. Número total de elementos de la población.
b) k. Numero de elementos de la población que tienen la característica que denominamos como acierto.

c) Por ello N-k es el número de elementos de la población que no se consideran aciertos.
d) n es el número de elementos que se seleccionan como muestra de entre los N elementos de la población.
e) x es el número de aciertos de la muestra.

Para el problema que nos ocupa, si definimos como acierto al hecho de encontrar una máquina defectuosa, las literales anteriores tienen los siguientes valores: N=20; k=4; n=5. El lote será aceptado si se encuentran 0 ó 1 aciertos y será rechazado si se encuentran 2, 3 ó 4 aciertos. Dado que al calcular la probabilidad de aceptación debemos de calcular la probabilidad de cero aciertos y sumarle la probabilidad de 1 acierto, cada una la trabajaremos trabajaremos por separado y después realizaremos la adición.

$P(0)= [4C0\ (20\text{-}4)C(5\text{-}0)/20C5]=0.2817$

$P(1)= [4C1\ (20\text{-}4)C(5\text{-}1)/20C5]= 0.4696$

La probabilidad de aceptar el embarque es la probabilidad de 0 aciertos más la probabilidad de un acierto, es decir 0.2817+0.4696=0.7513 o aproximadamente el 75%.

5.2 Distribuciones de probabilidad continuas.

En los ejemplos anteriores los valores que podía tomar la variable aleatoria eran cero o un numero natural:1,2,3..... Existen situaciones en las que la variable aleatoria puede tomar cualquier número real. Para esos casos se utilizan las distribuciones de probabilidad continuas, de las que la curva normal es la más importante y tiene numerosas aplicaciones en la contaduría y la administración.

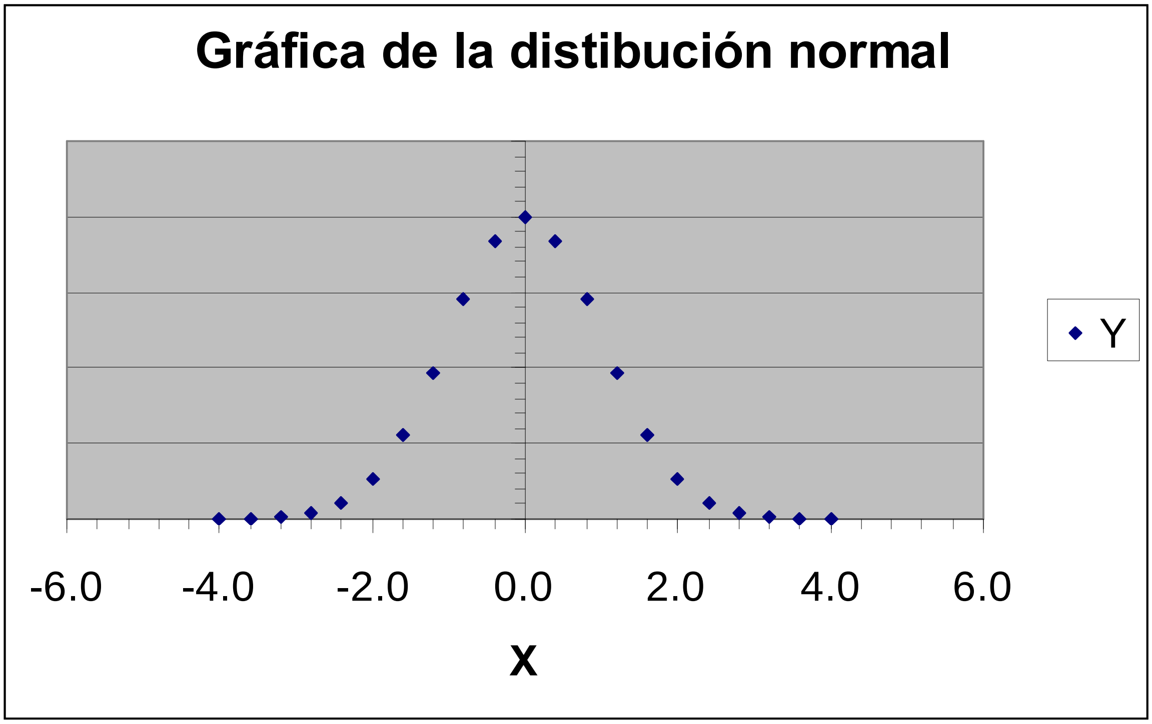
5.2.1 Normal

Esta distribución de probabilidad también es conocida como “Campana de Gauss”; lo primero por la forma que tiene su gráfica y los segundo por el matemático que la desarrolló. Su función aparece a continuación. Tal vez le de la impresión al alumno de ser un tanto complicada. No debe preocuparse por ello, pues para efectos de los dos cursos de estadística que cursa en nuestra facultad, no es necesario usarla de manera analítica, sino comprender intuitivamente su significado. De cualquier manera se dará una breve explicación de la misma para efectos de una mejor comprensión del tema.

$$y = (1/\sigma\sqrt{2\Pi})e^{-[(x-\mu)^2]/2\sigma^2}$$

En esta función todos los términos son conocidos por el estudiante. La “y” es la ordenada de las coordenadas rectangulares cartesianas que el alumno ya conoce y que representa la altura sobre el eje “x”. La propia x es la abscisa en este sistema de coordenadas. Π o “pi” es 3.14159..., “e” corresponde a la base de los logaritmos naturales que el estudiante ya tuvo ocasión de conocer en la distribución de Poisson. Los símbolos “σ” y “μ” corresponden a la desviación estándar y la media que ya se vieron en el primer tema de esta materia. Podemos decir que esta es la expresión de la ecuación normal, de la misma manera que y=mx+b es la expresión de la ecuación de la recta (en su forma punto-pendiente). Así como podemos sustituir m por cualquier pendiente (por ejemplo 4) y b por cualquier ordenada al origen (por ejempo 2) para obtener una ecuación particular (en este caso y=4x+2); de la misma manera podemos sustituir sigma y mu por cualquier par de valores para obtener un caso particular de la función normal. Si lo hacemos de esa manera,(por ejemplo, dándole a la media un valor de cero y a la desviación estándar un valor de 1) podemos irle asignando valores a “x” (por ejemplo de –4 a 4) para calcular los valores de “y”. Una vez teniendo los valores de cada punto, es fácil graficar en el plano cartesiano toda la colección de los mismos. Obtendremos una curva de forma acampanada. A continuación se muestran tanto los puntos como la gráfica para estos valores.

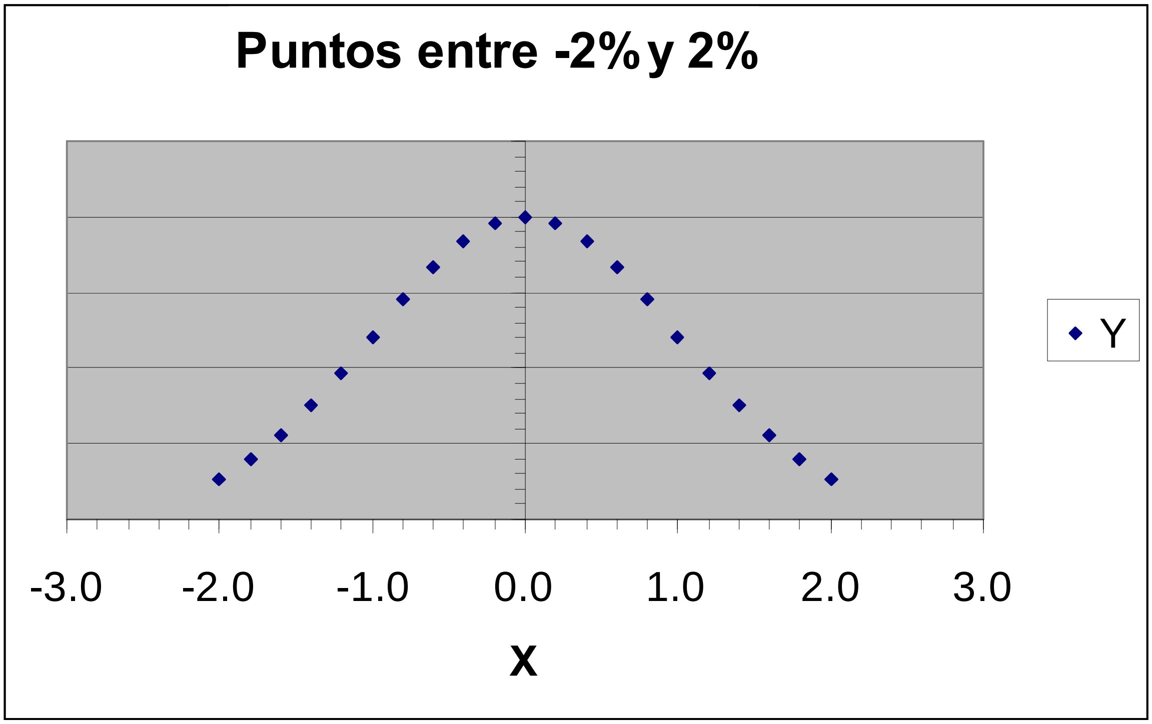
X	Y
-4.0	0.00013
-3.6	0.00061
-3.2	0.00238
-2.8	0.00792
-2.4	0.02239
-2.0	0.05399
-1.6	0.11092
-1.2	0.19419
-0.8	0.28969
-0.4	0.36827
0.0	0.39894
0.4	0.36827
0.8	0.28969
1.2	0.19419
1.6	0.11092
2.0	0.05399
2.4	0.02239
2.8	0.00792
3.2	0.00238
3.6	0.00061
4.0	0.00013

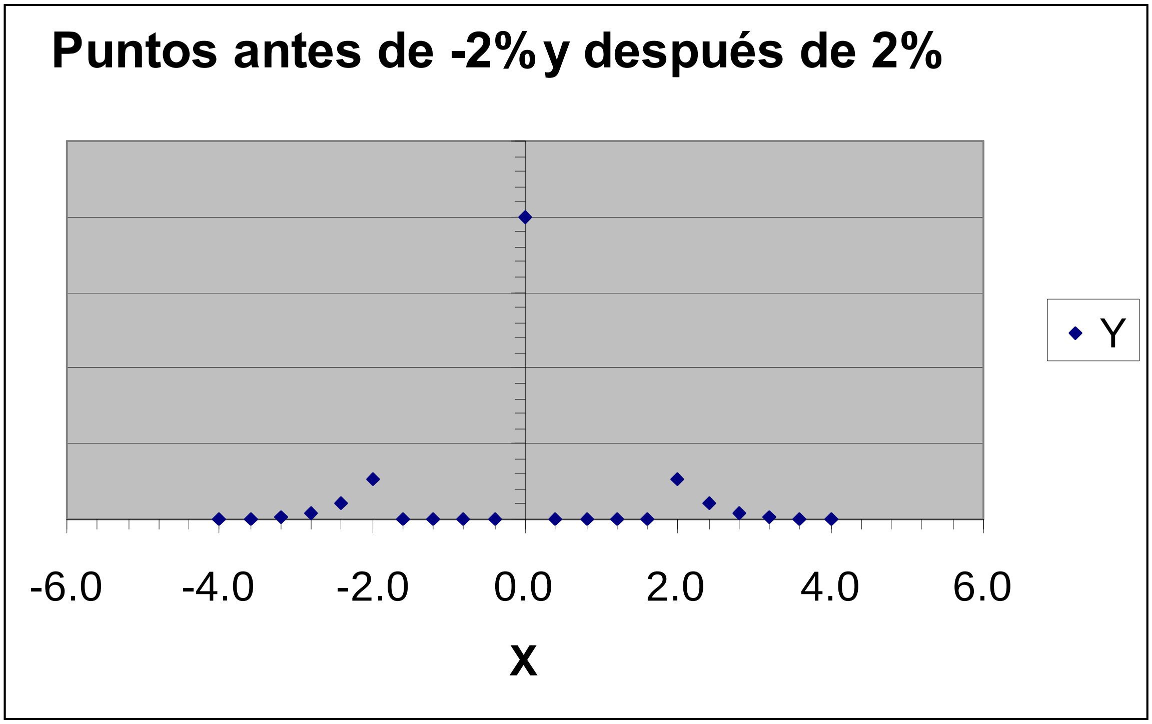


Es importante mencionar que el área que se encuentra entre la curva y el eje de las abscisas es igual a la unidad o 100%.. La curva normal es simétrica en relación con la media. Esto quiere decir que la parte de la curva que se encuentra a la derecha de la curva es una imagen a espejo de la parte que se encuentra a la izquierda de la misma. Esto es importante para efectos de trabajo, pues el área que se encuentra a la izquierda de la media es igual a la que se encuentra a la derecha de la misma y ambas son iguales a 0.5 o el 50%.

Para trabajar con la distribución normal debemos unir los conceptos de área bajo la curva y de probabilidad. La probabilidad de un evento es proporcional al área bajo la curva normal que cubre ese mismo evento. Un ejemplo nos ayudará a entender estos conceptos.

Para aprovechar la gráfica que ya tenemos, vamos a suponer que el rendimiento de las acciones en al bolsa de valores en un mes determinado tuvo una media de 0% con una desviación estándar de 1%. (Esto se asimila a lo dicho sobre nuestra gráfica de una distribución normal con una media de cero y una desviación estándar de 1). De acuerdo con esta información, es mucho más probable encontrar acciones que ganen entre –2% y 2%, que acciones que ganen más o menos (ver las siguientes gráficas). El valor exacto de las áreas y, por tanto, de las probabilidades de ocurrencia requeriría de herramientas de cálculo integral, pues se trata de calcular áreas bajo curvas. Dado que se necesitaría calcular una integral distinta para cada media y cada desviación estándar diferente con la que nos topáramos, esto volvería nuestro trabajo bastante engorroso. Afortunadamente existe una alternativa, que es la del uso de una tabla que contiene las áreas bajo la curva normal y que se encuentra en la mayoría de los libros de estadística. También se puede generar por medio de una hoja de cálculo electrónica. En el apéndice de esta unidad, al final de la misma, se encuentra una tabla de la normal, que se conoce como distribución normal estándar y que tiene una media igual a 0 y una desviación estándar igual a 1. En los próximos párrafos aprenderemos a utilizar la tabla de la distribución normal estándar.





Esta tabla nos muestra el área que hay entre la media y un conjunto e valores seleccionados de una variable a la que llamamos "Z". Al examinar la tabla (el alumno puede consultar la que aparece en el apéndice de esta unidad o la de cualquier libro de estadística), podemos observar que la columna de la extrema izquierda tiene, precisamente el encabezado de "Z". Los valores de la misma se van incrementando hacia debajo de un décimo en un décimo a partir de 0.0 y hasta 4.2 (en nuestra tabla, en otras puede variar). El primer renglón de la tabla también tiene valores de "Z" que se incrementan de un centésimo en un centésimo de .00 a .09. Este arreglo nos permite encontrar los valores del área bajo la curva para valores de "Z" de 0.0 a 4.29. Así podemos ver que para Z=1 (primera columna del cuerpo de la tabla y renglón de 1.0), el área es de .34134. Esto quiere decir, que entre la media y una unidad de z a la derecha tenemos el 34.134% del área de toda la curva. Por el mismo procedimiento podemos ver que para un valor de Z=1.96 (renglón de Z=1.9 y columna de Z=.06), tenemos el .47500 del área. Esto quiere decir que entre la media y una Z de 1.96 se encuentra el 47.5% del área bajo la curva normal. De esta manera, para cualquier valor de Z se puede encontrar el área bajo la curva.

La manera mediante la cual este conocimiento de la tabla de la normal puede aplicarse a situaciones más relacionadas con nuestras profesiones se puede ver en el siguiente ejemplo.

Una empresa tiene 2000 clientes. Cada cliente debe en promedio $7000 con una desviación estándar de $1000. La distribución de los adeudos de los clientes es aproximadamente normal. Diga usted cuantos clientes esperamos que tengan una adeudo entre $7000 y $8,500.

Nos damos cuenta de que valores como 7000 o 1000 no aparecen en la tabla de la normal. Es allí donde entra la variable Z. Esta variable nos permite convertir los datos de nuestro problema en números que podemos utilizar en la tabla. La manera de hacerlo se muestra a continuación.

La manera como convertimos las variables de nuestro problema en la variable estandarizada Z, es aplicando la siguiente fórmula:

$Z=(x-\mu)/\sigma$. En nuestro caso, nos damos cuenta de que buscamos el área bajo la curva normal entre la media (7000) y el valor de 85000. sustituyendo los valores nos encontramos con:

$Z= (8500-7000)/1000 = 1.5$.

Buscamos en la tabla de la normal el área bajo la curva para Z= 1.5 y encontramos 0.43319. Esto quiere decir que aproximadamente el 43% de los saldos de clientes están entre los dos valores señalados.

En caso de que el cálculo de Z arroje un número negativo. Esto lo único que significa es que estamos trabajando a la izquierda de la media. El siguiente ejemplo ilustra esta situación.

En la misma empresa del ejemplo anterior deseamos saber que proporción de la población estará entre $6500 y $7000.

Como en el caso anterior, nos damos cuenta de que nos piden el valor de un área entre la media y otro número. Volvemos a calcular el valor de Z

Z=(6500-7000)/1000= -.5.

Este valor de Z no significa un área negativa ni alguna otra cosa exótica. Lo único que indica es que el área buscada se encuentra a la izquierda de la media. Buscamos el área bajo la curva en la tabla para Z= .5 (positivo, la tabla no maneja números negativos) y encontramos que el área es de 0.19146. Es decir que la proporción de saldos entre los dos valores considerados es de aproximadamente el 19%.

No siempre el área que se necesita bajo la curva normal se encuentra entre la media y cualquier otro valor. Frecuentemente son valores a lo largo de toda la curva. Por ello es buena idea hacer un pequeño dibujo de la normal para localizar el o las áreas que se buscan. Esto facilita mucho la visualización del problema y, por lo mismo, su solución. A continuación se presenta un problema en el que se ilustra esta técnica.

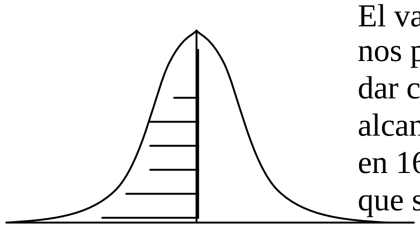
Una pequeña población recibe, durante la época de sequía, la dotación de agua potable mediante pipas que surten del líquido a la cisterna del pueblo una vez a la semana. El consumo semanal medio es de 160 metros cúbicos con una desviación estándar de 20 metros cúbicos. Indique usted cual será la probabilidad de que el suministro sea suficiente en una semana cualquiera si se surten:

a) 160 metros cúbicos
b) 180 metros cúbicos
c) 200 metros cúbicos

d) Indique asimismo cual será la probabilidad de que se acabe el agua si una semana cualquiera surten 190 metros cúbicos.

A continuación se presenta la solución de cada uno de los incisos.

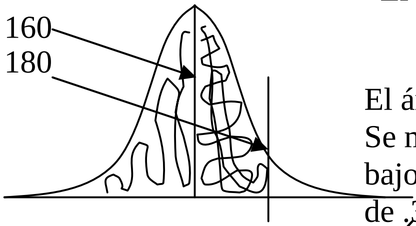
a) 160 metros cúbicos.



El valor de Z en este caso sería de cero: Z=(160-160)/20. Esto nos puede desconcertar un poco; sin embargo nos podemos dar cuenta de que si se surten 160 metros cúbicos, el agua alcanzará si el consumo es menor que esa cifra. La media está en 160. Por ello el agua alcanzará en toda el área de la curva que se muestra rayada. Es decir, toda la mitad izquierda de la curva. El área de cada una de las mitades de la curva es de .5, por tanto la probabilidad buscada es también de .5.

b) 180 metros cúbicos

El valor de Z es de1: Z=(180-160)/20= 1

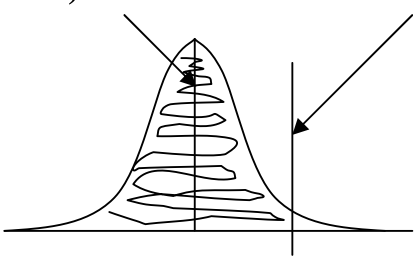


El área que se busca es la que está entre la media (160) Y 180. Se marca con una curva en el diagrama Si buscamos el área bajo la curva en la tabla de la normal, encontraremos el valor de .34134. Sin embargo debemos agregarle toda la mitad izquierda dela curva (que por el diseño de la tabla no aparece). Ese valor, como ya se comentó es de .5. Por tanto, el valor buscado es de .5 más .34134. Por ello la probabilidad de que el agua alcance si se surten 180 metros cúbicos es de .84134, es decir, aproximadamente el 84%.

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.0	**0.34134**	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214

c) 200 metros cúbicos

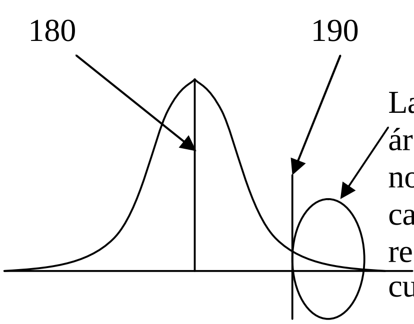
d) 180 200



El área buscada se señala enj el dibujo. Incluye la primera mitad de la curva y la parte de la segunda mitad (la derecha) que se encuentra entre la media y 200. Ya sabemos que la primera mitad de la curva tiene un área de 0.5. Para la otra parte tenemos que encontrar el valor de Z y buscar el área correspondiente en la tabla. Z=(200-160)/20=2 es de 0.47725. Al sumar las dos partes nos queda .97725. Es decir, si se surten 200 metros cúbicos hay una probabilidad de casi 98% de que el agua alcance.

e) Indique asimismo cual será la probabilidad de que se acabe el agua si una semana cualquiera surten 190 metros cúbicos.

La probabilidad de que se termine el agua en estas condiciones se encuentra representada en la siguiente figura. El cálculo de la probabilidad de que ocurra se encuentra a continuación.



La probabilidad de que falte el agua está representada por el área en la cola de la distribución, después del 190. La tabla no nos da directamente ese valor. Para obtenerlo debemos de calcular Z para 190 y el valor del área entre la media y 190 restársela a .5 que es el área total de la parte derecha de la curva. Z=(190-160)/20= 1.5. El área para Z= 1.5 es de .43319.

Por tanto, la probabilidad buscada es .-43319=.06681 o aproximadamente e. 6.7%.

Búsqueda de Z cuando el área bajo la curva es conocida.

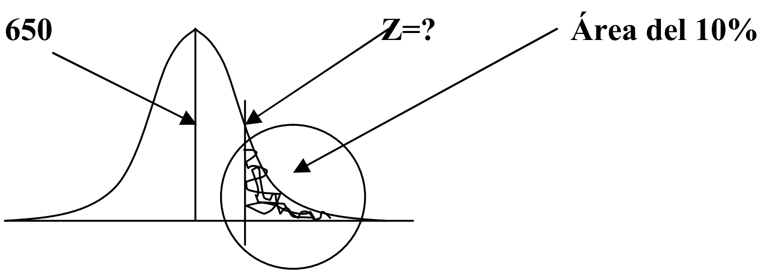
Frecuentemente el problema no es encontrar el área bajo la curva normal mediante el cálculo de Z y el acceso a la tabla para buscar el área ya mencionada. Efectivamente, a veces debemos enfrentar el problema inverso. Conocemos dicha área y deseamos conocer el valor de la variable que lo verifica. El siguiente problema ilustra esta situación.

Una universidad realiza un examen de admisión a 10,000 aspirantes para asignar los lugares disponibles. La calificación media de los estudiantes es de 650 puntos sobre 1000 y la desviación estándar es de 100 puntos y las calificaciones siguen una distribución normal. Indique usted qué calificación mínima deberá de tener un aspirante para ser admitido si:

a) Se aceptará al 10% de los aspirantes con mejor calificación.
b) Se aceptará al 5% de aspirantes con mejor calificación.

Resolución del inciso "a".

Si hacemos un pequeño esquema de la curva normal, los aspirantes aceptados representan el 10% del área que se acumula en la cola derecha de la distribución. El siguiente esquema nos dará una mejor idea.



El razonamiento que se hace es el siguiente: Si el área que se busca es el 10% de la cola izquierda, por lo mismo el área que debemos de buscar en la tabla es lo más cercano posible al 40%, esto es .4000 (esto se busca en el cuerpo de la tabla, no en los encabezados que representan el valor de Z. Este es el valor de **0.39973** y se encuentra en el renglón donde aparece un valor para Z de 1.2 y en la columna de 0.08. Eso quiere decir que el valor de Z que más se aproxima es el de 1.28. No importa si al valor de la tabla le falta un poco o se pasa un poco; la idea es que sea el más cercano posible.

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	**0.39973**	0.40147

Si ya sabemos el valor de Z, calcular el valor de la calificación (es decir “x”) es un problema de álgebra elemental y se trabaja despejando la fórmula de Z, tal como a continuación se indica.

Z= (x-650)/100. El lector puede observar que ya sustituimos los valores de la media y de la desviación estándar. Ahora sustituimos el valor de Z y nos queda:

1.28 =(x-650)/100. A continuación despejamos el valor de x.
1.28(100)=128=x-650
128+650= x
Por lo mismo x=650+128; x=778.

En estas condiciones los aspirantes comenzarán a ser admitidos a partir de la calificación de 778 puntos en su examen de admisión.

Resolución del inciso b.

El razonamiento es análogo al del inciso “a”. Solamente que ahora no buscamos que el área de la cola derecha sea el 10% del total sino solamente el 5% del mismo. Esto quiere decir que debemos buscar en la tabla en complemento del 5%, es decir 45% 0.45000. Vemos que el valor más cercano se encuentra en el renglón de Z de 1.6. y en la centésima 0.04

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	**0.44950**	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449

Esto nos indica que el valor de z que buscamos es el de 1.64. El despeje de x se lleva a efecto de manera análoga al inciso anterior tal como a continuación se muestra.

1.64 =(x-650)/100. A continuación despejamos el valor de x.
1.64(100)=128=x-650
164+650= x
Por lo mismo x=650+164; x=814.

En caso de que se desee mayor precisión se puede recurrir a interpolar los valores (por ejemplo, en este caso entre 1.64 y 1.65) o buscar valores más precisos en paquetes estadísticos de cómputo u hojas de cálculo electrónicas .

APÉNDICE

DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR.
ÁREA BAJO LA CURVA.

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41308	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900
3.1	0.49903	0.49906	0.49910	0.49913	0.49916	0.49918	0.49921	0.49924	0.49926	0.49929
3.2	0.49931	0.49934	0.49936	0.49938	0.49940	0.49942	0.49944	0.49946	0.49948	0.49950
3.3	0.49952	0.49953	0.49955	0.49957	0.49958	0.49960	0.49961	0.49962	0.49964	0.49965
3.4	0.49966	0.49968	0.49969	0.49970	0.49971	0.49972	0.49973	0.49974	0.49975	0.49976
3.5	0.49977	0.49978	0.49978	0.49979	0.49980	0.49981	0.49981	0.49982	0.49983	0.49983
3.6	0.49984	0.49985	0.49985	0.49986	0.49986	0.49987	0.49987	0.49988	0.49988	0.49989
3.7	0.49989	0.49990	0.49990	0.49990	0.49991	0.49991	0.49992	0.49992	0.49992	0.49992
3.8	0.49993	0.49993	0.49993	0.49994	0.49994	0.49994	0.49994	0.49995	0.49995	0.49995
3.9	0.49995	0.49995	0.49996	0.49996	0.49996	0.49996	0.49996	0.49996	0.49997	0.49997
4.0	0.49997	0.49997	0.49997	0.49997	0.49997	0.49997	0.49998	0.49998	0.49998	0.49998
4.1	0.49998	0.49998	0.49998	0.49998	0.49998	0.49998	0.49998	0.49998	0.49999	0.49999
4.2	0.49999	0.49999	0.49999	0.49999	0.49999	0.49999	0.49999	0.49999	0.49999	0.49999

NUMEROS ÍNDICE

1. Introducción

Los gobiernos y otras entidades publican diversas clases de índices. Estos están elaborados con el propósito de presentar de manera sencilla el comportamiento de alguna o algunas variables de interés. El lector seguramente habrá escuchado mencionar el índice nacional de precios al consumidor, el índice de precios y cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores o el Dow Jones que se relaciona con el mercado de valores de Nueva York.

Estos índices y otros que el lector puede conocer, son muy útiles para los profesionales de contaduría y administración, pues son elementos de juicio para la toma de decisiones. Es importante mencionar que un solo numero índice nos arroja muy poca información. Por ejemplo, si alguien nos dice que el IPC de la Bolsa Mexicana de Valores cerro hoy a 4900 puntos, eso nos dice muy poco. Lo importante es como se ha comportado el índice a lo largo de los días. (¿subió? ¿bajó?) es decir, la información de los índices nos es útil en cuanto podemos ver su comportamiento en el tiempo. Podemos decir que un índice conforma una serie de tiempo. Una serie de tiempos es un conjunto de datos recopilados y utilizados en orden cronológico. De esta manera el estudio de un índice a través del tiempo nos proporciona un a idea de la dinámica de los fenómenos que el propio índice contempla.

6.2 Construcción de un Índice

Dado que lo que lo importante de un índice es observar su comportamiento en el tiempo, la elección del periodo que va a servir de base es muy importante. Vamos a suponer que deseamos desarrollar un índice que refleje la ocupación de los hoteles y que definimos nuestro índice de ocupación como:

Porcentaje de ocupación de 1980 = 100.

Si el año de 1980, fue bueno, entonces la mayoría de los otros años se vera “mal” en comparación, pues tendrán valores menores a cien. En cambio, si el año de 1980 fue muy malo, la mayoría de los años se vera “bien” pues tendrá valores mayores a cien. Si deseamos construir un índice que no resulte engañoso, debemos elegir un periodo base que no sea ni exageradamente bueno ni exageradamente malo. Usualmente el índice del periodo base es igual a 100.

Otra consideración que debemos hacer al construir un numero índice es que la razón básica de su utilización, es la de resumir circunstancias, a veces muy complejas, en un solo numero fácil de comprender y de manejar. Por ello debemos de tomar la decisión de lo que queremos reflejar en el.

Si deseamos reflejar la fluctuación en la cantidad de bienes o servicios seleccionados (cantidad de automóviles, cantidad de consultas medicas, etc) debemos construir un índice de cantidad.

Si, en cambio, deseamos reflejar los cambios en el valor total de un grupo de bienes o servicios, crearemos un índice de valor. Por ejemplo: valor total de los automóviles vendidos en un año, valor total de los servicios médicos proporcionados en un año.

Cuando usamos un índice para reflejar un solo bien, estaremos construyendo un índice simple. En cambio, si con juntamos varios bienes en el mismo índice, estaremos trabajando un índice agregado.

A veces no existe un único índice que satisfaga nuestras necesidades pero existen dos o tres (o mas) de ellos que contemplan la información que necesitemos. En ese caso podemos con juntas estos índices para formar el que nos interesa. Esto es conocido como índice compuesto. A continuación se explica la manera de construir los índices antes mencionados.

6.3 Tipos de índices

De acuerdo con lo comentado en la sección anterior, existen diversos tipos de índices útiles para el profesionista en contaduría y administración.

A continuación se explican algunos de ellos.

6.3.1 Índice de cantidad

Este índice mide los cambios en las unidades de un bien de acuerdo a su origen, destino, utilización, etc. Todo ello a través del tiempo.

La expresión que en seguida aparece nos muestra el manejo formal de este tipo de índices.

$$IQ = \frac{Qi}{Qb}$$

En donde Qi es la cantidad del bien en el periodo que se desea obtener y Qb en la cantidad del bien que se toma como base. A continuación se presenta un ejemplo que nos permitirá una mejor comprensión de los índices de cantidad.

Ejemplo 1

Una empresa que vende autobuses de pasajeros ha decidido, establecer un índice de cantidades vendidas. Se ha decidido tener como periodo base el de junio de 2001. en la primera columna, se muestran las unidades vendidas y en la segunda el índice propiamente dicho. Para los renglones marcados con asterisco, se ilustra debajo de la tabla la manera como se calculó el índice.

VENTAS	(UNIDADES)	INDICE
Marzo 01	93	109.41
Abril 01	81	95.29*
Mayo 01	78	91.76
Junio 01	85	100.00
Julio 01	90	105.88
Agosto 01	94	110.59
Septiembre 01	84	98.82
Octubre 01	89	104.71**
Noviembre 01	92	108.24

$$* \frac{81}{85} 100 = 95.29 \qquad ** \frac{89}{85} 100 = 104.71$$

6.3.2 Índice de valor

Este índice mide en unidades monetarias (pesos, dólares, etc.) el valor (ya sea de costo o de precio de venta, según el caso) de un conjunto de bienes y/o servicios. Es importante mencionar que en este tipo de índices se toma en cuenta, tanto el valor de cada bien que se incluye en el índice. La siguiente expresión nos da la manera de calcular el índice de valor para cualquier periodo “i”.

$$IV = \frac{\sum PiQi}{\sum PbQb}(100)$$

Donde Pi Qi son respectivamente el precio de un bien (o su costo, como ya se menciono) y Pb Qb son el precio y el numero de unidades que se considera en el número de unidades que se considera en el año base, tal como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2

Una empresa que fabrica automóviles y camiones debe comparar su producción del ultimo mes con la del mes base, que, para nuestro ejemplo supondremos que fue el de abril d 1995.

Producción del mes base	Qb Cantidad del mes base	Pb Costo unitario mes base	Pb Qb
Auto modelo 1	200	93000	18,600,000
Auto modelo 2	250	142,000	35,500,000
Auto modelo 3	330	82,000	27,060,000
Camión modelo 1	110	240,000	26,400,000
Camión modelo 2	90	290,000	26,100,000
	Σ Pb Qb		133,660,000

El último mes ya no se producía el modelo 1 de automóvil y se había introducido el modelo 4. Los datos se dará a continuación.

Producción del último mes

	Qi	Pi	Pi Qi
Auto modelo 2	220	154,000	33’880,000
Auto modelo 3	210	86,000	18’060,000
Auto modelo 4	300	99,000	29’700,000
Camión modelo 1	130	251,000	32’630,000
Camión modelo 2	120	302,000	36’240,000
	Σ Pi Qi		150’510,000

Con los anteriores datos ya podemos obtener el índice de valor que es:

$$IV = \frac{150,510,000}{133,660,000} = 112.61$$

6.3.3 Índice agregado e índice simple

Un índice agregado es aquel que agrupa o resume el comportamiento de varios bienes o servicios. Un índice simple es aquel que se utiliza para describir el comportamiento de un solo bien o servicio. El ejemplo 1 de la sección 6.3.1 nos habla de un índice simple, en tanto que el ejemplo 2 de la sección 6.3.2 es un índice agregado; nos podemos dar cuenta que en el ejemplo 1 nos habla únicamente de autobuses en tanto que el ejemplo 2 trata de varios bienes, pues se manejan diversos modelos de coches y camiones, es decir, varios artículos.

Para reafirmar la diferencia entre un índice simple y uno agregado, a continuación se presentan los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3

Índice simple

El precio de la tonelada de maíz fluctúa de acuerdo a las condiciones del mercado internacional. A continuación se listan los precios por tonelada al cierre de algunos meses; se señala el mes base y se indican los índices correspondientes.

Mes	Año	S / tonelada	Índice
Febrero	X 2	1210	100.83
Marzo	X 2	1180	98.33
Abril	X 2	1040	86.67
Mayo	X 2	1314	109.50
Junio	X 2	1200*	100.00
Julio	X 2	1190	99.17
Agosto	X 2	1220	101.67

* mes base

Ejemplo 4

Índice agregado

Un estudio indicó que para transportarse de su casa a la escuela, a la biblioteca u otro lugares, el estudiante universitario promedio utiliza los transportes que abajo se detallan y deseamos crear un índice del costo de transporte.

	Precios unitarios (periodo base)	Costo total
8 viajes en metro	$1.50	$12.00
6 viajes en pesera	$2.50	$15.00
4 viajes en autobús	$2.00	$ 8.00
2 viajes en taxi	$10.00	$20.00

El costo de transporte en la semana fue (en el periodo base) de $55.00 esto corresponde al 100 en nuestro índice de costo de transporte (ICT).

6 meses después se ratifican los precios unitarios, encontrándose lo siguiente.

		Viajes semana*	Costo total
Metro	$2.00	8	$16.00
Pesera	$2.00	6	$12.00
Autobús	$3.00	4	$12.00
Taxi	$9.00	9	$18.00

El costo del transporte en la semana fue $ 58.00

* De la tabla anterior

El índice de este periodo será: $ICT = \frac{58.00}{55.00}100$

$$ICT = 1.055$$

6.3.4 Índice Compuesto

Se puede presentar la posibilidad de que no exista un índice ya publicado por alguna agencia de gobierno o institución de investigación privada que satisfaga las necesidades particulares de una empresa y, sin embargo existen dos o mas índices que si están publicados y que satisfacen, por partes, las necesidades de información de esta empresa.

Vamos a suponer que una empresa tiene el 70% de sus negocios en la ciudad de México y un 30% de ellos en la ciudad de Puebla. Para tomar decisiones acertadas el gerente de esta empresa necesita un índice de precios que combine ponderadamente los índices de precios de ambas ciudades. A continuación se da un ejemplo de cómo lograrlo.

Índice de precios al consumidor de la ciudad de México en abril de 20x2 214.382

Índice de precios al consumidor de la ciudad de Puebla en abril de 20x2 208.214

Índice compuesto = (0. 70) 214.382 + (0.30) 208.214 ← Índice de la Cd. De Puebla

Peso del índice De la Cd. De Puebla

Peso del Índice De la Cd. De México

Índice de la Cd. de México

Índice compuesto = 150.067 + 62.464 = 212.531

Este ultimo valor es el índice compuesto lo podemos generar mediante la siguiente formula:

$$IC = \sum IiPi$$

En donde:

IC Es el índice compuesto

Ii	Es cada uno de los índices que queremos que tomen parte del índice que queremos que tomen parte del índice Compuesto.
Pi	Es el peso o proporción que se da a ese índice en el propio índice compuesto.

Σ es el signo de sumatoria que ya conocemos

Debemos hacer mención al hecho de que la suma de todos los pesos debe ser igual a la unidad, es decir $\Sigma\ Pi = 1$

Para comprender mejor estos conceptos, a continuación se presenta el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5:
El gerente de la empresa que tenia negocios en Puebla y la Cd. De México, abrió recientemente sucursal en Querétaro.
Ahora sus negocios se reparten de la siguiente manera:

50% en la Cd. de México; 30% en Puebla y 20% en Querétaro. Los índices de precios de las tres ciudades se detallan a continuación para el mes de junio de 20X2.

		Ii	Pi	Ii Pi
I.P.C.	Cd México	221.310	0.50	110.655
I.P.C	Puebla	215.240	0.30	64.572
I.P.C	Querétaro	218.700	0.20	43.740
			Σ Ii Pi =	218.967

El índice compuesto es ahora: IC =218.967

6.4 Cambio del periodo base

En algunas ocasiones es conveniente cambiar el periodo base. Esto sucede, sobre todo en índices como los de población o de precios que tienen la particularidad de ir creciendo con el tiempo. El cambio se realiza mediante proporciones, también conocidas como “regla de tres” directas. El siguiente ejemplo nos muestra la manera de hacerlo.

Ejemplo 6.

En un país el índice nacional de precios al consumidor tiene como base julio de 1994. Es decir, que julio de 1994 tiene valor de 100. a continuación se dan algunos ejemplos de índices de diferentes periodos.

PERIODO	INPC
JULIO 1990	60.61
JULIO 1992	85.43
JULIO 1994	100.00
JULIO 1996	183.50
JULIO 1998	253.50
JULIO 2000	326.60
JULIO 2002	362.53

Como ya resulta incomodo el manejo de un índice tan alejado de 100 las autoridades deciden fijar como nuevo año base a julio de 2000. el cambio del periodo base se lleva a cabo mediante proporciones de la siguiente manera:

$$IN_I = \frac{IA_I}{IA} \quad 100$$

Donde: IN_i es el índice numero del periodo i

IA_i es el índice anterior del periodo i

IA_b es el índice anterior del periodo base

En la siguiente tabla aparece el índice anterior, el calculo y el índice numero para los periodos ya ejemplificados arriba.

PERIODO	Índice Antiguo	Cálculo	Índice Nuevo
JULIO 1990	60.61	(60.61 /326.60) 100	18.56
JULIO 1992	85.43	(85.43 / 326.60) 100	26.16
JULIO 1994	100.00	(100.00 / 326.60) 100	30.62
JULIO 1996	183.50	(183.50 / 326.60) 100	56.18
JULIO 1998	253.50	(253.50 / 326.60) 100	77.62
JULIO 2000	326.60	(326.60 / 326.60) 100	100.
JULIO 2002	362.53	(362.53 / 326.60) 100	111.00

Los demás periodos se actualizaran de acuerdo con la misma mecánica.

6.5 Aplicaciones

En esta sección veremos algunas aplicaciones de los índices. En primer lugar daremos una idea como se trabaja un índice de precios al consumidor, posteriormente explicaremos como se hace para deflacionar una serie de tiempo y, por último veremos como funciona el índice de precios y cotizaciones en de la Bolsa Mexicana de Valores.

6.5.1 Índice de precios al consumidor

Todos los índices de precios al consumidor son índices agregados. Para entender como se trabaja un índice de precios al consumidor, haremos uso de un ejemplo simplificado.

Supongamos que vivimos en una pequeña población que tiene un solo almacén general para surtir a los pobladores de todos los bienes, tanto de primera necesidad como suntuarios. En esta población deseamos comenzar a llevar un índice de precios al consumidor. Para hacerlo, lo primero que necesitamos hacer es definir una canasta de bienes y servicios que la población en general consume o compra con regularidad. La conformación de esta canasta y el peso de cada artículo es fuente de polémica en todos los casos. En nuestro caso supondremos que ya nos pusimos de acuerdo y que la canasta de consumo mensual familiar aparece en la siguiente tabla. El estudiante debe comprender que se trata de un ejemplo simplificado para facilitar la comprensión.

ARTÍCULO	PESO
Fríjol	10 Kg
Maíz	10 Kg
Jitomate	4 Kg
Carne de res (bistec)	2 Kg
Pollo (entero sin cabeza)	3 Kg
Zapatos	1/3 par *
Pantalón	¼ unidad *
Televisión color 21”	1/60 *
Refrigerador mediano	1/20*
Automóvil compacto	1/60*
Gasolina	100 litros

* Los bienes que llamamos “de consumo duradero” no se acaban en un mes, como seria el caso del maíz o del pollo. En este caso estaremos indicando que una televisión dura 5 años (60 meses) y que un refrigerador dura 10 años (120 meses) por lo que le asignamos a cada mes una parte proporcional de su valor.

El siguiente paso para construir nuestro índice será investigar en el almacén general el precio de cada uno de los artículos del índice que deseamos construir en la siguiente tabla. En la misma tabla aparecen los precios de los artículos mes después, junto con el cálculo del índice correspondiente.

Enseguida de la tabla aparece la explicación de cómo construimos el índice.

	MES BASE			MES SIGUIENTE	
ARTÍCULO	PESO Ó UNIDAD	PRECIO UNITARIO $	COSTO POR ARTÍCULO	PRECIO UNITARIO $	COSTO POR ARTÍCULO
Fríjol	10 Kg	2.20	22.00	2.30	23.00
Maíz	10 Kg	16.00	160.00	16.00	160.00
Jitomate	4 Kg	8.00	32.00	8.50	34.00
Carne de res (bistec)	2 Kg	42.00	84.00	4.00	88.00
Pollo (entero sin cabeza)	3 Kg.	30.00	90.00	28.00	84.00
Zapatos	1/3 par *	300.00	100.00	300.00	100.00
Pantalón	¼ unidad *	200.00	50.00	210.00	52.50
Televisión color 21”	1/60 *	2,100.00	35.00	2,050.00	34.17
Refrigerador mediano	1/20*	3,000	25.00	3,000.00	25.00
Automóvil compacto	1/60*	40,000	666.67	40,000.00	666.67
Gasolina	100 litros	6.00	600.00	6.05	605.00
		Total	$1,864.67		$ 1,872.34

* Es el precio estimado del automóvil menos el valor de rescate, es decir, la pérdida de valor que sufre mientras su dueño lo utiliza.

El valor de nuestros artículos (con su peso correspondiente) en el mes de base fue de $1,864.67 y en el mes siguiente fue de $ 1,872.34 de acuerdo con la metodología de construcción del índice que ya vimos, los $ 1,864.67 conforman el 100 de nuestro periodo base. Entonces nuestro índice del mes siguiente es:

$$IPC = \frac{1872.34}{1864.67} \times 100 = 100.41$$

Podemos criticar razonadamente nuestro índice, el peso del medio de transporte (automóvil y gasolina) es de dos tercios del total, faltan muchos alimentos y el costo de la vivienda y la educación están completamente ausentes, Desde luego podemos perfeccionarlo, pero ya es un inicio.

Con este pequeño ejemplo el lector se podrá percatar de lo complicado que es construir un índice de esta naturaleza. Esta complicación se ve positivamente incrementada si consideramos que existen diversas calidades (por ejemplo pantalones de trabajo y de vestir o diversas calidades de carne o jitomate.). Si el estudiante tiene interés en ver como se construye el índice nacional de precios al consumidor, le recomendamos consultar la pagina de Internet del Banco de México, en la que viene una explicación muy completa al respecto.

6.5.2 Deflación de Series de Tiempo

Los precios de los artículos en general tienden a subir la mayor parte del tiempo. Es por ello que es difícil comparar datos monetarios procedentes de diferentes periodos. Los índices de precios nos pueden ayudar a expresar estas cifras de diferentes periodos en pesos de poder adquisitivo constante. Esto es muy sencillo de hacer y para explicarlo nos valdremos de un ejemplo.

Ejemplo 7

Una empresa tuvo las ventas totales que a continuación se indican en los años que a continuación se señalan. El Índice de Precios al Consumidor de la ciudad en la que se ubica, se muestran también.

AÑO	VENTAS (Miles de pesos)	ÍNDICE DE PRECIOS AL CONSUMIDOR
1996	823	134.20
1997	914	140.90
1998	920	149.36
1999	925	155.40
2000	972	163.90

A primera vista, las ventas de esta empresa han venido creciendo pero también la inflación ha crecido. Es difícil hacerse una idea de si las ventas en realidad (en pesos de poder adquisitivo constante) se han incrementado. Para averiguarlo podemos reexpresar las ventas de cualquier año utilizando la siguiente fórmula:

$$CR = CC\,\frac{IPCR}{IPCP}$$

Donde:

CR = Cantidad Reexpresada

CC = Cantidad en pesos Corrientes

IPCR = Índice de Precios al Consumidor del Periodo que deseamos tomar como Referencia

IPCP = Índice de Precios al Consumidor del Periodo cuyo valor deseamos Reexpresar

Así, si deseamos reexpresar las ventas de los 5 años en pesos de 1996* las operaciones y el resultado final aparecen en la siguiente tabla:

	CC		CR
Año	Ventas	IPCR / IPCP	Pesos de 1996
96	828	134.20/134.20	828.00
97	914	134.20/140.90	870.54
98	920	134.20/149.36	826.62
99	925	134.20/155.40	798.81
2000	972	134.20/163.90	795.87

*Este es el periodo que deseamos usar como referencia

Al ver muestra serie de datos reexpresada o “deflacionada” porque le quitamos la inflación de los años del 96 al 2000, podemos ver que las ventas solo se incrementaran de 96 a 97 y en los otros años, de hecho decrecieron.

No es forzoso tomar el 1er. año como periodo de referencia. Si deseamos expresar las ventas a pesos constantes del año 2000. El trabajo es el mismo, solamente que el periodo de referencia cambia. Las cifras individuales se modifican, pero las relaciones entre ellas no se alteran.

A continuación se muestran las ventas de nuestra empresa reexpresadas a pesos del año2000. Las operaciones se dejan como ejercicio para el estudiante:

Año	CR a pesos del 2000
1996	1011.25
1997	1063.20
1998	1009.56
1999	975.59
2000	972.00

Podemos ver si comparamos las ventas a precios de 1996 entre los años de 96 y 97 son 5.1% mayores que las del 96. Este mismo porcentaje se conserva para los mismos año, si utilizamos las ventas a precios del 2000. A eso nos referimos cuando hablemos de que las relaciones se conservan.

6.5.3 IPC BMV

El Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores es un indicador del comportamiento del mercado de valores (acciones) de la Bolsa Mexicana de Valores.

Se obtiene mediante el promedio ponderado de los precios de las acciones de una muestra de las emisoras que se consideran como representativas del comportamiento del mercado. La ponderación se lleva a cabo conforme a los montos operados (comprados y vendidos) por cada una de las emisoras que se maneja en la muestra.

El procedimiento de cálculo incluye el hecho de que algunas acciones pagan dividendos, ya sea en efectivo o en acciones y a otros factores cuya explicación se ve en los cursos de finanzas que se estudian en semestres mas avanzados.

Baste decir que el comportamiento de este índice (si sube o baja y en al medida que lo hace) es un indicador de las expectativas de los inversionistas y de cómo perciben la salud económica del país a corto plazo.