Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Contaduría y Administración
Sistema Universidad Abierta y Educación a Distancia

Licenciatura en Administración

Matemáticas Financieras

Apunte electrónico

SUAyED

COLABORADORES

DIRECTOR DE LA FCA
Dr. Juan Alberto Adam Siade

SECRETARIO GENERAL
L.C. y E.F. Leonel Sebastián Chavarría

– – – –

COORDINACIÓN GENERAL

Mtra. Gabriela Montero Montiel

Jefe de la División SUAyED-FCA-UNAM

COORDINACIÓN ACADÉMICA
Mtro. Francisco Hernández Mendoza

FCA-UNAM

– – – –

COAUTORES
Mtro. Antonio Camargo Martínez
Mtra. Ma. Reyneria Pompa Osorio

ACTUALIZACIÓN

Mtro. Jesús Mata Pacheco
Mtro. Pedro Viveros Sánchez

DISEÑO INSTRUCCIONAL

Mayra Lilia Velasco Chacón
L.P. Cecilia Hernández Reyes

CORRECCIÓN DE ESTILO

Carlos Rodolfo Rodríguez de Alba

DISEÑO DE PORTADAS

L.CG. Ricardo Alberto Báez Caballero
Mtra. Marlene Olga Ramírez Chavero
L.DP. Ethel Alejandra Butrón Gutiérrez

DISEÑO EDITORIAL

Mtra. Marlene Olga Ramírez Chavero

OBJETIVO GENERAL

El alumno comprenderá el concepto de *valor del dinero a través del tiempo*.

TEMARIO OFICIAL

(64 horas)

		Horas
1	Interés simple	8
2	Interés compuesto	12
3	Anualidades	18
4	Amortización	12
5	Depreciación	6
6	Aplicaciones bursátiles	8

INTRODUCCIÓN

En esta asignatura, el estudiante investigará los conceptos y herramientas necesarias para comprender y calcular el valor del dinero en el tiempo.

La matemática financiera es una de las áreas más útiles e importantes de la matemática aplicada, pues comprende diversos modelos matemáticos relacionados con los cambios cuantitativos que, con el tiempo, se producen en los capitales o cuentas dinerarias.

La realidad financiera y comercial actual demanda cada vez más un mayor número de profesionales capacitados para brindar asesoría y orientación adecuada a quienes tengan necesidad de obtener créditos, préstamos o financiamientos y, por otra parte, a los que disponen de capitales para su inversión, todo ello con el objetivo de obtener los mejores beneficios en tasas de interés o de rendimiento.

El conocimiento de la matemática financiera proporciona la posibilidad de su aplicación en operaciones bancarias o bursátiles, en temas económicos y en muchas áreas que impliquen finanzas, permitiendo al administrador financiero tomar decisiones acertadas con rapidez y oportunidad. También se considera una base fundamental en los análisis de proyectos de inversión para la toma de decisiones. Asimismo, cabe mencionar su gran utilidad en los cálculos cotidianos de las personas y empresas que requieren saber las variaciones del valor de su dinero o capital en determinados plazos.

En la **unidad 1** se estudiará el concepto del valor del dinero en el tiempo y se conocerán los elementos básicos de operaciones financieras de interés simple, las diversas manifestaciones de capital como valor presente, monto futuro, tasa de interés y plazo o tiempo. También se resolverán situaciones financieras por medio de ecuaciones de valor equivalente. Se conocerán las operaciones de descuento de intereses o cobrados por anticipado y las usuales de factoraje.

En la **unidad 2** se estudiarán las variables de las operaciones financieras más frecuentes en nuestro medio, usualmente de interés compuesto. Se conocerán las diferencias con el interés simple y se obtendrán las fórmulas para determinar el valor presente, el valor futuro, las tasas de interés (nominal, efectiva, equivalentes) y el plazo o tiempo en este tipo de operaciones. Finalmente, se resolverán situaciones de cambio de obligaciones por medio de ecuaciones de valor equivalente.

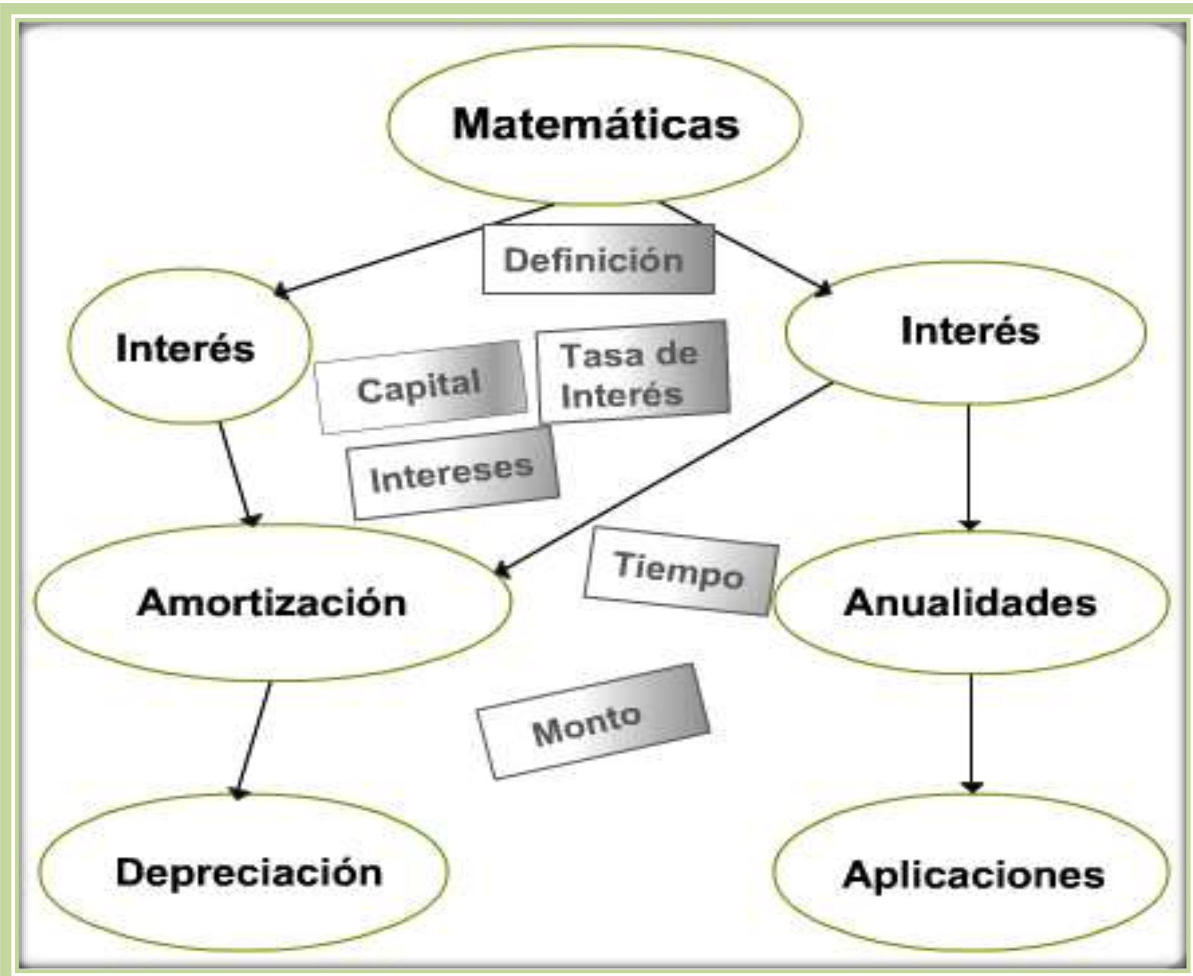
En la **unidad 3** se abordarán los diversos tipos de anualidades utilizadas en el campo financiero, desde las simples (ordinarias, anticipadas y diferidas) hasta las de tipo general. Se conocerán las diversas fórmulas aplicadas en cada situación financiera para determinar el valor de la renta, la tasa de interés y el plazo de la operación, así como su valor actual o presente y el monto futuro.

En la **unidad 4** se analizarán los principales sistemas de amortización de financiamientos, préstamos o créditos que se otorgan a ciertas tasas de interés y plazos. Mediante tablas, se conocerá el comportamiento de las variables de interés, así como los saldos de capital en cualquier periodo que se desee. Se estudiarán diferentes situaciones de este tipo de operaciones, como el de pago fijo periódico, con amortización uniforme, o sistema de pagos desiguales para cubrir deudas contraídas. Se conocerán los mecanismos apropiados para elaborar tablas de amortización de créditos y tablas de fondo de amortización.

En la **unidad 5** se investigarán los dos principales métodos de depreciación de activos, como el de la línea recta y el de suma de dígitos. Se observará el registro en libros mediante tablas de depreciación y su comportamiento durante la vida útil del activo. Se conocerán las fórmulas correspondientes y su aplicación.

La **unidad 6** está relacionada con algunas aplicaciones de la matemática financiera en la emisión de bonos y obligaciones, sus principales características y uso práctico, así como su funcionamiento y la metodología para calcular los valores de emisión, redención y compraventa de estos títulos de inversión.

ESTRUCTURA CONCEPTUAL



Unidad 1

Interés simple

OBJETIVO PARTICULAR

El alumno identificará y calculará los elementos que intervienen en el interés simple.

TEMARIO DETALLADO

(8 Horas)

1. Interés simple

1.1. Conceptos
1.2. Capital, monto, tasa de interés y tiempo
1.3. Tipos de interés simple (clasificación)
1.4. Descuento bancario o simple
1.5. Ecuaciones de valores equivalentes

INTRODUCCIÓN

Podríamos pensar de manera hipotética en un país donde se manejara solamente dinero en efectivo. En ese lugar imaginario, todas las transacciones deben liquidarse en moneda contante y sonante y las personas tienen que guardar sus ahorros debajo del colchón. Una economía de esta naturaleza no solamente resulta incómoda y peligrosa, sino además muy ineficiente. Por ello, todas las economías modernas trabajan con base en créditos, es decir, en la confianza de que, al prestar o facilitar bienes, servicios o dinero, posteriormente serán pagados. De hecho, la palabra “crédito” viene del latín “*credere*” que significa creer o confiar; entonces, la mayoría de las transacciones se realizan con base en la confianza.

Ahora bien, cuando se usa un bien ajeno con propósitos lucrativos, es necesario pagar una cantidad de dinero por ese uso; pero si se trata de bienes comunes, a ese pago se le denomina alquiler o renta; en el ámbito financiero, al alquiler pagado por utilizar el dinero ajeno (o que cobramos al prestarlo) se conoce como interés o intereses.

De la necesidad de calcular los intereses surgieron las matemáticas financieras. La forma más sencilla de calcularlos se denomina interés simple, que se estudia en la primera unidad; para su cálculo, se consideran los meses como si tuvieran 30 días y los años, 360 días; a esto se le denomina: “tiempo comercial”. Para mayor información al respecto, en la bibliografía se especifican los tipos de operaciones en los que se emplea; recomendamos al alumno que esté atento.

El descuento, que se divide en descuento comercial y justo o exacto, es una aplicación importante del interés simple, pues uno de los principales instrumentos del Gobierno Federal para controlar la economía, que son los CETES (Certificados de la Tesorería de la Federación), trabajan a descuento. A fin de calcular distintas alternativas de pago de obligaciones o cobro de derechos, de manera que las partes reciban o entreguen cantidades de dinero que representen lo mismo, con el objetivo de que, tanto el que paga como el que cobra, conserven el valor real de sus derechos u obligaciones, se emplean las ecuaciones de valores equivalentes para la reestructuración. Se sugiere al alumno que ponga mucha atención al concepto de “fecha focal” pues es la clave para comprender el manejo de estas ecuaciones.

1.1. Conceptos

El interés es la cantidad que debe pagar una persona por el uso del dinero tomado en préstamo.

En una operación matemática financiera intervienen básicamente tres elementos fundamentales: el capital, la tasa de interés y el tiempo o plazo.

Interés

- **Los intereses** es el dinero que se pagará por el uso del dinero ajeno. En el caso de créditos se paga; en el caso de inversión nos pagan.

Tasa de interés

- **Tasa de interés** es la razón de los intereses devengados entre el capital en un lapso. Se expresa en tanto por uno o en tanto por ciento.

Tiempo

- **Tiempo** es el número de unidades de tiempo que transcurren entre la fecha inicial y final en una operación financiera. Se conoce también como *plazo*.

Capital

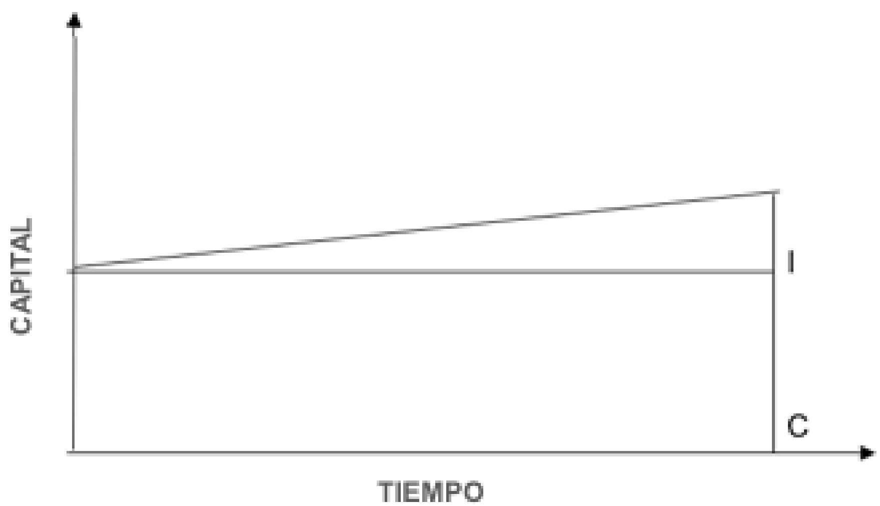
- **El capital** es una cantidad o masa de dinero localizada en una fecha o punto inicial de una operación financiera, igual se le puede llamar *principal*, *valor actual, valor presente,* es el valor del dinero en este momento.

Monto

- **Monto** es el valor del dinero en el futuro, es el capital más los intereses generados, igual se le puede llamar *capital futuro* o *valor acumulado*.

Un *diagrama de valor-tiempo* se utiliza para representar gráficamente la operación financiera, situando en el eje horizontal el o los periodos de tiempo y, en el eje vertical, el capital inicial, el monto de intereses y en su caso el capital final.

Figura 1.1. Diagrama de valor-tiempo



Fuente: Elaboración propia.

Inversión de dinero a interés simple

El interés simple es aquel que se calcula sobre un capital inicial que permanece invariable en el tiempo; los intereses se manejan por separado y se retiran de la operación financiera. En consecuencia, el interés que se obtiene en cada intervalo unitario de tiempo es siempre el mismo.

Los objetivos de las inversiones

En su aspecto lucrativo, será incrementar lo más posible el capital inicial (C), invertido en un determinado lapso, a una tasa de interés determinada para obtener un monto futuro (M). Por otra parte, se pueden retirar los intereses generados para una diferente utilización y se puede también retirar o no el capital inicial.

Nomenclatura

C	Representa el capital inicial, en este momento, llamado también principal o actual, suele representarse también por las letras A o P (valor presente).
M	Representa el capital final, llamado también monto o dinero incrementado. Es el valor futuro de *C*.
I	Es el monto de intereses generados en un determinado periodo y es la diferencia entre *M* y *C*.
i	Es la tasa de interés y representa el costo o rendimiento de un capital, ya sea producto de un préstamo o de una cantidad que se invierte.
n	Es el lapso (años, meses, días, etc.) que permanece prestado o invertido un capital.

Nota: Para aplicar las fórmulas y resolver los problemas, los datos de tiempo (*n*) y la tasa de interés (*i*) deben referirse en una misma unidad de tiempo.

Ejemplos:

- Si la tasa es anual y el tiempo son 5 años; $\boldsymbol{n = 5}$
- Si la tasa es anual y el tiempo son 7 meses; $\boldsymbol{n = \frac{7}{12}}$
- Si la tasa es mensual y el tiempo son 2 años; $\boldsymbol{n = (12)(2) = 24}$
- Si la tasa en trimestral y el tiempo son 5 años; $\boldsymbol{n = (5)(4) = 20}$
- Si la tasa es anual y el tiempo son 5 cuatrimestres; $\boldsymbol{n = \frac{5}{3}}$

Conclusión: siempre se convierten las unidades de tiempo a las unidades a que hace referencia la tasa de interés.

La tasa de interés dada en porcentaje (%) se divide siempre entre 100.

Ejemplos

- 12%; para realizar la operación será $\frac{12}{100} = \mathbf{0.12}$
- 5% ; $\frac{5}{100} = \mathbf{0.05}$
- 27%; 0.27

En todo problema es muy importante que realices tus propios cálculos para que compruebes cómo se llegó a los resultados. No basta con “echarle un ojo”, siempre tienes que certificar. La práctica hace al maestro.

A continuación, se analiza la fórmula general del interés:

$$I = Cin$$

En una serie de problemas de cálculo del interés (*I*), capital (*C*), tasa de interés (*i*) y tiempo (*n*). (Es importante que realices tus propios cálculos para que compruebes cómo se llegó a los resultados.)

Cálculo del interés (*i*)

Ejemplo 1

¿Qué interés produce un capital de $40,000.00 en 1 año 7 meses y 21 días al 24% anual?

De la **fórmula de interés**:

$$I = Cin$$

Solución

$I = Cin$	
Datos	$C = 40{,}000$ $i = 0.24$ n = 1 año, 7 meses 21 días
Procedimiento	n = 1 año = 360 días 7 meses = 210 días 21 días = 21 días Total de días = 591 días $I = 40{,}000 \times \frac{0.24}{360} \times 591 = 15{,}760.00$

Se extraen las que sirvan para calcular el capital (*C*), tasa de interés (*I*) y tiempo (*n*), despejando cada una de esas variables de la fórmula de interés (*I*):

Capital *(C)*	Tasa de interés *(i)*	Tiempo *(n)*
$C = \frac{I}{in}$	$i = \frac{I}{Cn}$	$n = \frac{I}{Ci}$

Determinación de la tasa generada en una inversión

La tasa de interés en una operación financiera significa un costo si se trata de un préstamo y un rendimiento si se refiere a una inversión de capital. Por consiguiente, será fundamental, para la toma de decisiones, conocer a qué tasa de interés se deberá colocar un dinero si se requiere obtener un monto futuro establecido y en un tiempo determinado o cuál es el costo del dinero si se obtiene un préstamo de cierta cantidad y se conviene pagar otra superior, o muy superior, en un determinado lapso.

Fórmulas para calcular la tasa de interés de una inversión a interés simple:

Si se conoce el monto futuro, el capital inicial y el tiempo:

$$i = \frac{\frac{M}{C} - 1}{n}$$

Si se conoce el capital inicial, el monto de intereses y el tiempo:

$$i = \frac{I}{Cn}$$

Cálculo de la tasa de interés (*i*)

Ejemplo 2

¿Cuál es la tasa de interés (*i*) a la que ha estado invertido un capital de \$110,000.00 (*C*) que durante dos años y 5 meses (*n*) produjo \$39,875.00 de interés (*I*)?

Solución

$i = \dfrac{I}{Cn}$	
Datos	C = 110,000 I = 39,875 n = 2 años 5 meses = 29 meses
Procedimiento	$i = \dfrac{39{,}875}{110{,}000 \times 29} = 0.0125 = 1.25\%$ *C = \$110,000.00* *I = \$39,875.00* *t = 2 años y 5 meses = 29 meses* $i = \dfrac{I}{Ct} = \dfrac{39{,}875}{(110{,}000)(29)}$ $= 0.0125\ mensual\ 1.25\%\ mensual$ Si el interés es de 1.25% cada mes, corresponde 15% anual obtenido de multiplicar 1.25 x 12 meses que tiene un año.

Ejemplo 3

¿A qué tasa de interés fueron invertidos $18,000.00 si generaron $3,600.00 en un plazo de cinco bimestres? Da la tasa de interés anual.

Solución

$i = \dfrac{I}{Cn}$	
Procedimiento	$i = \dfrac{I}{Cn} = \dfrac{3600}{(18000)(5)} = 0.04\ bimestral$ Para hacer la tasa de interés anual = (0.04)(6) = 0.24 anual **Nota:** Si la tasa de interés es la incógnita, la unidad de tiempo será la que se maneje en la variable de tiempo.

Cálculo del tiempo requerido para que una inversión genere cierto rendimiento

El mayor o menor tiempo de pago de una operación financiera representa un mayor o menor costo para un deudor o un mayor o menor rendimiento si se trata de una inversión. Por lo tanto, la relación entre tiempo y tasa es muy estrecha y va en proporción directa, si es una inversión, o inversa, si se trata de un financiamiento. Se supone que en una economía débil el poder contar con más tiempo significará mayor oportunidad de pago o de acumulación de capital.

Fórmulas para calcular el tiempo o plazo en una inversión a interés simple:

Si se conoce el monto futuro, el capital inicial y la tasa de interés:

$$n = \frac{\frac{M}{C} - 1}{i}$$

Si se conoce el capital inicial, el monto de intereses y la tasa de interés:

$$n = \frac{I}{Ci}$$

Ejemplo 4.

¿Cuánto tiempo (n) habrá estado invertido un capital de \$85,000.00 (C) que produjo un interés de \$35,700.00 (I) a una tasa anual de 21% (i)?

Solución

$n = \frac{I}{Ci}$	
Datos	$C = 85{,}000$ $I = 35{,}700$ $i = 0.21$
Procedimiento	$n = \frac{35{,}700}{85{,}000 \times 0.21} = 2\ años$ **Nota:** Cuando se pide la tasa de interés en años, automáticamente la tasa saldrá anualizada. Es decir, toma la unidad de tiempo que maneja la tasa de interés.

Ejemplo 5

Calcular en cuánto tiempo se acumularían $50.000.00 si el día de hoy se invierten $40,000.00 a una tasa:

a) Del 0.5% mensual

b) Si se obtiene una tasa de rendimiento del 1% mensual, ¿qué pasa con el tiempo?

Solución a) Tasa 0.5% mensual

$n = \dfrac{\frac{M}{C} - 1}{i}$	
Datos	$M = 50{,}000$ $C = 40{,}000$ $i = 0.005$
Procedimiento	$n = \dfrac{\frac{50{,}000}{40{,}000} - 1}{0.005}$ n = 50 meses = 4.166667 años = 4 años, 2 meses, 0 días

Solución b) Tasa 1.0% mensual

$n = \dfrac{\frac{M}{C} - 1}{i}$	
Datos	$M = 50{,}000$ $C = 40{,}000$ $i = 0.01$
Procedimiento	$n = \dfrac{\frac{50{,}000}{40{,}000} - 1}{0.01}$ n = 25 meses = 2.083333 años = 2 años, 1 mes, 0 días

Monto de un capital utilizando interés simple

Se conoce por monto a la suma del capital (*C*) más el interés (*I*) (también se le denomina valor futuro, valor acumulado o valor nominal.)

Fórmulas para calcular el monto futuro de una inversión a interés simple:

Si se conoce el capital y monto de intereses:

Si se conoce el capital y el monto de intereses:

$$M = C + I$$

Si se conoce el capital, tasa y tiempo:

$$M = C + Cin \text{ o sea:}$$

$$M = C(1 + in)$$

Monto de intereses *I* a partir de *M* y *C*:

$$I = M - C$$

En función de la fórmula del monto, puede ser necesario calcular el capital, el tiempo o la tasa; en tal caso, se procederá a despejar la incógnita de la fórmula básica.

A continuación, mediante ejercicios, se analizan las fórmulas anteriores (conviene que realices los cálculos para que comprendas cómo se resolvieron cada una de las literales).

Cálculo del monto (*M*)

Ejemplo 6

Si invierto $40,000.00 en una cuenta de ahorros que paga una tasa de interés de 24% a un plazo de 1 año 7 meses y 21 días, ¿cuánto dinero obtendré al final del plazo?

Solución

$M = C(1 + in)$	
Datos	$C = 40{,}000$ $i = 0.24$ n = 1 año, 7 meses 21 días = 591 días
Procedimiento	$M = 40{,}000\left(1 + \frac{0.24 \times 591}{360}\right) = 55{,}760$

Ejemplo 7

En una cuenta bancaria se invierten $56,000.00, ganando intereses de 12.3% anual.

a) ¿Cuál es su capital futuro en 3 años y los intereses ganados?
b) Calcular los intereses ganados.
c) Interpretación.

Solución a) Capital futuro

$M = C(1 + in)$	
Datos	$C = 56{,}000$ $i = 0.123$ $n = 3$
Procedimiento	$M = 56{,}000\ (1 + 0.123 \times 3)$ $M = 56{,}000 \times 1.369$ $M = 76{,}664$

Solución b) Intereses ganados

$I = M - C$	
Procedimiento	$I = 76{,}664 - 56{,}000$ $I = 20{,}664$

Interpretación: El monto de intereses en 3 años representa 36.9% sobre el capital invertido.

1.2. Capital, monto, tasa de interés y tiempo

Financiamientos a interés simple

Las economías modernas se desarrollan, entre otros aspectos, con base en financiamientos o créditos a corto, mediano y largo plazos. La palabra **crédito** proviene del latín *credere*, que significa “creer” o “confiar”, por lo cual muchas operaciones financieras se realizan con base en confianza y credibilidad de que el deudor pagará a tiempo su préstamo.

Cálculo de los valores presentes a interés simple

Es importante conocer el capital inicial equivalente a un monto futuro o a un monto de intereses preestablecidos. Se le conoce también como valor “actual” o valor “presente”.

Cálculo del capital (*C*):

Fórmulas donde se implica el monto:

Monto	$M = C(1+in)$	Tasa de interés	$i = \dfrac{\dfrac{M}{C} - 1}{n}$

Capital	$C = A = \dfrac{M}{1 + in}$	Tiempo	$n = \dfrac{\dfrac{M}{C} - 1}{i}$

Inversión de dinero a interés simple (*i*)

El **interés simple** es el que se calcula sobre un capital inicial invariable en el tiempo; los intereses se manejan por separado y se retiran de la operación financiera. En consecuencia, el interés que se obtiene en cada intervalo unitario de tiempo es siempre el mismo.

Los objetivos de las inversiones

En su aspecto lucrativo, será incrementar lo más posible el **capital inicial (*C*)**, invertido en un determinado lapso, a una tasa de interés determinada para obtener un **monto o capital futuro (*M*).** Por otra parte, se pueden retirar los intereses generados para una diferente utilización y se puede también retirar o no el capital inicial.

Cálculo del Interés

Ejemplo 1

¿Qué interés produce un capital de $40,000.00 en 1 año 7 meses y 21 días al 24% anual?

Solución

I = Cin	
Datos	*C* = 40,000 *i* = 0.24 *n* = 1 año, 7 meses 21 días
Procedimiento	*n* = 1 año = 360 días 7 meses = 210 días 21 días = 21 días Total de días = 591 días $I = 40{,}000 \times \frac{0.24}{360} \times 591 = 15{,}760.00$

Ejemplo 2

¿Qué interés produce un capital de $8000.00 invertido a 0.5% mensual en 2 años?

Procedimiento	*I* = (8000)(0.005)(24) = 960.00 *I* = $960.00

Tasa de interés generada por una operación bursátil

La **tasa de interés** en una **operación financiera** significa un **costo** si se trata de un **préstamo** y un **rendimiento** si se refiere a una inversión de capital. Por consiguiente, será fundamental, para la toma de decisiones, conocer a qué tasa de interés se deberá colocar un dinero si se requiere obtener un monto futuro establecido y en un tiempo determinado o cuál es el costo del dinero si se obtiene un préstamo de cierta cantidad y se conviene pagar otra superior, o muy superior, en un determinado lapso.

El mayor o menor tiempo de pago de una operación financiera representa un mayor o menor costo para un deudor o un mayor o menor rendimiento si se trata de una inversión. Por lo tanto, la relación entre tiempo y tasa es muy estrecha y va en proporción directa, si es una inversión, o inversa, si se trata de un financiamiento. Se supone que en una economía débil el poder contar con más tiempo significará mayor oportunidad de pago o de acumulación de capital.

Cálculo de la tasa de interés

Ejemplo 3

¿Cuál es la tasa de interés (*i*) a la que ha estado invertido un capital de $110,000.00 (*C*) que durante dos años y 5 meses (*n*) produjo $39,875.00 de interés (*I*)?

Solución

$i = \frac{I}{Cn}$	
Datos	$C = 110,000$ $I = 39,875$ n = 2 años 5 meses = 29 meses
Procedimiento	$i = \frac{39,875}{110,000 \times 29} = 0.0125 = 1.25\%$ *C = $110,000.00* *I = $39,875.00* *t = 2 años y 5 meses = 29 meses* $i = \frac{I}{Ct} = \frac{39,875}{(110,000)(29)}$ $= 0.0125\ mensual\ 1.25\%\ mensual$ Si el interés es de 1.25% cada mes, corresponde 15% anual obtenido de multiplicar 1.25 x 12 meses que tiene un año.

Ejemplo 4

¿A qué tasa de interés fueron invertidos $18,000.00 si generaron intereses de $3,600.00 en un plazo de cinco bimestres? Da la tasa de interés anual.

Solución

$i = \frac{I}{Cn}$	
Datos	$C = 18,000$ $I = 3,600$ n = 5 bimestres
Procedimiento	$i = \frac{I}{Cn} = \frac{3600}{(18000)(5)} = 0.04\ bimestral$ Para hacer la tasa de interés anual = (0.04)(6) = 0.24 anual **Nota:** Si la tasa de interés es la incógnita, la unidad de tiempo será la que se maneje en la variable de tiempo.

Ejemplo 5

¿Cuál es la tasa de interés que generó una inversión de $5,000.00 si al retirarlos en 3 semestres, de la institución donde se invirtieron, recibí $7,700.00? Da tu respuesta en forma anual.

Solución

$i = \frac{\frac{M}{C} - 1}{n}$	
Datos	$C = 5{,}000$ $n = 3$ semestres $M = 7{,}700$
Procedimiento	$i = \frac{\frac{7{,}700}{5{,}000} - 1}{3} = 0.18\ semestral \quad (0.18)(100)$ $= 18\%\ semestral \quad (18)(2) = 36\%\ anual$

Tiempo o plazo en una inversión a interés simple

En el mayor tiempo de una operación financiera representa un mayor costo para el deudor o mayores rendimientos en el caso de inversión. En un tiempo menor el costo es menor y el rendimiento es menor. La relación entre tiempo y tasa de interés es muy estrecha, va en proporción directa de la operación. En una economía débil el poder contar con más tiempo significará mayor oportunidad de pago o de acumulación de capital.

Cálculo de tiempo

Ejemplo 6

¿Qué tiempo ha estado invertido un capital de $85,000.00 que ganó intereses por $35,700.00, si la tasa de interés fue de 21% anual?

Solución

$n = \dfrac{I}{Ci}$	
Datos	C = 85,000 I = 35,700 i = 21% anual
Procedimiento	$n = \dfrac{35{,}700}{85{,}000(0.21)} = 2\ años$

Ejemplo 7

Calcular en cuánto tiempo se acumularían $50.000.00 si el día de hoy se invierten $40,000.00 a una tasa de:

a) 0.5% mensual
b) 1% mensual
c) ¿Qué pasa con el tiempo?

Da tu respuesta en años.

Solución

$n = \dfrac{\frac{M}{C} - 1}{i}$	
Datos	M = 50,000 C = 40,000 i (a) = 0.5% mensual i (b) = 1% mensual
Procedimiento	$a)\ n = \dfrac{\frac{50{,}000}{40{,}000} - 1}{0.005} = 50\ meses;\ \dfrac{1\ año}{12\ meses} = \dfrac{x\ años}{50\ meses}$ $x = \dfrac{(1)(50)}{12} = 4.166\ años$ $b)\ n = \dfrac{\frac{50{,}000}{40{,}000} - 1}{0.01} = 25\ meses \quad x = \dfrac{25}{12} = 2.083\ años$ c) El tiempo de la operación se disminuye al subir la tasa de interés.

Ejemplo 8

En cuanto tiempo se acumularían $30.000.00 si el día de hoy se invierten $20,000.00 a una tasa:

a) De 0.5% mensual.
b) Si se obtiene una tasa de rendimiento de 1% mensual, ¿qué pasa con el tiempo?

Da tu respuesta en meses y años con dos puntos decimales.

Solución

$n = \dfrac{\frac{M}{C} - 1}{i}$	
Datos	$M = 30{,}000$ $C = 20{,}000$ i (a) = 0.5% mensual i (b) = 1% mensual = 0.01
Procedimiento a)	$n = \dfrac{\frac{30{,}000}{20{,}000} - 1}{0.005}$ *n = 100 meses = 8.33 años*
Procedimiento b)	$n = \dfrac{\frac{30{,}000}{20{,}000} - 1}{0.01}$ *n* = 50 meses = 4.16 años *Si la tasa de interés aumenta el tiempo disminuye.*

Capital de una operación financiera

En muchas operaciones financieras es muy importante conocer el capital inicial o valor presente, o valor actual, o valor efectivo equivalente a un monto futuro o a un monto de intereses preestablecidos.

Cálculo del capital

Ejemplo 9

¿Qué capital (C) con tasa de interés del 12% anual (i) produce intereses de $15,000.00 ($I$) en 10 meses ($n$)?

Solución

$C = \dfrac{I}{in}$	
Datos	i = 12% anual I = 15,000 n = 10 meses
Procedimiento	$C = A = \dfrac{M}{1 + in}$ $C = A = \dfrac{I}{in} = \dfrac{15{,}000}{0.12\left(\frac{10}{12}\right)} = 150{,}000$

Ejemplo 10

¿Cuál es el capital (C) que produjo un monto (M) de $135,000.00 a una tasa ($i$) de 14% anual durante nueve meses?

Solución

$C = \dfrac{M}{1 + in}$	
Datos	$M = 135{,}000$ $i = 0.14$ $n = 9$ meses
Procedimiento	$C = \dfrac{135{,}000}{1 + 0.14 \times \frac{9}{12}} = 122{,}171.94$

Ejemplo 11

¿Cuál fue el capital que me prestaron si en 3 trimestres pague $18,200.00, si la tasa de interés fue de 40%?

Solución

$C = \dfrac{M}{(1 + in)}$	
Datos	$M = 18{,}200$ $n = 3/4$ $i = 0.4$
Procedimiento	$C = \dfrac{18{,}200}{1 + \left(\frac{0.4}{4}\right)(3)} = 14{,}000.00$

Monto de un capital utilizando interés simple

Se conoce por monto a la suma del capital (*C*) más el interés (*I*) (también se le denomina valor futuro, valor acumulado o valor nominal.

Calcular el monto de una inversión a interés simple:

Si se conoce el capital y monto de intereses	• $M = C + I$
Si se conoce el capital, tasa y tiempo:	• $M = C + Cin$ o sea $M = C(1 + in)$
Por lo que el monto de intereses *I* partir de:	• *M* y *C* : $I = M - C$

En función de la fórmula del monto, puede ser necesario calcular el capital, el tiempo o la tasa; en tal caso, se procederá a despejar la incógnita de la fórmula básica.

A continuación, mediante ejercicios, se analizan las fórmulas anteriores (conviene que realices los cálculos para que comprendas cómo se resolvieron cada una de las literales).

Cálculo del monto (*M*)

Ejemplo 12

Si invierto $40,000.00, en una cuenta de ahorros que paga una tasa de interés de 24%, a un plazo de 1 año 7 meses y 21 días:

a) ¿Cuánto reuniré en ese tiempo?
b) ¿Cuánto es de intereses?

Solución a)

$M = C(1 + in)$	
Datos	$C = 40{,}000$ $i = 0.24$ n = 1 año, 7 meses, 21 días = 591 días
Procedimiento	$M = 40{,}000\left(1 + \frac{0.24 \times 591}{360}\right) = 55{,}760$

Solución b)

$I = M - C$	
Procedimiento	$I = 55{,}760 - 40{,}000 = 15760$ $I = \$15{,}760.00$

Ejemplo 13

En una cuenta bancaria se invierten $56,000.00, ganando intereses de 12.3% anual.

a) ¿Cuál es su capital futuro en 3 años?
b) Calcular los intereses ganados.
c) Interpretación

a) Capital futuro

$M = C(1 + in)$	
Datos	C = 56,000 i = 0.123 n = 3
Procedimiento	M = 56,000(1+0.123x3) M = 56,000x1.369 M = 76,664

b) Intereses ganados

$I = M - C$	
Procedimiento	I = 76,664 - 56,000 I = 20,664

c) Interpretación

Interpretación	El monto de intereses en 3 años representa el 36.9% sobre el capital invertido.

Ejemplo 14

¿Cuánto pagaré en 8 meses por un crédito que me dio una tienda departamental por $12,000.00, con una tasa de interés de 42%?

$M = C(1 + in)$	
Datos	C = 12,000 n = 8/12 i = 0.42
Procedimiento	$M = 12{,}000\left(1 + 0.42\left(\frac{8}{12}\right)\right) = 15{,}360$

1.3. Tipos de interés simple: (Clasificación)

Hay ocasiones en que el tiempo o el plazo de la operación está pactado en días y la tasa de interés de otra forma (anual, semestral, mensual). Es necesario, por consiguiente, transformar la tasa de interés por día. Cuando la tasa anual se convierte a tasa diaria, se pueden utilizar diferentes tipos de interés.

En operaciones financieras se consideran 2 tipos de interés simple:

Tiempo ordinario

Tiempo ordinario o comercial o aproximado

El tiempo es el bancario, instituciones crediticias, casas de bolsa, así como las tiendas departamentales que venden a crédito, en el cual se utilizan más de 30 días y años de 360 días. Esto debido a la costumbre, ya que tiempo atrás no se contaba con equipos como calculadoras o computadoras y resultaban más fáciles los cálculos del interés. En la actualidad, aun teniendo todos estos medios, se sigue utilizando ya que este tipo de interés resulta mayor y conviene más a las instituciones que hacen o venden a crédito. En la vida real, la mayoría de los cálculos financieros se efectúan con tiempo comercial.

Tiempo real

Tiempo ordinario o exacto

El tiempo será el año de 365 días y meses de acuerdo a días calendario, según los que contengan los meses en estudio. Son raras las instituciones que utilizan este tipo de interés; sin embargo, es necesario conocerlo.

Ejemplo 1

Obtener el monto a interés ordinario que se acumula al 15 de octubre, si el 25 de marzo anterior se depositaron $15,000.00 en una cuenta bancaria que abona TIIE [1] + 2.4 ppc (el valor de la TIIE es de 21.1%).

Solución

$M = C(1 + in)$

Datos

$C = 15{,}000$
$I = 0.235$

Procedimiento

Cálculo de *n*:	Mes	Días
	Del 25 al 30 de marzo	5
	De abril a septiembre (6 meses)	180
	Del 1° al 15 de octubre	15
Total		200

$$M = 15{,}000\left(1 + \frac{200}{360} \times 0.235\right) = 16{,}958.33$$

$$I = M - C = 16{,}958.33 - 15{,}000 = 1{,}958.33$$

Interpretación: El monto futuro aumenta con respecto al capital inicial en $1,958.33, lo que representa un 13.06% más.

1. La TIIE significa tasa de interés interbancario de equilibrio y es fijada diariamente como resultado de las cotizaciones de los fondos faltantes y sobrantes entre los bancos comerciales y el banco central.

Ejemplo 2

Del ejercicio anterior, obtener su monto futuro considerando tiempo real o exacto.

Solución

$M = C(1 + in)$

Datos

$C = 15{,}000$
$I = 0.235$

Procedimiento

Cálculo de *n*:	Mes	Días
Del 25 al 30	Marzo	6
	Abril	30
	Mayo	31
	Junio	30
	Julio	31
	Agosto	31
	Septiembre	30
Del 1° al 15	Octubre	15
Total		204

$$M = 15{,}000\left(1 + \frac{204}{365} \times 0.235\right) = 16{,}970.14$$

$$I = M - C = 16{,}970.14 - 15{,}000 = 1{,}970.14$$

Interpretación: El monto futuro aumenta con respecto al capital inicial en $1,970.14, lo que representa un 13.13% más. En relación al tiempo ordinario el monto es mayor en 0.07 ppc.

Pagaré

Un pagaré es un documento en el cual una persona se obliga a pagar a otra una cantidad determinada de dinero, con interés o sin él, en determinada fecha. La persona que hace la promesa de pagar es el deudor u otorgante y la persona que prestó el dinero será el beneficiario.

No. De documento ..Único Bueno por $ *27,300.00*
Por este pagare me (nos) obligo (amos) a pagar a la orden de (beneficiarios) Reyna Pompa_Osorio en México, D.F., el día 26 de diciembre de 2009 la cantidad de *veintisiete mil trescientos pesos*.

Valor recibido a mi entera satisfacción. La suma anterior causara intereses a la tasa del 42% anual hasta la fecha de su vencimiento, si no fuere pagada causara intereses moratorios a la tasa del 67% anual.

Fecha 11 de febrero de 2009

Lugar México D.F,

Nombre del deudor Celia Juan Platas Firma__________
Domicilio del deudor Alarcón 23, col. Centro.
Ciudad México. D.F.

Ejemplo 3

¿Cuánto pagaría la Sra. Celia Juan si liquida su deuda el 26 de agosto? Calcula en tiempo real y comercial e interpreta el resultado.

Solución

Se cuentan los días mes por mes

Datos

DÍAS		
	Real	Comercial
Febrero	18	19
Marzo	31	30
Abril	30	30
Mayo	31	30
Junio	30	30
Julio	31	30
Agosto	26	26
TOTAL	197	195

Procedimiento

Real:

$$M = 27{,}300\left[1 + \left(\frac{0.42}{365}\right)(197)\right] = 33{,}448.50$$

Comercial:

$$M = 27{,}300\left[1 + \left(\frac{0.42}{360}\right)(195)\right] = 33{,}510.75$$

Interpretación: La señora Celia Juan pagó, al vencimiento del pagaré en tiempo real, $33,268.60; hubiera pagado en el tiempo comercial $33,510.75 una diferencia de $62.25. Podemos observar que en el tiempo comercial, aunque sean menos días, se paga un poco más.

Valor presente

Es el valor actual que equivale con intereses al valor futuro del dinero.

El valor presente o valor actual o capital de un monto que vence en fecha futura es la cantidad de dinero que, invertida o dada a crédito o préstamo el día de hoy a una tasa de interés dada, que generará intereses, producirá otra cantidad llamada monto.

Ejemplo 4

¿Cuál es el valor actual de un pagaré con valor nominal de $24,752.00, que se firmó el 5 de marzo para cubrirlo el 24 de abril del mismo año? La tasa de la operación fue del 2.4% mensual. Calcula en tiempo real y comercial.

Solución

$C = \dfrac{M}{(1 + in)}$	
Datos	*Valor nominal* = 24,752 *I* = 2.4% mensual *n* (real) = 50 días *n* (comercial) = 49 días

Procedimiento

Real:

$$C = \frac{24{,}752}{1+\frac{(0.024)(12)}{365}(50)} = 23{,}812.54$$

Comercial:

$$C = \frac{24{,}752}{1+0.024\left(\frac{49}{30}\right)} = \$23{,}818.32$$

1.4. Descuento bancario o simple

Conceptos básicos del interés cobrado por anticipado

En ciertas operaciones de **crédito bancario** se acostumbra cobrar el monto de intereses en el **momento mismo de otorgar un préstamo o crédito**. También en transacciones comerciales a **proveedores o clientes.**

Valor efectivo	Tasa de descuento	Descuento real
Al interés cobrado por anticipado se le llama descuento y la cantidad de dinero que recibe el solicitante del crédito, una vez descontado el monto de intereses, se le llama **valor efectivo.**	Con objeto de indicar explícitamente que en un préstamo los intereses se cobrarán de una manera anticipada, la tasa de interés cambia de nombre a **tasa de descuento.**	Se distingue el descuento racional porque la tasa de descuento se aplica sobre la cantidad inicial del préstamo y se cobra en ese momento. Se llama también **descuento real.**

El descuento bancario

Es una operación financiera que por lo general se realiza por una institución bancaria, empresas de factoraje, cuyo objetivo es comprar documentos, por lo general pagarés, en forma anticipada, o sea, antes de su vencimiento, descontando cierta cantidad calculada mediante una tasa de descuento, la cual se aplica sobre el valor nominal del pagaré.

Descontar *significa "el acto de obtener o pagar dinero en efectivo a cambio de un documento de importe más elevado a pagar en el futuro".*

Los conceptos de **valor nominal** y **valor líquido**

En general los documentos que dan lugar a **operaciones de factoraje** son los giros y los **pagarés**.

El tenedor de un pagaré no puede exigir el cobro antes de la fecha de su vencimiento; por lo tanto, si desea hacerlo efectivo antes de dicha fecha, lo puede vender a una institución bancaria, empresa o institución de factoraje o a cualquier persona física o moral que lo acepte. Entonces el nuevo deudor se convierte en beneficiario.

El **valor nominal**

De un pagaré es la suma del capital del préstamo más los intereses acumulados a su vencimiento.

El **valor líquido**

De un pagaré es su valor nominal menos el descuento. Es la cantidad que efectivamente recibe el prestatario.

Por lo tanto, el **descuento** es la disminución que se hace a una cantidad que se paga antes de su vencimiento. Es decir, es el cobro hecho con anticipación a una cantidad con vencimiento futuro; esto significa que la persona que compra el derecho de cobrar esa cantidad futura efectúa un préstamo por el cual exige un interés, ya que debe transcurrir el tiempo anticipado para recuperar su inversión. A ese interés se le llama descuento: cuando el inversionista (quien compra el documento que ampara la cantidad futura) adquiere en una cantidad menor un valor nominal que vence en el futuro. Asimismo, a una cantidad que tiene un vencimiento en un plazo futuro le corresponde un valor actual. A la diferencia entre ambos se le llama descuento.

Nomenclatura:

M	Valor nominal del documento.
C	Valor comercial, valor de descuento o valor efectivo.
D	Es la cantidad que se descuenta del valor nominal del pagaré.
d	Es la tasa de descuento que actúa sobre el valor nominal del pagaré.
r	Tasa de rendimiento de un préstamo descontando intereses por adelantado.
n	Es el lapso faltante entre la fecha de negociación del documento y la fecha de su vencimiento.

Fórmulas de descuento simple bancario

DESCUENTO SIMPLE

$$D = Mdn$$

$$D = \frac{Cdn}{1 - dn}$$

TASA DE DESCUENTO

$$d = \frac{1 - \frac{C}{M}}{n}$$

TASA DE PLAZO DE DESCUENTO

$$n = \frac{1 - \frac{C}{M}}{d}$$

VALOR COMERCIAL O DE DESCUENTO

$$C = M - D$$

$$C = M - Mdn$$

$$C = M\,(1 - dn)$$

DESCUENTO REAL O JUSTO

$$D_r = M - \frac{M}{1 + in}$$

Ejemplo 1

Se tiene un documento con valor nominal de $50,000.00 y una tasa de descuento del 2.5% mensual.

Datos	M = 50,000 D= 0.025

Además, se cuenta con los datos de la tabla siguiente:

Tiempo	Descuento comercial	Descuento real o justo
	+	$D_r = M - \dfrac{M}{1 + in}$
1 mes	1,250.00	1,219.51
2 meses	2,500.00	2,380.95
4 meses	5,000.00	4,545.45
6 meses	7,500.00	6,521.74
1 año	15,000.00	11,538.46

La tabla anterior nos revela la diferencia entre los descuentos. El descuento comercial es el **interés del valor nominal (M)**, ya que calcula el descuento no sobre el capital invertido, sino sobre la suma de éste más los intereses; por lo tanto, el descuento se calcula a una tasa mayor que la del problema, pues al disminuir al valor nominal, el descuento, se obtendrá una cantidad menor al valor actual. Por ende, el descuento se rige por una tasa mayor de la que se da en el problema.

Ejemplo 2

¿Cuál es el valor descontado de un documento con valor nominal de $50,000.00 y una tasa de descuento del 2.5% mensual si se descuenta
6 meses antes de su vencimiento?

$C = M(1 - dn)$	
Datos	$C = 50{,}000$ $I = 0.025$ $n = 6$
Procedimiento	$C = 50{,}000(1\text{-}0.025X6) = 42{,}500$ *Se puede utilizar el descuento de la tabla anterior correspondiente a 6 meses y se aplica a la fórmula:* $C = M - D$ *Por lo tanto:* $C = 50{,}000\text{-}7{,}500 = 42{,}500$

Ejemplo 3

Una persona solicita un préstamo quirografario por $120,000.00 a un plazo de 90 días y le cobran una tasa de descuento de 25.0%.

a) Calcular a cuánto asciende el descuento. Obtener el valor efectivo.
b) Si la tasa de descuento baja 5 ppc, ¿cuáles son los nuevos valores?
c) Interpretar resultados.

Solución a) Descuento al 25%

$D = Mdn$	
Datos	$M = 120{,}000$ $d = 0.25$ $n = \frac{90}{360} = 0.25$
Procedimiento	$D = 120{,}000x0.25x0.25 = 7{,}500$

Solución a_1) Valor efectivo

$C = M - D$	
Datos	$M = 120{,}000$ $D = 7{,}500$
Procedimiento	$C = 120{,}000\text{-}7{,}500 = 112{,}500$

Solución b) Descuento al 20%

$D = Mdn$	
Datos	M = 120,000 d = 0.20 $n = \frac{90}{360} = 0.25$
Procedimiento	$D = 120{,}000 \times 0.25 \times 0.20 = 6{,}000$

Solución b_1) Valor efectivo

$C = M - D$	
Datos	M = 120,000 D = 6,000
Procedimiento	$C = 120{,}000 - 6{,}000 = 114{,}000$

Interpretación: Si la tasa de descuento baja 5 ppc (20%), el valor en efectivo aumenta sólo en un 1.33%.

Ejemplo 4

La tasa de descuento de pagarés en un banco es actualmente del 22.4%. Si el valor nominal de un pagaré es de $19,500.00 con fecha de vencimiento dentro de 3 meses:

a) Calcular la cantidad descontada y el valor comercial o valor de descuento del documento.
b) Calcular el valor de descuento real.
c) Comparar e interpretar resultados.

Solución a_1) Valor comercial

$C = M - D$	
Datos	$M = 19{,}500$ $D = 1{,}092$
Procedimiento	$C = 19{,}500 - 1{,}092 = 18{,}408$

Solución a) Descuento al 22.4%

$D = Mdn$	
Datos	$M = 19{,}500$ $d = 0.224$ $n = \frac{90}{360} = 0.25$
Procedimiento	$D = 19{,}500 \text{x} 0.224 \text{x} 0.25 = 1{,}092$

Solución b) Descuento real

$C = \frac{M}{(1 + in)}$	
Datos	$M = 19{,}500$ $i = 0.224$ $n = \frac{90}{360} = 0.25$
Procedimiento	$C = \frac{19{,}500}{1 + 0.224 \times 0.25} = 18{,}465.91$

Interpretación: Existe una diferencia de $57.91 que representa una pérdida del 0.314%.

Cálculo del tiempo

Ejemplo 5

Indicar con qué tiempo de anticipación se descontó un documento cuyo valor nominal es $50,000.00. Se recibió un valor descontado de $42,500.00, con descuento comercial y a una tasa de descuento de 2.5% mensual.

Solución

$n = \dfrac{1 - \dfrac{M}{C}}{d}$	
Datos	M = 50,000 C = 42,500 d = 0.025
Procedimiento	$n = \dfrac{1 - \dfrac{42{,}500}{50{,}000}}{0.025} = 6\ meses$

Cálculo de la tasa

Ejemplo 6

¿A qué tasa de descuento se aplicó un documento con valor nominal de $60,000.00 si se descontó faltando 5 meses para su vencimiento y por el cual se obtuvo un valor descontado de $53,500.00 con descuento comercial?

Solución

$d = \dfrac{1 - \frac{M}{C}}{n}$	
Datos	$M = 60{,}000$ $C = 53{,}500$ $n = 5$ meses
Procedimiento	$d = \dfrac{1 - \frac{53{,}500}{60{,}000}}{5} = 0.0217 = 2.17\%\ mensual$ $d = 0.0217 \times 12 = 0.26 = 26.0\%\ anual$

Equivalencia entre tasa de interés y descuento simple

En la práctica del descuento, además de permitir al prestamista disponer inmediatamente de los intereses cobrados por anticipado, hace que la tasa de interés que se está pagando por el préstamo sea mayor que la de descuento.

Esta tasa de interés se conoce como **tasa de rendimiento** y su cálculo es independiente del préstamo descontado. Sólo está en función de la tasa de descuento y del tiempo que dura el préstamo.

Fórmulas de tasa de rendimiento y de descuento simple

TASA DE RENDIMIENTO

$$r = \frac{d}{1 - dn}$$

TASA DE DESCUENTO

$$d = \frac{r}{1 + rn}$$

Ejemplo 7

Calcular la tasa de rendimiento de un pagaré cuya tasa de descuento es de 27.5% en un plazo de 6 meses.

Solución

$r = \dfrac{d}{1 - dn}$	
Datos	$d = \dfrac{0.275}{12} = 0.022917$ $n = 6$
Procedimiento	$r = \dfrac{0.022917}{1 - 0.022917 \times 6} = 0.026570$ $r = 0.026570 \times 12 = 0.318840 = 31.9\%$ Para obtener el porcentaje con respecto a la diferencia de las tasas, utilizamos: $r - d = 31.9 - 27.5 = 4.4$ 27.5 100 4.4 x $x = \dfrac{(4.4)(100)}{27.5} = 16$

Interpretación: Existe una diferencia de 4.4 ppc, o sea, un 16.0% más entre la tasa de rendimiento y la tasa de descuento.

Ejemplo 8

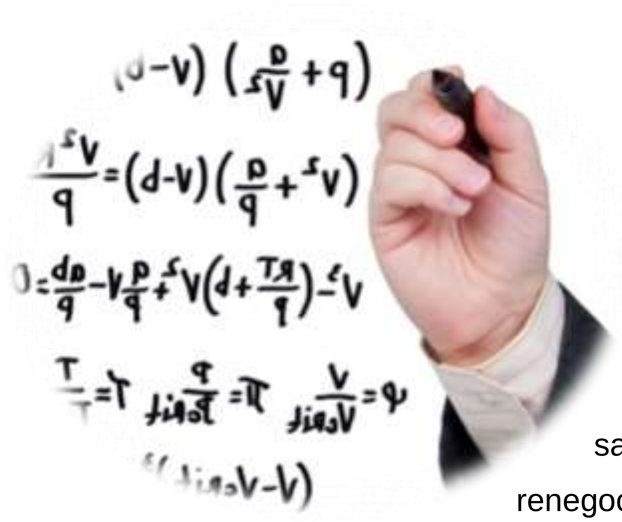
Paquita necesita en este momento $20,000.00 para pagar en 5 meses. Si la tasa de descuentos es del 1.65% mensual:

a) ¿Cuánto tendrá que pedir al Banco?
b) ¿Cuál es la tasa real?

Solución

$M = \dfrac{C}{1 - dn}$	
Procedimiento	A) $M = \frac{C}{1-dn} = \frac{20,000}{1-(0.0165)(5)} = 21,798.36$ B) $r = \frac{d}{1-dn} = r = \frac{0.0165}{1-0.0165(5)} = 0.01798\ mensual$ De igual forma, podemos calcular la tasa de rendimiento como: $r = \dfrac{M - VE}{nVE} = \dfrac{1,798.36}{(5)(20,000)} = 0.01798\ mensual$ Observamos que el resultado es el mismo. Existe una diferencia de 1.77 ppc

1.5. Ecuaciones de valores equivalentes



Es frecuente en el campo financiero, principalmente por razones económicas o de tiempo, cambiar una serie de obligaciones ya pactadas por otro conjunto de obligaciones que permitan a un deudor saldar su deuda. En otras palabras, se renegocia una deuda.

Una ecuación de valor es una igualdad entre dos conjuntos de obligaciones valuadas todas a la misma fecha, llamada **fecha focal** o **fecha de valuación**. Todas las cantidades se llevan a esa fecha focal con el fin de que tengan el mismo valor en el tiempo.

Es importante mencionar que debe precisarse claramente la *fecha focal* ya que los montos de las obligaciones en los problemas de interés simple varían de acuerdo con el tiempo y a diferente fecha focal. Generalmente, esta última se refiere a la fecha de liquidación total de la deuda.

En la resolución de estos problemas, se utilizan gráficas de tiempo-valor en las que se representan las fechas de vencimiento de las obligaciones originales y cuándo se realizarán los pagos (se puede utilizar tanto el interés simple como el compuesto). En estos casos, se lleva el procedimiento siguiente:

Etapas

Etapa 0. Se lee detenidamente el problema y se localiza la fecha en que se obtienen las deudas originadas.

Etapa 1. Se calcula el monto a pagar de cada una de las obligaciones originales a su vencimiento.

Etapa 2. Elaborar la gráfica de tiempo-valor que considere las deudas originales y las fechas de vencimiento. Se colocan (arriba del diagrama) los montos en la fecha de su vencimiento.

Etapa 3. Cuando se renegocia la deuda. En la gráfica de tiempo, se ubican los pagos parciales que se han propuesto (como las deudas, con sus fechas respectivas), en la parte de abajo del diagrama.

Etapa 4. Se determina en la gráfica la fecha focal (de preferencia, en donde coincida con el pago final; es recomendable que sea una incógnita, con el fin de realizar el menor número de operaciones).

Etapa 5. Se efectúa la solución; para ello, se trasladan todas las cantidades a la fecha focal (se debe tomar en cuenta que la suma de todos los pagos debe cubrir la suma de las deudas). En algunos casos serán montos y en otros capitales, tanto de obligaciones como de los pagos propuestos.

Etapa 6. Se resuelven las operaciones, que dependerán de la fecha focal, algunas cantidades, como ya se mencionó, serán montos y otras capitales.

Etapa final. Se da la respuesta, de forma que quede claro el concepto, es decir, cuánto se debe pagar, acorde con lo que pregunta el problema.

Ejemplo 1

Al día de hoy, una persona tiene las obligaciones siguientes:

a) Un préstamo de \$30,000.00, otorgado hace 6 meses, con vencimiento el día de hoy e impuesto con una tasa de 2.5% mensual. C = \$30,000.00. t = Hace 6 meses con vencimiento el día de hoy. i = 2.5% mensual = 0.025 mensual.	b) Una deuda por \$ 5,000.00, contraída hace tres meses, con vencimiento dentro de 9 meses y con un tipo de interés de 3% mensual. C = \$5,000.00. t = Hace 3 meses con vencimiento dentro de 9 meses. i = 3% mensual = 0.03 mensual.
c) Un compromiso por \$50,000.00 contratado hace cuatro meses, con una tasa de 2% mensual y con un vencimiento dentro de 6 meses. C = \$50,000.00. t = Hace 4 meses con vencimiento dentro de 6 meses. i = 2% mensual = 0.02 mensual.	d) Una deuda por \$10,000.00 contratada hace un mes, con vencimiento dentro de 7 meses y una tasa de 3.5% mensual. C = \$10,000.00. t = Hace un mes con vencimiento dentro de 7 meses. i = 3.5% mensual = 0.035 mensual.

Hoy mismo, esta persona decide renegociar sus obligaciones con un rendimiento, en las nuevas operaciones, de 30% anual mediante tres pagos:

1. \$40,000.00, el día de hoy.
2. \$35,000.00, dentro de 6 meses.
3. El saldo, dentro de 12 meses.

Calcula el importe del saldo utilizando como fecha focal el mes 12.

Solución con interés simple

ETAPA 1

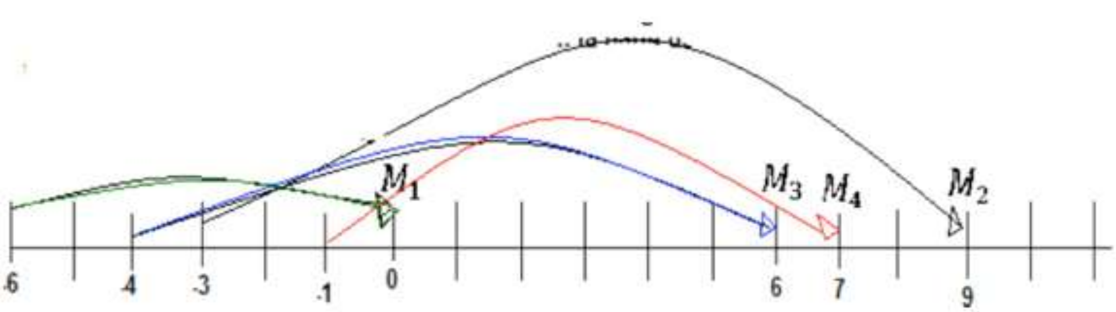
Se calcula los montos de las deudas originales:

DEUDA (D)	OPERACIÓN $M=C(1+in)$	MONTO DE LA DEUDA
A	30,000[1 + (0.025)(6)]	$M_1 = 34{,}500$
B	5,000[1 + (0.03)(12)]	$M_2 = 6{,}800$
C	50,000[1 + (0.02)(10)]	$M_3 = 60{,}000$
D	10,000[1 + (0.035)(8)]	$M_4 = 12{,}800$
	TOTAL EN VALORES ABSOLUTOS	$114,100.00

ETAPA 2

Las deudas u obligaciones originales se colocan en la parte de arriba

Deudas originales



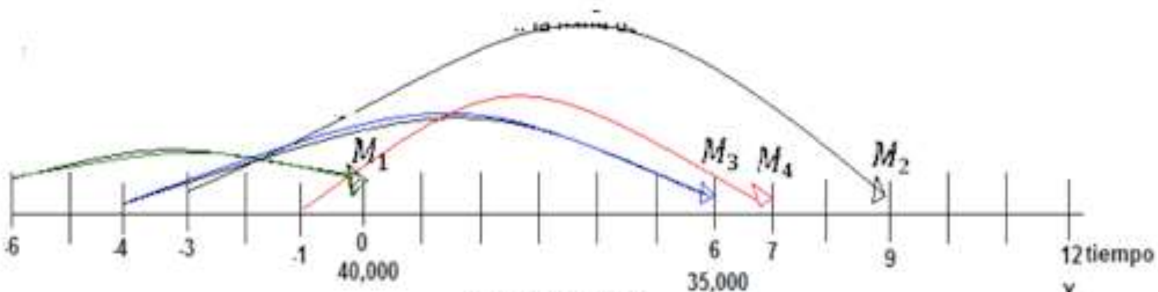
Pagos propuestos

En la parte de abajo se colocan los pagos que sustituirán a los originales.

ETAPA 3

Las deudas u obligaciones originales se colocan en la parte de arriba.

Deudas originales

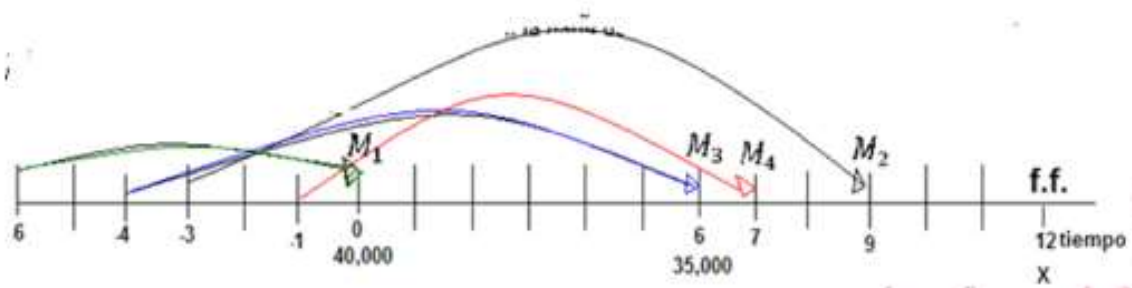


pagos propuestos

En la parte de abajo se colocan los pagos que sustituirán a los originales.

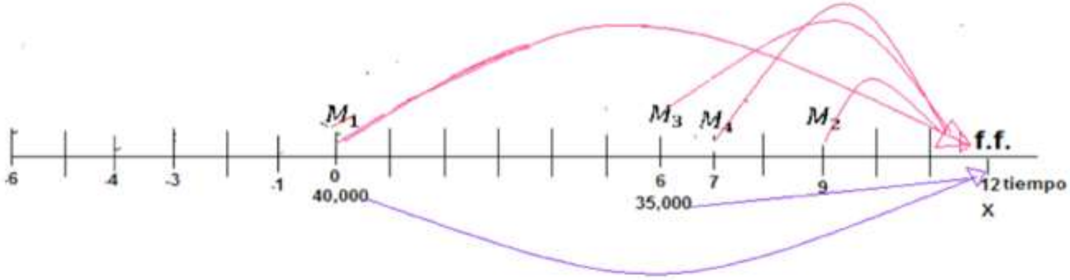
ETAPA 4

Se coloca la fecha focal en el diagrama (se recomienda donde sea el último, si este es variable) si el problema no indica otra.



ETAPA 5

Todas las cantidades se llevan a la fecha focal deudas (ya calculados sus montos) y los pagos que se propusieron con la tasa de reestructuración.



ETAPA 6

Se da la ecuación de valor.

$$\Sigma \text{ DEUDAS} = \Sigma \text{ PAGOS}$$

$$D_1 + D_2 + D_3 + D_4 = P_1 + P_2 + P_3$$

Se definen y calculan las cantidades correspondientes. En el problema, dado que todas se llevan a valor futuro, se trata de montos (M), tanto deudas como pagos propuestos.

i = 30% = 0.025 mensual

DEUDA	OPERACIÓN	RESULTADO
D_1	M = 34500[1 + (0.025)(12)]	44,850
D_2	M = 6800[1 + (0.025)(3)]	7,310
D_3	M = 60000[1 + (0.025)(6)]	69,000
D_4	M = 12800[1 + (0.025)(5)]	14,400
	Suma de deudas	$135,560.00

DEUDA	OPERACIÓN	RESULTADO
P_1	40000[1 + (0.025)(12)]	52,000
P_2	35000[1 + (0.025)(6)]	40,250
P_3	X	X
	Suma de pagos	$92,250.00 + X

Σ DEUDAS = Σ PAGOS o sea ecuación de valor: $M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}=M_5+M_6+X$

135,560 = 92,250 + X

135,560 – 9,2250 = X

43,310 = X

Finalmente, el último pago propuesto se liquidará con una cantidad de $43,310.00 dentro de 12 meses y la tasa de interés de 30%.

Ejemplo 2

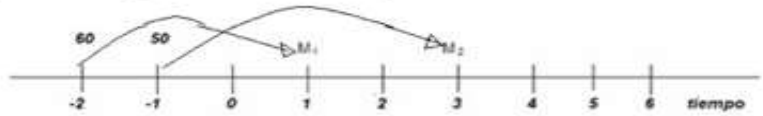
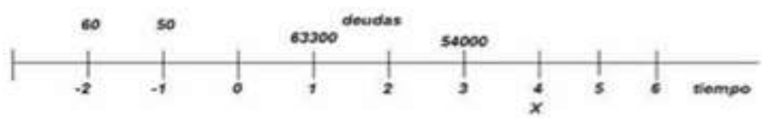
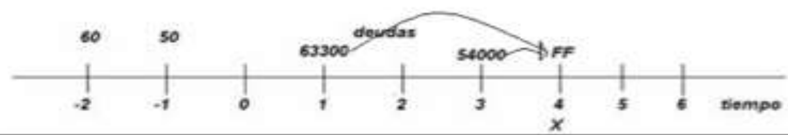
Una persona recibió un préstamo hace 2 meses, por $60,000.00 a pagar en un plazo de 3 meses y una tasa de interés de 22.0%. Al mes contrae otra deuda de $50,000.00 para pagar en 4 meses a una tasa de 24.0%. Sin embargo, al término del primer préstamo no puede pagar y conviene con el acreedor hacer un solo pago dentro de otros 3 meses con una tasa de 30.0%.

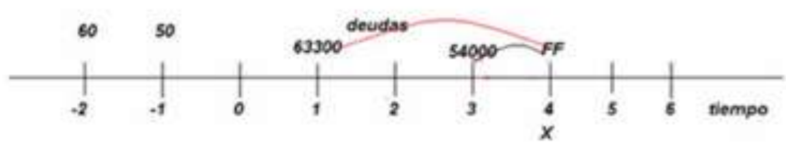
Por medio de una ecuación equivalente, calcule el valor del pago único considerando la fecha focal al mes 6.

Solución: a) Cálculo del monto de $60,000

$M = C(1 + in)$	
Datos	$C = 60{,}000$ $i = 0.22$ $n = \frac{3}{12} = 0.25$
Procedimiento	$M_1 = 60{,}000\ (1 + 0.22\text{x}0.25) = 63{,}300$

b) Cálculo del monto de $50,000

$M = C(1 + in)$	
Datos	$C = 50{,}000$ $\qquad n = \dfrac{4}{12} = 0.333333$ $i = 0.24$
Procedimiento	$M_2 = 50{,}000\ (1 + 0.24 \times 0.333333) = 54{,}000$  c) Diagrama de tiempo con los montos y reestructuración propuesta  d) Ecuación de valor equivalente: $D_1 + D_2 = P$ e) Se coloca la flecha focal a donde se llevan todas las cantidades. 

Procedimiento	Tiene que pagar dentro de 3 meses a partir de la fecha de la primera obligación la cantidad de $123,397.50. 
Solución	$D_1 = M_1(1 + 0.025{\times}3) = 68{,}047.50 \qquad P = X = 123{,}397.50$ $D_2 = M_2(1 + 0.025{\times}1) = 55{,}350.00$ Finalmente, ya que se definió cada una de las cantidades se da la conclusión. Es decir lo que tiene que pagar la persona. Tiene que pagar dentro de 3 meses a partir de la fecha de la primera obligación la cantidad de $123, 397.50

Ejemplo 3

Juan Rosas, para iniciar su negocio al día de hoy, tiene las obligaciones siguientes:

a) Un préstamo de \$30,000.00, otorgado hace 6 meses, con vencimiento el día de hoy e impuesto con una tasa de 2.5% mensual. C = \$30,000.00. t = Hace 6 meses con vencimiento el día de hoy. i = 2.5% mensual = 0.025 mensual.	b) Una deuda por \$ 5,000.00, contraída hace tres meses, con vencimiento dentro de 9 meses y con un tipo de interés de 3% mensual. C = \$5,000.00. t = Hace 3 meses con vencimiento dentro de 9 meses. i = 3% mensual = 0.03 mensual.
c) Un compromiso por \$50,000.00 contratado hace cuatro meses, con una tasa de 2% mensual y con un vencimiento dentro de 6 meses. C = \$50,000.00. t = Hace 4 meses con vencimiento dentro de 6 meses. i = 2% mensual = 0.02 mensual.	d) Una deuda por \$10,000.00 contratada hace un mes, con vencimiento dentro de 7 meses y una tasa de 3.5% mensual. C = \$10,000.00. t = Hace un mes con vencimiento dentro de 7 meses. i = 3.5% mensual = 0.035 mensual.

Hoy mismo, esta persona decide renegociar sus obligaciones con una tasa de 30% anual mediante tres pagos que dará como sigue:

1. \$30,000.00, el día de hoy.
2. \$45,000.00, dentro de 2 meses.
3. El saldo, dentro de 6 meses.

Calcula el importe del saldo utilizando como fecha focal el mes 6.

Solución con interés simple

ETAPA 1

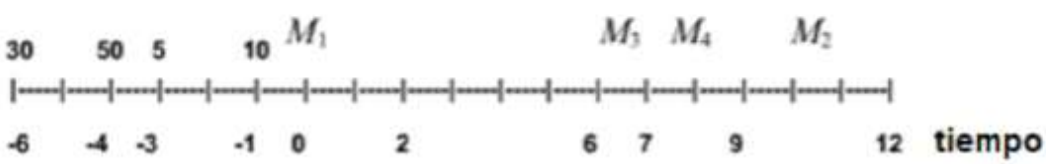
Se calcula los montos de las deudas originales:

DEUDA (D)	OPERACIÓN $M=C(1+in)$	MONTO DE LA DEUDA
A	30,000[1 + (0.025)(6)]	M_1 = 34,500
B	5,000[1 + (0.03)(12)]	M_2 = 6,800
C	50,000[1 + (0.02)(10)]	M_3 = 60,000
D	10,000[1 + (0.035)(8)]	M_4 = 12,800
	TOTAL EN VALORES ABSOLUTOS	$114,100.00

ETAPA 2

Se colocan los montos en el diagrama de tiempo-valor en la parte superior.

En la parte de abajo se pone el tiempo.



ETAPA 3

En la reestructuración
Se sitúa en la parte de abajo los pagos propuestos. En los tiempos señalados.
(Las deudas originales con sus montos se conservan en la parte superior).

ETAPA 4

Se coloca la fecha focal (se recomienda colocarla donde exista una variable) en la gráfica de tiempo valor.

ETAPA 5

Todas las cantidades, deudas originales y pagos propuestos se llevaban a la fecha focal.

ETAPA 6

Se da la ecuación de valor.

Σ DEUDAS = Σ PAGOS

$$D_1 + D_2 + D_3 + D_4 = P_1 + P_2 + P_3$$

Se definen–calculan las cantidades correspondientes. En el problema, como todas se llevan al futuro, son montos (M) tanto las deudas como los pagos propuestos.

$i = 30\% = 0.025$ *mensual*

DEUDA	OPERACIÓN	RESULTADO
D_1	M = 34500[1 + (0.025)(6)]	39,675
D_2	$C = \frac{6800}{1 + 0.025\ (3)}$	6,325.58
D_3	M = 60000	60,000
D_4	$C = \frac{12800}{1 + 0.025\ (1)}$	12,487.8
	Suma de deudas	**$118,488.38**

DEUDA	OPERACIÓN	RESULTADO
P_1	M=30000[1 + (0.025)(6)]	34500
P_2	M=45000[1 + (0.025)(4)]	49500
P_3	X	X
	Suma de pagos	**$84,000.00 + X**

Etapa 7

Ya definidas cada una de las cantidades se sustituyen en la ecuación equivalente.

$$M_{d1} + C_{d2} + M_{d3} + C_{d4} = M_{p1} + M_{p2} + X_{p3}$$

$$39{,}675 + 6{,}325.58 + 60{,}000 + 12{,}487.80 = 34{,}500 + 49{,}500 + X$$

$$118{,}488.38 = 84{,}000 + X$$

$$X = 34{,}488.38$$

Interpretación:

Dentro de 6 meses tiene que pagar $34,488.38 para saldar sus deudas.

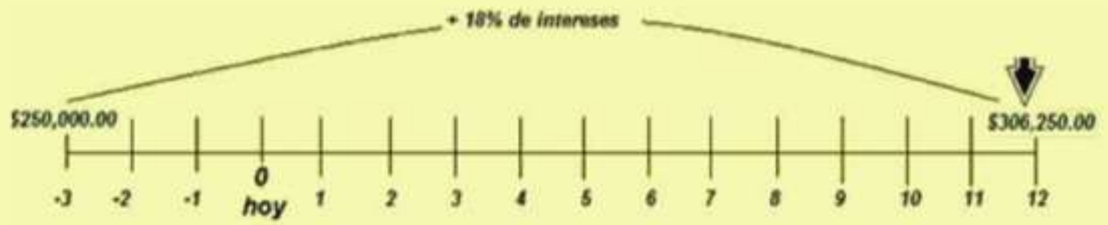
Ejemplo 4

El gerente de OSSA, para ampliar el negocio, hoy hace 3 meses que obtuvo un crédito de $250,000.00, con intereses de 18% a plazo de 15 meses. El día de hoy desea reestructurar su deuda de la siguiente forma: tasa de reestructuración de 2.5% mensual; pagar $80,000.00 dentro de 4 meses, $100,000.00 dentro de 9 meses y la diferencia dentro de 6 meses, todos contados a partir de hoy. ¿De cuánto será el pago que dará a los 6 meses?

1. Calcular el monto de la deuda

$$d = M = 25{,}000\left(1 + \frac{0.18}{12}(15)\right) = \$306{,}250.00$$

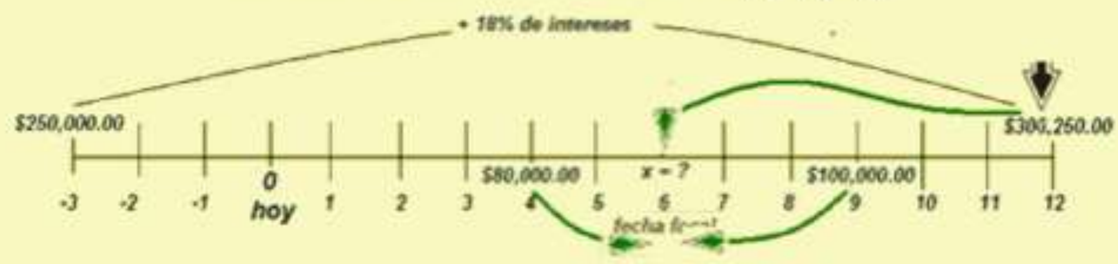
2. Dibuja el diagrama de tiempo de valor



3. Reestructura la deuda:

Ecuación de valor de la reestructuración: $d = p_1 + p_2 + p_3$

4. Indicar la fecha focal a los 6 meses de la ecuación de valor de la reestructuración: $d = p_1 + p_2 + p_3$



5. Define cada elemento, deudas y pagos, en la ecuación de valor.

$$d = p_1 + p_2 + p_3$$

$$d = C = \frac{306{,}250}{1 + (0.025)(6)} = \$266{,}304.34$$

$$p_1 = M = 80{,}000\big(1 + (0.025)(2)\big) = \$84{,}000.00$$

$$p_2 = x$$

$$p_3 = C = \frac{100{,}000}{1 + (0.025)(3)} = \$93{,}023.25$$

$$d = p_1 + p_2 + p_3$$

$$266{,}304.35 = 84{,}000 + x + 93{,}023.25$$

$$x = 266{,}304.35 - 84{,}000 - 93{,}023.25$$

$$x = \$89{,}281.10$$

6. Conclusión:

El gerente de OSSA tendrá que pagar
dentrode 6 meses la diferencia,
que es de $89,281.10

Ejemplo 5

María Loo tiene dos deudas: tenía que cubrir hoy $7,200.00 de una y $13,400.00 dentro de 2 meses, pero recibió un dinero extra y desea saldar hoy el total de sus deudas. ¿Cuánto tiene que pagar el día de hoy si la tasa para la reestructuración de sus deudas es de 24.36%?

1. Dibuja el diagrama de tiempo-valor:

2. La fecha focal debe estar en este momento:

ecuación de valor

$$d_1 + d_2 = p$$

$$d_1 + d_2 = x$$

3. Definimos cada concepto:

$$d_1 = 7{,}200 \quad d_2 = C = \frac{13{,}400}{1 + \left(\frac{0.2436}{12}\right)(2)} = \$12{,}877.19$$

$$p = x$$

Sustituimos en la ecuación de valor:

$$d_1 + d_2 = p$$

$$7{,}200 + 12{,}877.19 = p$$

$$p = \$20{,}077.19$$

6. Conclusión:

María Loo tiene que pagar en este momento $20,077.19 para liquidar sus deudas.

RESUMEN

A lo largo de esta primera unidad se explicaron algunos conceptos básicos para entender el funcionamiento de interés simple y su cálculo.

Como se indicó en la introducción de la unidad, todas las economías modernas trabajan con base en créditos, es decir, en la confianza de que, al prestar o facilitar bienes, servicios o dinero, posteriormente serán pagados; se realizan con base en la confianza.

Cuando el bien ajeno es utilizado con fines de lucro, es necesario pagar una cantidad de dinero por ese uso, cuando se trata de un bien común, a ese pago se le denomina alquiler o renta; se conoce como interés o intereses. De la necesidad para calcular los intereses surgieron las matemáticas financieras. La forma de calcularlo es mediante lo que se conoció como interés simple.

El interés simple es aquel que se calcula sobre un capital inicial que permanece invariable en el tiempo; los intereses se manejan por separado y se retiran de la operación financiera. En consecuencia, el interés que se obtiene en cada intervalo unitario de tiempo es siempre el mismo.

En esta unidad se propusieron algunos ejercicios de cálculo que procuraron brindar los elementos que intervienen en el interés simple.

BIBLIOGRAFÍA

SUGERIDA

Autor	Capítulo	Páginas
Díaz y Aguilera (2008)	2	47-81

Díaz Mata, Alfredo y Aguilera Gómez, Víctor (2008). *Matemáticas financieras* (4ª ed.). México: McGraw-Hill. [e-book disponible en REDUNAM, http://unam.libri.mx/libro.php?libroId=131

Unidad 2

Interés compuesto

OBJETIVO PARTICULAR

El alumno identificará y calculará los diferentes elementos que intervienen en el interés compuesto.

TEMARIO DETALLADO

(12 horas)

2. Interés compuesto

2.1. Concepto
2.2. Monto, capital, tasa de interés y tiempo
2.3. Tasa nominal, tasa efectiva y tasas equivalentes
2.4. Ecuaciones de valores equivalentes

INTRODUCCIÓN

En esta unidad, comprenderemos la diferencia existente entre el interés simple y el interés compuesto; las tasas de interés nominal, equivalente y efectiva en un periodo anual; y que la mayoría de las operaciones financieras se realizan con interés compuesto con el fin de que los intereses liquidados no entregados (en inversiones o créditos) entren a formar parte del capital, y, por tanto, que, en periodos subsecuentes, también generarán intereses. Este fenómeno se conoce con el nombre de **capitalización de intereses** y forma el interés compuesto.

Aprenderemos y aplicaremos el interés compuesto en el cálculo de capital, monto, intereses, tasa de interés, tiempo, así como en la reestructuración de deudas.

2.1. Concepto

La gran mayoría de las operaciones financieras se realizan a interés compuesto con el objeto de que los intereses liquidados no entregados entren a formar parte del capital y, para próximos periodos, generen a su vez intereses. Este fenómeno se conoce con el nombre de **capitalización de intereses.**

Al invertir un dinero o capital a una tasa de interés durante cierto tiempo, nos devuelven ese capital más los beneficios o intereses, que entonces se llama *monto*. Cuando los intereses no se retiran y se acumulan al capital inicial para volver a generar intereses, se dice que la inversión es a interés compuesto.

El *interés compuesto* se da cuando, al vencimiento de una inversión a plazo fijo, no se retiran los intereses, se presenta un incremento sobre el incremento ya obtenido, se tiene interés sobre interés. En los créditos, generalmente se utiliza el interés compuesto; aunque las instituciones digan que manejan interés simple, son contados los casos en que se utiliza el interés simple. El *periodo de capitalización* es el tiempo que hay entre dos fechas sucesivas en las que los intereses son agregados al capital. La *frecuencia de capitalización* es el número de veces por año en los que los intereses se capitalizan.

El interés compuesto tiene lugar cuando el deudor no paga, al concluir cada periodo que sirve como base para su determinación, los intereses correspondientes. Así, provoca que los mismos intereses se conviertan en un capital adicional que a su vez producirá intereses (es decir, los intereses se capitalizan para producir más intereses).

Cuando el tiempo de la operación es superior al periodo al que se refiere la tasa, los intereses se capitalizan: nos encontramos ante un problema de interés compuesto y no de interés simple. En la práctica, en las operaciones a corto plazo, aun cuando los periodos a que se refiere la tasa sean menores al tiempo de la operación y se acuerde que los intereses sean pagaderos hasta el fin del plazo total, sin consecuencias de capitalizaciones, la inversión se hace a interés simple.

Por eso, es importante determinar los plazos en que van a vencer los intereses para que se puedan especificar las capitalizaciones, y, en consecuencia, establecer el procedimiento para calcular los intereses (simple o compuesto).

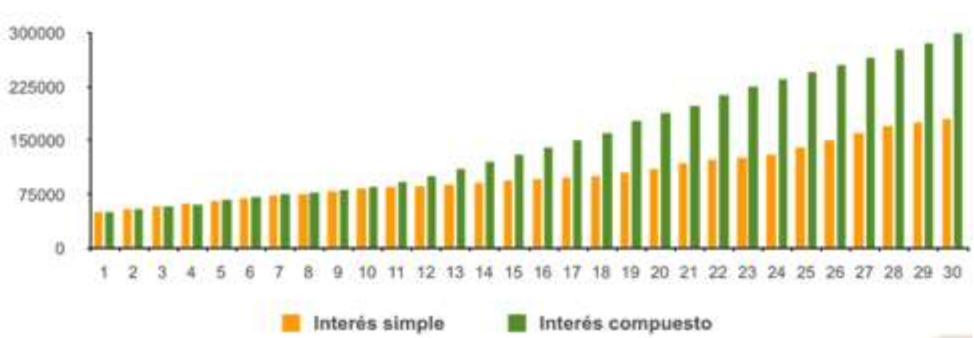
Como los resultados entre el interés simple y el interés compuesto no son los mismos, debido a que en este último la capitalización de los intereses se hace con diferentes frecuencias y manteniendo la proporcionalidad en las diferentes tasas de interés. Haremos la conversión de la tasa de interés equivalente: nominal a efectiva, lo que nos indica la tasa real que se paga en dichas operaciones.

Cuando no se indican los plazos en que se deben llevar a cabo las capitalizaciones, se da por hecho que se efectuarán de acuerdo con los periodos a los que se refiere la tasa. En caso de que la tasa no especifique su vencimiento, se entenderá que es anual y las capitalizaciones, anuales.

El interés compuesto es una herramienta en el análisis y evaluación financiera de los movimientos del dinero, es fundamental para entender las matemáticas financieras, con su aplicación obtenemos intereses sobre los intereses, esto significa la capitalización del dinero a través del tiempo. Se calcula el monto del interés sobre la base inicial más los intereses acumulados en períodos previos, es decir, los intereses que se reciben se vuelven a invertir para ser un capital nuevo.

Si al terminar un periodo en una inversión a plazo fijo, no se retira el capital ni los intereses, entonces, a partir del segundo periodo, los intereses ganados se integran al capital inicial, formándose un nuevo capital para el siguiente periodo, el cual generará nuevos intereses y así sucesivamente. Se dice, por lo tanto, que los intereses se capitalizan, por lo que el capital inicial no permanece constante a través del tiempo, ya que aumentará al final de cada periodo por la adición de los intereses ganados, de acuerdo con una tasa convenida. Cuando esto sucede, decimos que las operaciones financieras son a **interés compuesto.**

El **interés simple** produce un crecimiento lineal del capital; por el contrario, un capital a interés compuesto crece de manera exponencial.



Interés compuesto

Como ya se señaló, el interés es un índice expresado en porcentaje, es la cantidad que se pagará por hacer uso del dinero ajeno. Nos indica cuánto se tiene que pagar en caso de crédito o cuánto se gana en caso de inversión.

El interés compuesto se refiere al beneficio del capital original a una tasa de interés durante un periodo, en donde los intereses no se retiran, se reinvierten.

Monto	Capital	Periodo de capitalización
• El **capital futuro** es el **monto** de una operación a **interés compuesto** y es la cantidad que se acumula al final del proceso o lapso considerado, a partir de un capital inicial sujeto a determinados periodos de capitalización de intereses.	• Es el **valor presente** o *actual* de una operación a ***interés compuesto***, es el capital inicial calculado a partir de un monto futuro, considerando cierto número de periodos de capitalización de intereses.	• El periodo convenido para convertir el interés en capital se llama ***periodo de capitalización o periodo de conversión.*** Así, si una operación se capitaliza semestralmente, quiere decir que cada seis meses los intereses generados se agregan al capital para generar nuevos intereses en los siguientes periodos. De igual forma, al decir que un periodo de capitalización es mensual, se está indicando que al final de cada mes se capitaliza el interés generado en el transcurso del mes.

El interés puede capitalizarse en periodos anuales, semestrales, cuatrimestrales, trimestrales, bimestrales, mensuales, semanales, quincenales, etc. y al número de veces que el interés se capitaliza en un año se le llama **frecuencia de conversión o frecuencia de capitalización.**

Un gran número de operaciones en el medio financiero se trabajan a interés **compuesto** cuando son a plazos medianos o largos.

Tasas equivalentes

Como los resultados entre el interés simple y el interés compuestos no son los mismos, debido a que en éste último la capitalización de los intereses se hace con diferentes frecuencias manteniendo la proporcionalidad en las diferentes tasas de interés; por tanto, se convertirá la tasa de interés equivalente: nominal a efectiva, de lo que resultará la tasa real que se paga en dichas operaciones.

Para lograr que, cualquiera sea la frecuencia de capitalización, el valor final sea el mismo, es menester cambiar la fórmula de equivalencia de la tasa de interés.

En créditos, el pago de los intereses es al vencimiento o por anticipado; en inversiones, siempre es al vencimiento. El interés nominal, por lo general, condiciona la especificación de su forma de pago en el año. Para determinar a qué tasa de interés equivalen los intereses pagados o por cubrir, se debe tomar en cuenta que éstos deben reinvertirse, generando, a su vez, intereses.

La tasa efectiva anual (TEA), aplicada una sola vez, produce el mismo resultado que la tasa nominal, según el período de capitalización. La tasa del período tiene la característica de ser simultáneamente nominal y efectiva.

Tasa nominal

La tasa nominal es el interés que capitaliza más de una vez por año. Esta tasa la fija el Banco de México de un país para regular las operaciones activas (préstamos y créditos) y pasivas (inversiones, depósitos y ahorros) del sistema financiero. Siendo la tasa nominal un límite para ambas operaciones y como su empleo es anual resulta equivalente decir tasa nominal o tasa nominal anual.

Tasa efectiva

La tasa efectiva es aquella a la que realmente está colocado el capital. La capitalización del interés en determinado número de veces por año, da lugar a una tasa efectiva mayor que la nominal. Esta tasa representa globalmente el pago de intereses, impuestos, comisiones y cualquier otro tipo de gastos que la operación financiera implique. La tasa efectiva es una función exponencial de la tasa periódica.

Con el fin de conocer el valor del dinero en el tiempo, es necesario que las tasas de interés nominales sean convertidas a tasas efectivas. La tasa de interés nominal no es una tasa real, genuina o efectiva.

Nomenclatura

C	Representa el capital inicial, llamado también principal. Suele representarse también por las letras *A* o *P* (valor presente).
M	Representa el capital final, llamado también monto o dinero incrementado. Es el valor futuro de *C*.
J	Es la tasa nominal de interés calculada para un período de un año. Se expresa en tanto por uno o tanto por ciento.
I	Es la tasa de interés por período y representa el costo o rendimiento por período de capitalización de un capital, ya sea producto de un préstamo o de una cantidad que se invierte. Es el cociente de dividir la tasa nominal entre la frecuencia de conversión *m*.
m	Es la frecuencia de conversión o de capitalización y representa el número de veces que se capitaliza un capital en un año.
n_a	Es el número de años que permanece prestado o invertido un capital.
n	Es el número de periodos de que consta una operación financiera a interés compuesto.

Para calcular el monto de un capital a interés compuesto, se determina el interés simple sobre un capital sucesivamente mayor, como resultado de que en cada periodo los intereses se van sumando al capital inicial.

Por **ejemplo**, el caso de un préstamo de $10,000.00 a 18% anual en 6 años: para confrontar el funcionamiento respecto del interés simple, se compara ambos tipos de interés en la siguiente tabla:

	Interés compuesto	Interés simple
Capital inicial	$10,000.00	$10,000.00
Intereses en el 1º año	$1,800.00	$1,800.00
Monto al fin del 1º año	$11,800.00	$11,800.00
Intereses en el 2º año	$2,124.00	$1,800.00
Monto al fin del 2º año	$13,924.00	$13,600.00
Intereses en el 3º año	$2,506.32	$1,800.00
Monto al fin del 3º año	$16,430.32	$15,400.00
Intereses en el 4º año	$2,957.46	$1,800.00
Monto al fin del 4º año	$19,387.78	$17,200.00
Intereses en el 5º año	$3,489.80	$1,800.00
Monto al fin del 5º año	$22,877.58	$19,000.00
Intereses en el 6º año	$4,117.96	$1,800.00
Monto al fin del 6º año	**$26,995.54**	**$20,800.00**

Como se puede ver, el monto a interés compuesto es mayor por la capitalización de los intereses en cada uno de los plazos establecidos de antemano. Si se sigue este procedimiento, podemos encontrar el monto a interés compuesto; sin embargo, cuando el tiempo de operación es demasiado largo, esta misma solución puede tener errores.

Nota: Para estudiar el interés compuesto, se utilizan las mismas literales del interés simple, pero cabe hacer algunas observaciones importantes:

En este caso, el tiempo se mide por períodos de capitalización (número de veces que los intereses se convierten o suman al capital en todo el plazo que dura la operación).

- Se debe tomar en cuenta, nuevamente, que tanto la variable tiempo —que de aquí en adelante se le puede llamar periodo de capitalización (*n*) — como la de tasa de interés (*i*) se manejen en la misma unidad de tiempo.

- En la tasa de interés pueden aparecer las palabras **convertible, compuesto, nominal con capitalización o capitalizable**, que se toman como sinónimos e indican el número de veces que se capitalizarán los intereses en un año (frecuencia de conversión).

2.2. Monto, capital, tasa de interés y tiempo

Fórmulas con interés compuesto

Se conoce el capital, la tasa nominal, la frecuencia de conversión y el plazo:

MONTO	
Monto futuro	$M = C(1+i)^n$
Tasa por periodo de capitalización	$i = \frac{J}{m}$
Núm. de periodos de capitalización	$n = n_a \text{ x } m$

CAPITAL	
Capital	$C = \frac{M}{(1+i)^n}$
o también:	$C = M(1+i)^{-n}$
en donde:	$i = \frac{J}{m}$ y $n = n_a \text{ x } m$

CAPITAL EN FUNCIÓN DEL INTERÉS
$C = \frac{I}{(1+i)^n - 1}$
$Capital = C = \frac{M}{(1+i)^n}$
$tiempo = n = \frac{log\left(\frac{M}{C}\right)}{log\ (1+i)} = \frac{In\left(\frac{M}{C}\right)}{In\ (1+i)}$
$tasa\ de\ interés = i = \left(\frac{M}{C}\right)^{m\,n} - 1$ donde: m = tiempo n = periodos de capitalización en un año

Capital en función del interés:

Ejercicio 1	
El 18% convertible mensual indica que el 18% que está en forma anual debe ser convertido a forma mensual.	Esto se realiza dividiendo el porcentaje entre 12 (número de meses del año): 0.18/12 $\frac{0.18}{12} = 0.015\ \textit{mensual}$ Si es capitalizable trimestralmente, el resultado es 0.18/4: $\frac{0.18}{4} = 0.045\ \textit{mensual}$

Ejercicio 2	
El 24% con capitalización: a) Quincenal b) Cuatrimestral c) Mensual d) Semestral	a) $\frac{0.24}{24} = 0.01$ b) $\frac{0.24}{3} = 0.08$ c) $\frac{0.24}{12} = 0.02$ d) $\frac{0.24}{2} = 0.12$

Ejercicio 3	
El 36% con capitalización y tiempo: a) Mensual en 8 meses b) Semanal en 5 meses c) Trimestral en nueve meses	a) $\frac{0.36}{12}$ $(8) = 0.24$ b) $\frac{0.36}{52}$ $(20) = 0.1384$ c) $\frac{0.36}{4}$ $(3) = 0.27$

Ejercicio 4	
¿Cuánto capital producirá un interés compuesto de $139,940.57 a los 4 años y a la tasa de 2% bimestral?	**Datos:** $I = 139{,}940.57$ $i = 0.02$ $m = 6$ $n_a = 4$ $n = (n_a)\ (m) = (4)\ (6) = 24$ **Fórmula:** $C = \frac{I}{(1+i)^{n}-1}$ **Solución:** $C = \frac{139{,}940.57}{(1+0.02)^{24}-1} = 230{,}000$

Ejercicio 5	
¿Cuál es el capital de un valor acumulado de $924,138.14 invertido durante 12 años a 22% anual?	**Fórmula:** $C = M(1+i)^{-n}$ $i = \frac{J}{m}$ $n = n_a \text{ x } m$ **Datos:** $M = 924{,}138.14$ $J = 0.22$ $m = 1$ $n_a = 12$ **Solución:** $i = \frac{0.22}{1}$ 0.22 $n = 1\text{x}12 = 12$ $A = 924{,}138.14(1+0.22)^{-12} = 85{,}000.00$

Ejercicio 6	
¿Qué capital produce un monto de $380,000.00 a los 6 años si la tasa es 3.5% trimestral?	**Fórmula:** $C = M(1+i)^{-n}$ $i = \frac{J}{m}$ $n = n_a \text{ x } m$ **Datos:** $M = 380{,}000.00$ $i = 0.035$ $m = 4$ $n_a = 6$ **Solución:** $n = 4\text{x}6 = 24$ $A = 380{,}000.00(1+0.035)^{-24} = 166{,}423.71$

Ejercicio 7

Calcular el valor actual de un capital futuro de $7,500.00 con vencimiento en 4 años si la tasa de interés es de 14.0%:

a) Con capitalización mensual
b) Con capitalización bimestral
c) Con capitalización trimestral
d) Comparar resultados

a) Capitalización mensual

$C = M(1+i)^{-n}$ $i = \frac{J}{m}$ $n = n_a \times m$	
Datos	$M = 7{,}500$ $J = 0.14$ $m = 12$ $n_a = 4$
Procedimiento	$i = \frac{0.14}{12} = 0.011667$ $n = 4\times12 = 48$ $A = 7{,}500(1+0.011667)^{-48} = 4{,}297.58$

b) Capitalización bimestral

$C = M(1+i)^{-n}$ $i = \frac{J}{m}$ $n = n_a \times m$
$M = 7{,}500$ $J = 0.14$ $m = 6$ $n_a = 4$
$i = \frac{0.14}{6} = 0.023333$ $n = 4 \times 6 = 24$ $A = 7{,}500(1+0.023333)^{-24} = 4{,}311.72$

c) Capitalización trimestral

$C = M(1+i)^{-n}$ $i = \frac{J}{m}$ $n = n_a \times m$	
Datos	$M = 7{,}500$ $J = 0.14$ $m = 4$ $n_a = 4$
Procedimiento	$i = \frac{0.14}{4} = 0.035$ $n = 4 \times 4 = 16$ $A = 7{,}500(1+0.035)^{-16} = 4{,}325.29$

Interpretación: La diferencia entre una capitalización bimestral respecto de una mensual es del 0.32%; la trimestral respecto a la bimestral es de un 0.315%; la trimestral respecto a una mensual es del 0.635%

Fórmulas para calcular el monto de intereses de una inversión a interés compuesto:

$$I = C\left[(1+i)^{n} - 1\right]$$

Ejercicio 8

Apliquemos la fórmula anterior: ¿cuál es el monto de intereses de un capital de $85,000.00, impuesto a un interés compuesto a la tasa de 22% durante 12 años?

$I = C[(1+i)^{n} - 1]$ $i = \frac{J}{m}$ $\quad n = n_a \times m$	
Datos	$M = 85{,}000.00$ $\quad i = 0.22$ $m = 1$ $\quad n_a = 12$
Procedimiento	$n = 12 \times 1 = 12$ $I = 85{,}000.00[(1+0.22)^{12} - 1] = 839{,}138.14$ A continuación, comprobemos el resultado anterior: Monto según el ejercicio 1 924,138.14 Menos capital propuesto 85,000.00 Interés según resolución anterior 839,138.14

Fórmulas para calcular la tasa de interés de una inversión a interés compuesto

Se conoce el capital inicial, el monto futuro de capital, la frecuencia de conversión y el plazo de tiempo o número de periodos de capitalización:

$$J = \left[\sqrt[n]{\frac{M}{C}} - 1\right] \times m$$

Siendo: $n = n_a \times m$

Ejercicio 9

Un capital de $18,000.00 ha estado invertido durante 3 años, luego de los cuales dio un monto de $26,000.00, ¿a qué tasa se celebró la operación?

Solución

$J = \left[\sqrt[n]{\frac{M}{C}} - 1\right] \times m$	
Datos	$M = 26{,}000.00$ $C = 18{,}000.00$ $m = 1$ $n_a = 3$ $n = 1 \times 3 = 3$
Procedimiento	$J = \left[\sqrt[3]{\frac{26}{18}} - 1\right] \times 1$ $J = 0.130404 = 13.04\%$

Ejercicio 10

Con un capital de $9,500.00 se formó un monto de $13,290.00 a los 2 años, ¿a qué tasa se hizo la inversión?

Solución

$J = \left[\sqrt[n]{\frac{M}{C}} - 1\right] \times m$	
Datos	$M = 13{,}290.00$ $C = 9{,}500.00$ $m = 1$ $n_a = 2$ $n = 1 \times 2 = 2$
Procedimiento	$J = \left[\sqrt{\frac{13{,}290}{9{,}500}} - 1\right] \times 1$ $J = 0.182771 = 18.3\%$

Ejercicio 11

Si de una inversión de \$50,000.00 se llegan a obtener \$80,000.00 al cabo de 5 años a una tasa de interés capitalizable trimestralmente:

a) ¿Cuál es la tasa de interés nominal?
b) ¿Cuál sería la tasa anual si se capitalizara semestralmente?
c) Interpretación

Solución: a) Capitalización trimestral

$$J = \left[\sqrt[n]{\frac{M}{C}} - 1\right] \times m$$

Datos	$M = 80{,}000.00$ $C = 50{,}000.00$ $m = 4$ $n_a = 5$ $n = 5 \times 4 = 20$
Procedimiento	$J = \left[\sqrt[20]{\frac{80{,}000}{50{,}000}} - 1\right] \times 4$ $J = 0.095114 = 9.51\%$

Solución: b) Capitalización semestral

$$J = \left[\sqrt[n]{\frac{M}{C}} - 1\right] \times m$$

Datos	$M = 80{,}000.00$ $C = 50{,}000.00$ $m = 2$ $n_a = 5$ $n = 5 \times 2 = 10$
Procedimiento	$J = \left(\sqrt[10]{\frac{80{,}000}{50{,}000}} - 1\right) \times 2$ $J = 0.096245 = 9.62\%$

Interpretación: La diferencia entre una capitalización semestral respecto a una trimestral es de 0.11 ppc, o sea, el 1.16% más.

Fórmulas para calcular el tiempo o plazo en una inversión a interés compuesto

Se conoce el capital inicial, el monto futuro de capital, la tasa nominal o la tasa efectiva por periodo y la frecuencia de conversión:

$$n = \frac{Ln\left(\frac{M}{C}\right)}{Ln\ (1+i)} = \frac{log\left(\frac{M}{C}\right)}{log\ (1+i)}$$

Se pueden utilizar en estos planteamientos tanto los logaritmos naturales como los logaritmos decimales.

Ejercicio 12

¿Dentro de cuánto tiempo un capital de $25,600.00 a la tasa de 2.5% trimestral valdrá $31,970.89?

Solución:

$n = \frac{log\left(\frac{M}{C}\right)}{log\ (1+i)}$	
Datos	M = 31,970.89 C = 25,600.00 m = 4 i = 0.025
Procedimiento	$n = \frac{\log\frac{31{,}970.89}{25{,}600}}{\log(1+0.025)} = 9\ trimestres$

Ejercicio 13

¿Dentro de cuánto tiempo una persona que invirtió \$115,000.00 obtendrá \$139,179.87, como monto a la tasa de 1.75% bimestral?

Solución:

$n = \dfrac{\log\left(\dfrac{M}{C}\right)}{\log(1+i)}$	
Datos	M = 139,179.87 C = 115,000.00 m = 6 i = 0.0175
Procedimiento	$n = \dfrac{\log\dfrac{139{,}179.87}{115{,}000.00}}{\log(1+0.0175)}$ $n = 11\ Bimestres$

Ejercicio 14

Si de una inversión de \$50,000.00 se llega a obtener \$58,235.00 a una tasa de 8.5% con capitalización mensual:

a) Obtener el plazo de esta operación en años, meses, y días.
b) Obtener el plazo si la capitalización se modifica a bimestral.
c) Interpretar resultados.

Solución: a) Capitalización mensual **b) Capitalización bimestral**

		a) Capitalización mensual	b) Capitalización bimestral
$n = \dfrac{Ln\left(\dfrac{M}{C}\right)}{Ln\ (1+i)}$	**Datos**	M = 58,235.00 C = 50,000.00 m = 12 J = 0.085 $i = \dfrac{0.085}{12} = 0.007083$	M = 58,235.00 C = 50,000.00 m = 6 J = 0.085 $i = \dfrac{0.085}{6} = 0.014167$
	Procedimiento	$n = \dfrac{Ln\dfrac{58{,}235}{50{,}000}}{Ln\ (1+0.007083)}$ $n = 21.600408\ meses$ $n = 1\ año\ 9\ meses\ 18\ dias$	$n = \dfrac{Ln\dfrac{58{,}235}{50{,}000}}{Ln\ (1+0.014167)}$ $n = 10.838185\ bimestres$ $n = 1\ año\ 9\ meses\ 20\ dias$

Interpretación: La diferencia es mínima de solo 2 días.

2.3. Tasa nominal, tasa efectiva y tasas equiva

Tasa nominal

- La tasa nominal es la tasa de interés convenida en una operación financiera y se encuentra estipulada en los contratos, por lo que también se conoce como tasa **contractual**.

Tasa equivalente

- Una **tasa equivalente** muy utilizada en múltiples operaciones financieras es la llamada tasa de interés anual efectiva o simplemente **tasa efectiva**. Se define como la tasa de interés capitalizable una vez al año que equivale a una tasa nominal capitalizable *m* veces al año. La tasa efectiva es la tasa de rendimiento que se obtiene al cabo de un año, debido a la capitalización de intereses; por lo tanto, la tasa efectiva refleja el efecto de la reinversión. Se le conoce también como **rendimiento anual efectivo.**

Tasa de interés simple

- Por lo tanto, si un capital se invierte a una tasa de interés capitalizable cada año, el monto compuesto al final del primer año es igual al monto obtenido a interés simple y a un año de plazo, por lo cual, la tasa efectiva anual se puede definir como la **tasa de interés simple** que produce el mismo interés en un año que la tasa nominal capitalizada *m* veces al año.

Tasa de interés anual

- La **tasa de interés anual** que se capitaliza *m* veces en un año se denomina tasa de interés nominal.

Tasas efectivas de interés por periodo de capitalización

- En una operación financiera a interés compuesto, será fundamental calcular la tasa de interés efectiva por cada periodo de capitalización. Ésta se refiere al costo o rendimiento que representa para un capital que se invierte, considerando cada periodo independientemente del plazo de la operación.

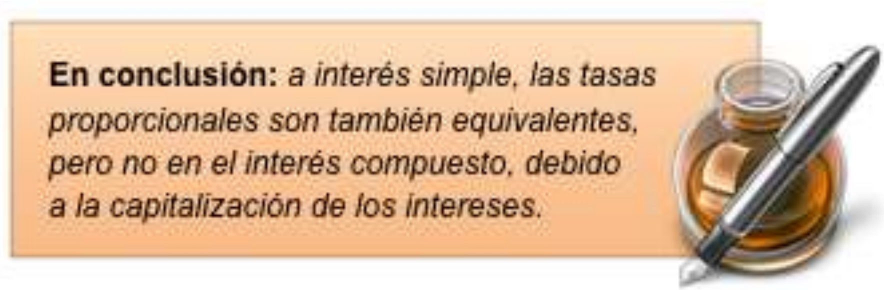
Relación de equivalencia entre tasas nominales y efectivas de interés. Las tasas efectivas son indicadores que ayudan a inversionistas y asesores financieros a tomar mejores decisiones para la inversión de capitales.

Las **tasas nominal** y **efectiva** son equivalentes cuando producen la misma cantidad de dinero al final del año.

En el interés simple, la tasa de 12% anual es proporcional a 6% semestral, a 3% trimestral y a 1% mensual. Además de la proporcionalidad, las tasas anteriores (ya que en ellas existe la misma relación entre sus valores y los periodos a que se refieren) son a su vez equivalentes, pues, a pesar de referirse a distintos periodos, en igual tiempo producen un mismo monto. Así, vemos que $100,000.00 a 12% en un año generan un monto de $112,000.00. Si invertimos el mismo capital a 6% semestral en 2 semestres, formará exactamente el mismo monto:

Capital	$100,000.00
Intereses en el 1er semestre	$6,000.00
Intereses en el 2º semestre	$6,000.00
Monto en 2 semestres	$112,000.00

Por tanto, $100,000.00 al 1% mensual en 12 meses llegará a convertirse en el mismo monto anterior.



Lo anterior se puede corroborar mediante los cálculos siguientes:

Préstamo de $100,000.00 a las tasas capitalizables que se mencionan.

	12 % anual	6% semestral	3% trimestral	1% mensual
Capital	100,000	100,000	100,000	100,000
Interés del periodo	12,000	6,000	3,000	1,000
Monto	112,000	106,000	103,000	101,000
Interés del periodo		6,360	3,090	1,010
Monto		112,360	106,090	102,010
Interés del periodo			3,182.70	1,020.10
Monto			109,272.70	103,030.10
Interés del periodo			3,278.18	1,030.30
Monto			112,550.88	104,060.40
Interés del periodo				1,040.60
Suma				105,101.00
Interés 6° periodo				1,051.01
Suma				106,152.01
Interés 7° periodo				1,061.52
Suma				107,213.53
Interés 8° periodo				1,072.14
Suma				108,285.67
Interés 9° periodo				1,082.85
Suma				109,368.52
Interés 10° periodo				1,093.69
Suma				110,462.21
Interés 11° periodo				1,104.62
Suma				111,566.83
Interés 12° periodo				1,115.67
Monto				112,682.50
TOTAL	112,000	112,360	112,550.88	112,682.50

Si a cada uno de los totales le restamos lo invertido al inicio (el capital), tenemos:

M-C	12,000	12,360	12,550.88	12,682.50

Si este interés lo dividimos entre lo que se invirtió (*C* = $100,000.00), nos da:

I / C	0.12 = 12%	0.1236 = 12.36%	0.1255088 = 12.55088%	0.126825 = 12.6825%

Lo anterior demuestra que la tasa efectiva equivalente a una tasa de 12% anual capitalizable semestralmente es de 12.36%. Asimismo, la tasa efectiva equivalente a 12% anual capitalizable por trimestre es 12.55088%. De la misma manera, la tasa de 12% anual capitalizable por mes es equivalente a 12.6825% efectivo.

En conclusión:

La **tasa efectiva** se puede obtener dividiendo el interés generado entre el capital inicial.

Fórmula para determinar la tasa efectiva anual (*e*) a partir de la tasa nominal

$$e = \left(1 + \frac{J}{m}\right)^{m} - 1$$

Fórmula para determinar la tasa nominal (*J*) a partir de la tasa efectiva anual (*e*)

$$J = \left[(1 + e)^{\frac{1}{m}} - 1\right] \text{x } m$$

Ejemplo 1

¿Cuál es la tasa nominal convertible mensualmente equivalente a 18.81% efectivo?

Solución

$J = \left[(1 + e)^{\frac{1}{m}} - 1\right] \text{x } m$	
Datos	$e = 0.1881$ $m = 12$
Procedimiento	$J = \left[(1 + 0.1881)^{\frac{1}{12}} - 1\right] \times 12$ $J = 0.173599 = 17.36\%$ Lo anterior significa que la tasa del 17.3599% convertible mensualmente equivale al 18.81% efectivo.

Ejemplo 2

Obtener la tasa nominal si la tasa efectiva anual es de 15.4%:

a) Con capitalización semestral
b) Con capitalización mensual
c) Interpretar resultados

Solución: a) Capitalización semestral — **b) Capitalización mensual**

$J = \left[(1+e)^{\frac{1}{m}} - 1\right] \times m$

	a) Capitalización semestral	b) Capitalización mensual
Datos	$e = 0.154$ $m = 2$	$e = 0.154$ $m = 12$
Procedimiento	$J = \left[(1+0.154)^{\frac{1}{2}} - 1\right] \times 2$ $J = 0.148488 = 14.8\%$	$J = \left[(1+0.154)^{\frac{1}{12}} - 1\right] \times 12$ $J = 0.144092 = 14.4\%$

Interpretación: *La diferencia es mínima de 0.4 ppc, que representa el 2.7% menor con la capitalización mensual respecto a la capitalización semestral.*

Ejemplo 3

¿Cuál es la tasa efectiva equivalente a 18% convertible semestralmente?

Solución

$$e = \left(1 + \frac{J}{m}\right)^{m} - 1$$

Datos	$J = 0.18$ $m = 2$
Procedimiento	$e = \left(1 + \frac{0.18}{2}\right)^{2} - 1$ $J = 0.1881 = 18.8\%$ Esto quiere decir que la tasa del 18% convertible semestralmente equivale al 18.82% efectivo.

A continuación, comprobemos que las tres tasas sonequivalentes- para ello, utilizaremos el mismo ejercicio para las tres tasas:

Ejercicio 4

¿Cuál es el monto de $10,000.00 depositados durante un año si se tienen tres opciones?

a) A una tasa de 18% convertible semestralmente
b) A una tasa de 17.3599% convertible mensualmente
c) A una tasa de 18.81% efectivo

Solución:

a) A la tasa del 18% convertible semestralmente

$M = C(1+i)^{-n}$ $i = \frac{J}{m}$ $n = n_a \times m$	
Datos	$C = 10{,}000$ $J = 0.18$ $m = 2$ $n_a = 1$
Procedimiento	$i = \frac{0.18}{2} = 0.09$ $n = 2{\times}1 = 2$ $M = 10{,}000(1+0.09)^2 = 11{,}881.00$

b) A la tasa del 17.3599 % convertible mensualmente

$C = 10{,}000$ $J = 0.173599$ $m = 12$ $n_a = 1$
$i = \frac{0.173599}{12} = 0.014467$ $n = 12{\times}1 = 12$ $M = 10{,}000(1+0.014467)^{12} = 11{,}881.00$

Solución c) A una tasa de 18.81% efectivo

$M = C(1+i)$ $i = \frac{J}{m}$ $n = n_a \times m$	
Datos	$C = 10{,}000$ $J = 0.1881$ $m = 1$ $n_a = 1$
Procedimiento	$i = \frac{0.1881}{1} = 0.18817$ $n = 1{\times}1 = 1$ $M = 10{,}000(1+0.1881)^1 = 11{,}881.00$

Capitalización continua

Si la tasa de interés es constante, pero la capitalización es más frecuente, el monto compuesto crece. ¿Qué pasa cuando los periodos de capitalización tienden a infinito? ¿El monto tenderá a infinito? En la tabla se muestra que el monto no tiende a infinito cuando los periodos de capitalización aumentan, el monto se acerca lentamente a un valor determinado.

Monto para un capital de $100 y varias frecuencias de capitalización de un interés nominal anual de 30%		
Frecuencia de capitalización	**Periodos por año**	**Monto compuesto en un año ($)**
Anual	1	130.00
Semestral	2	132.25
Trimestral	4	133.54
Mensual	12	134.48
Quincenal	24	134.73
Semanal	52	124.86
Diaria	365	134.96
Por hora	8760	134.9851
Por minuto	525,600	134.9858

La fórmula para calcular el monto cuando la capitalización es continua es la siguiente:

$$M = Ce^{it}$$

Donde:

C	Capital
e	Base de los logaritmos naturales
n	Tiempo por periodo de capitalización
i	Tasa de interés nominal en forma decimal

Ejemplo 5

Una persona invierte $15,000.00 a una tasa de interés de 35%. Calcula el monto compuesto después de 3 años si el interés se capitaliza:

a) Trimestralmente
b) Mensualmente
c) Semanalmente
d) Continuamente

Procedimiento:

a)	$M = 15{,}000(1 + \frac{0.35}{4})^{12} = \$41{,}043.32$
b)	$M = 15{,}000(1 + \frac{0.35}{12})^{36} = \$42{,}225.7$
c)	$M = 15{,}000(1 + \frac{0.35}{52})^{156} = \$42{,}714.24$
d)	$M = 15{,}000e^{(0.35\times3)} = \$42{,}864.77$

Observamos que, aunque aumenta, llega un tiempo en que la variación ya es mínima.

2.4. Ecuaciones de valor equivalentes

Ecuación de valor

En **transacciones comerciales o financieras** es frecuente el intercambio de un paquete de obligaciones por otro con distintas condiciones en cuanto a tasas, pagos y vencimientos.

Una **ecuación de valor** es una igualdad que establece que la suma de los valores de un conjunto de deudas es igual a la suma de los valores de otro conjunto de deudas para reemplazar al conjunto original, una vez que sus valores de vencimiento se han trasladado a una fecha común llamada fecha focal o fecha de valuación. Ésta, tratándose de operaciones a interés compuesto, se puede elegir arbitrariamente, ya que los resultados serán idénticos en cualquier fecha focal que se elija.

La **ecuación de valor** es una de las **técnicas** más útiles de las **matemáticas** financieras, pues permite **solucionar** diversos tipos de **problemas financieros.**

Para resolver estos problemas, se utilizan gráficas (de tiempo valor) en las que se representan las fechas de vencimiento de las obligaciones originales y de pagos, respectivamente. Se recomienda efectuar el procedimiento siguiente, **el cual es el mismo que el visto para operaciones de interés simple:**

Etapa 1	• **Calcular** el **monto a pagar** de cada una de las obligaciones originales a su vencimiento.
Etapa 2	• Hacer la **gráfica de tiempo-valor** que considere las fechas de vencimiento. Sobre ella, se colocan los montos en el momento de su vencimiento.
Etapa 3	• Debajo de la gráfica de tiempo, se colocan los **pagos parciales**, al igual que las deudas, con sus fechas respectivas.
Etapa 4	• Se determina en la gráfica la **fecha focal** (de preferencia en donde coincida con algún pago; es recomendable que sea una incógnita, con el fin de realizar el menor número de operaciones).
Etapa 5	• Se realiza la **solución**. Para ello, se trasladan todas las cantidades a la fecha focal (se debe tomar en cuenta que la suma de todos los pagos debe cubrir la suma de las deudas).
Etapa 6	• Se **resuelven las operaciones.**

Estos pasos o etapas se desarrollarán en el siguiente ejercicio:

Ejemplo 1

El día de hoy, una persona tiene las obligaciones siguientes:

a) Un préstamo de \$30,000.00, otorgado hace 6 meses, con vencimiento el día de hoy, e impuesto con una tasa de 30% convertible mensualmente.	b) Una segunda deuda por \$5,000.00 contraída hace tres meses, con vencimiento dentro de 9 meses y un tipo de interés de 36% capitalizable mensualmente.
c) Un tercer compromiso por \$50,000.00, contratado hace cuatro meses, con una tasa de 24% nominal con capitalización mensual y con un vencimiento dentro de 6 meses.	d) Una cuarta deuda por \$10,000.00 contratada hace un mes, con vencimiento dentro de 7 meses y una tasa de 42% compuesto mensualmente.

Hoy mismo, decide renegociar sus obligaciones con un rendimiento, en las nuevas operaciones, de 30% anual convertible mensualmente mediante 3 pagos:

1. \$40,000.00 el día de hoy
2. \$35,000.00 dentro de 6 meses
3. El saldo dentro de 12 meses

Calcula el importe del saldo utilizando como fecha focal el mes duodécimo.

ETAPA 1

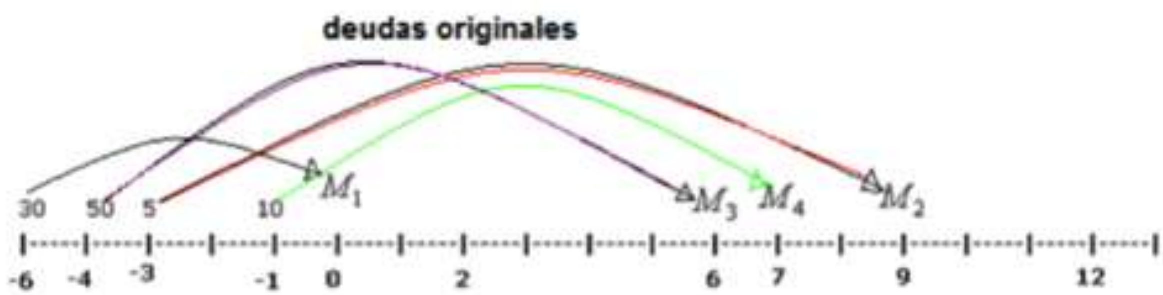
Se calculan los montos originales en la fecha que se vence cada obligación.

Fórmula: $M = C(1 + i)^n$

DEUDA (D)	OPERACIÓN	MONTO DE LA DEUDA
Da	$M_1 = 30{,}000(1 + 0.025)^6$	34,790.80
Db	$M_2 = 5{,}000(1 + 0.03)^{12}$	7,128.80
Dc	$M_3 = 50{,}000(1 + 0.02)^{10}$	60,949.72
Dd	$M_4 = 10{,}000(1 + 0.035)^8$	13,168.09
	TOTAL EN VALORES ABSOLUTOS	116,037.41

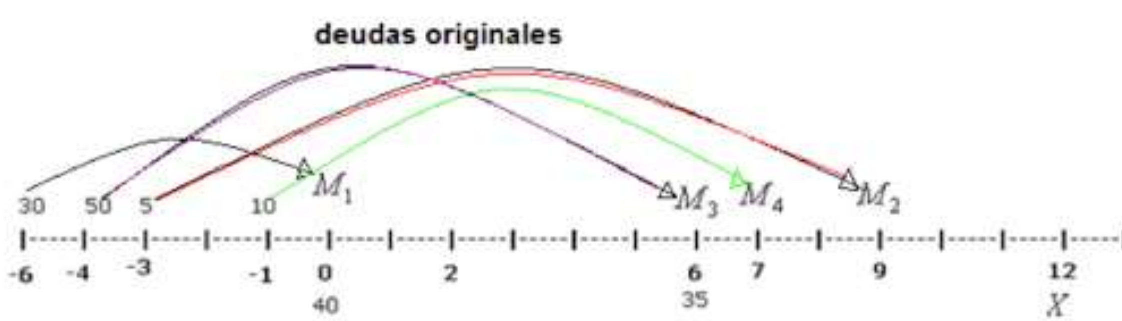
ETAPA 2

Se colocan en el diagrama de tiempo en la parte superior.



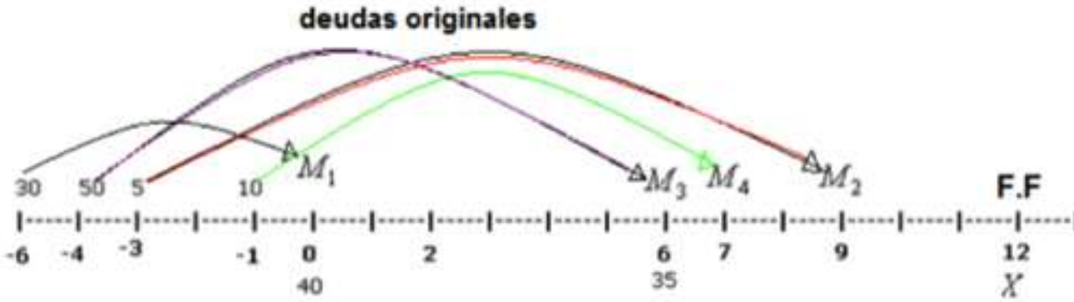
ETAPA 3

Como se decide reestructurar la deuda se colocan los pagos propuestos en la parte de abajo.



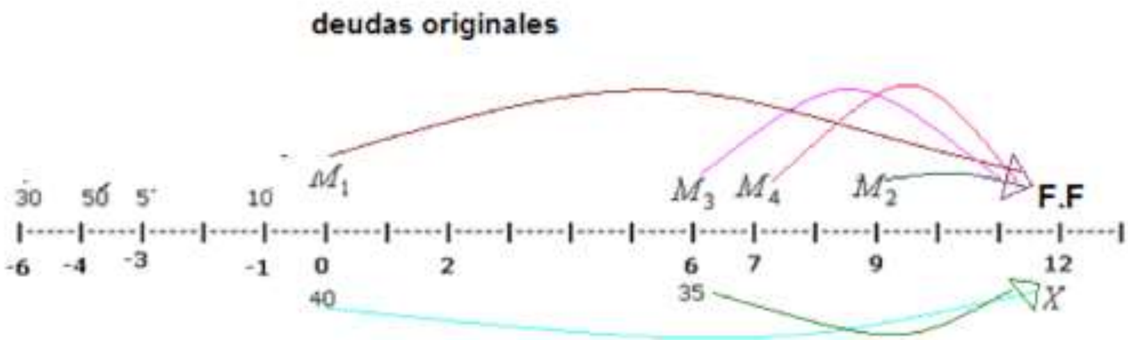
ETAPA 4

Se coloca la fecha focal, en este caso en el mes duodécimo, porque así lo indica el problema.



ETAPA 5

Se establece la ecuación de valor. Es decir se llevan todas las cantidades a la fecha focal.



ETAPA 6

Se define cada una de las cantidades llevándolas a la fecha focal.
Todas van al futuro, todas son montos.

$$Deudas$$

$$d_1 = M_1 = 34{,}790.84\left[1+\frac{0.3}{12}\right]^{12} = 46{,}789.81$$

$$d_2 = M_2 = 7{,}128.8[1+\frac{0.3}{12}]^3 = 7{,}676.07$$

$$d_3 = M_3 = 60{,}949.72[1+\frac{0.3}{12}]^6 = 70{,}682.99$$

$$d_4 = M_4 = 13{,}168.09[1+\frac{0.3}{12}]^5 = 14{,}898.18$$

$$Pagos\ propuestos$$

$$P_1 = M_5 = 40{,}000.00\left[1+\frac{0.3}{12}\right]^{12} = 53{,}795.55$$

$$P_2 = M_6 = 35{,}000.00\left[1+\frac{0.3}{12}\right]^{6} = 40{,}589.27$$

$$p_1 - x$$

Se sustituyen en la ecuación de valores, los valores obtenidos:

$$46{,}789.81 + 7{,}676.07 + 70{,}682.99 + 14{,}898.18$$

$$= 53{,}795.55 + 40{,}589.27 + x$$

$$140{,}048.18 = 94{,}384.82 + x$$

$$140{,}049.18 - 94{,}384.82 = x$$

$$x = 45{,}663.36$$

Entonces,el saldo se liquidaría con una cantidad igual a $45,663.36

Nota: En el interés compuesto no importa la fecha focal elegida para obtener el resultado, será siempre el mismo; pero en el interés simple sí hay una variación.

Ejemplo 2

Resuelve el ejercicio 1, poniendo la fecha focal en el mes sexto.

ETAPA 1

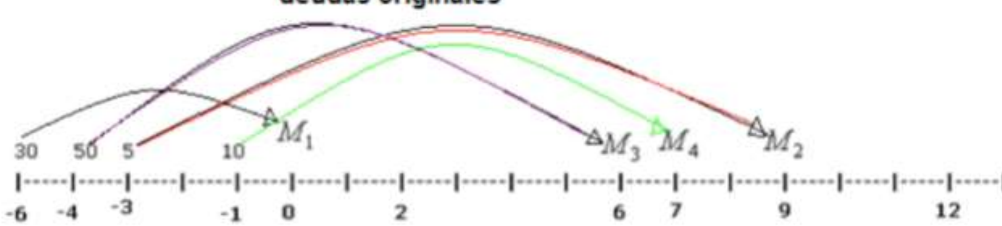
En este caso ya tenemos calculados los montos de las deudas originales:

Fórmula: $M = C(1 + i)^n$

DEUDA (D)	OPERACIÓN	MONTO DE LA DEUDA
Da	$M_1 = 30{,}000(1 + 0.025)^6$	34,790.80
Db	$M_2 = 5{,}000(1 + 0.03)^{12}$	7,128.80
Dc	$M_3 = 50{,}000(1 + 0.02)^{10}$	60,949.72
Dd	$M_4 = 10{,}000(1 + 0.035)^8$	13,168.09
	TOTAL EN VALORES ABSOLUTOS	116,037.41

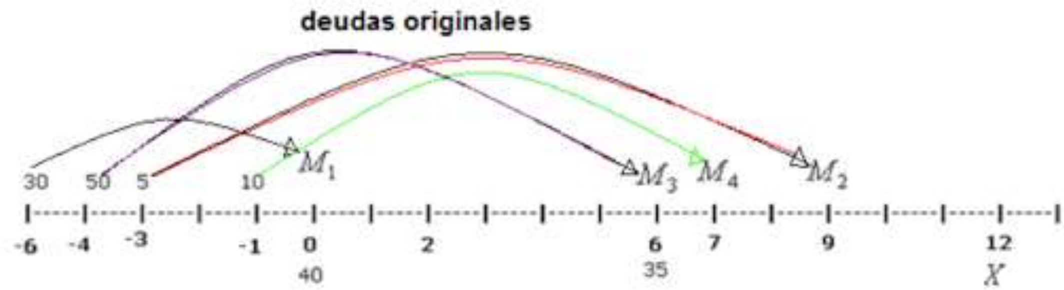
ETAPA 2

Se colocan en el diagrama de tiempo en la parte superior.



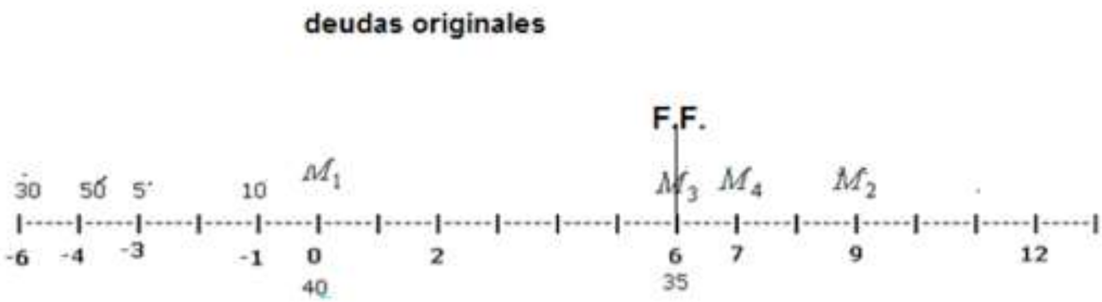
ETAPA 3

Como se decide reestructurar la deuda se colocan los pagos propuestos en la parte de abajo.



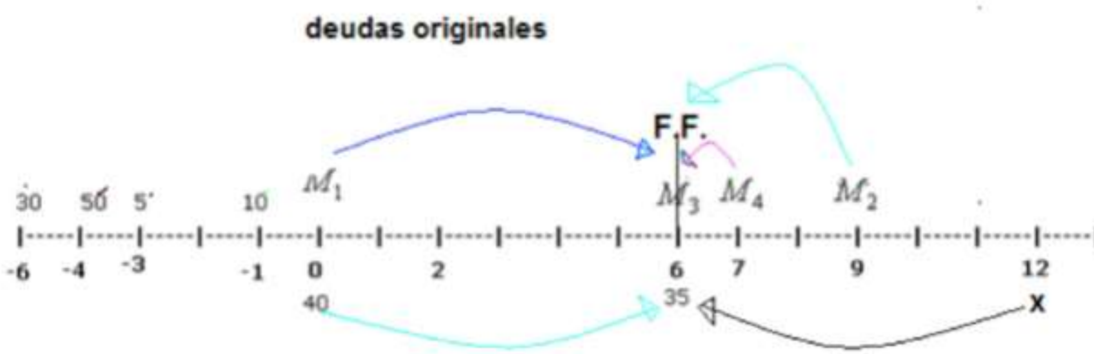
ETAPA 4

Se coloca la fecha focal, en este caso en el mes sexto, porque así lo indica el problema.



ETAPA 5

Se establece la ecuación de valor. Es decir se llevan las cantidades a la fecha focal.



ETAPA 6

Se define cada una de las cantidades llevándolas a la fecha focal.
Todas van al futuro, todas son montos.

DEUDAS

$$d_1 = M_1 = 34{,}790.84[1 + \frac{0.3}{12}]^6 = 40{,}346.7$$

$$d_2 = C_1 = \frac{7{,}128.8}{(1 + 0.025)^3} = 6{,}619.79$$

$$d_3 = 60{,}919.72$$

$$d_4 = C_2 = \frac{13{,}168.09}{(1 + 0.025)^1} = 12{,}846.91$$

PAGOS

$$p_1 = M_3 = 40{,}000\left(1 + \frac{0.3}{12}\right)^6 = 46{,}387.73$$

$$p_2 = 35{,}000.00$$

$$p_3 = C_3 = \frac{x}{(1 + 0.025)^6} = \frac{x}{1.1596} = 0.8622x$$

Se sustituyen en la ecuación de valores, los valores obtenidos:

$$40{,}346.7 + 6{,}619.79 - 60{,}949.72 + 12{,}846.91$$
$$= 46{,}387.73 + 35{,}000.00 + 0.8622x$$
$$120{,}763.12 = 81{,}387.73 = 0.8622x$$
$$120{,}763.12 - 81{,}387.73 = 0.8622x$$
$$x = \frac{39{,}375.39}{0.8622} = 45{,}668.51$$

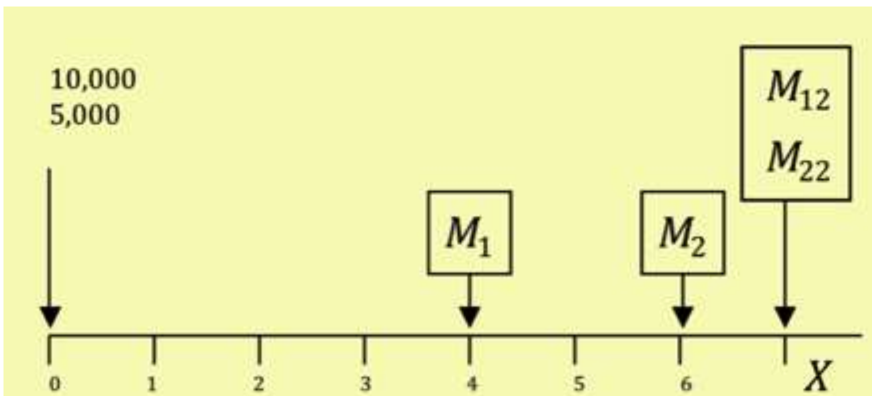
Conclusión del ejercicio 1 y 2

Observa que al cambiar la fecha focal el resultado es muy similar, existe una diferencia de $5.15, por las cifras significativas que se van perdiendo en las operaciones y que representa 1.12%.

Ejemplo 3

Una persona debe $10,000.00, pagaderos en 3 años con una tasa de interés de 18% convertible trimestralmente. También debe $5,000.00 a pagar en 5 años a 16% con capitalización semestral. Sin embargo, el deudor propone efectuar un pago único a realizarse dentro de 6 años. El acreedor acepta, pero con una tasa de 20% con capitalización mensual a partir del vencimiento de estas obligaciones. Calcular el valor del pago único que equivalga a la obligación original, planteando las ecuaciones equivalentes a una fecha focal en el año sexto.

a) Diagrama de valor



b) Ecuación de valor

$$M_{12} + M_{22} = X$$

c) Cálculo de M_1

$M = C(1+i)^{-n}$ $i = \frac{J}{m} \quad n = n_a \times m$	
Datos	$C = 10{,}000.00$ $J = 0.18$ $m = 4$ $n_a = 3$
Procedimiento	$i = \frac{0.18}{4} = 0.045 \quad n = 4 \times 3 = 12$ $M_1 = 10{,}000(1+0.045)^{12} = 16{,}958.81$

c1) Cálculo de M_{12}

$M = C(1+i)^n$ $i = \frac{J}{m}$ $n = n_a \times m$	
Datos	$C = 16,958.81$ $J = 0.20$ $m = 12$ $n_a = 3$
Procedimiento	$i = \frac{0.20}{12} = 0.016667$ $n = 12{\times}3 = 36$ $M_{12} = 16,958.81(1+0.016667)^{36} = 30,748.53$

d) Cálculo de M_2

$M = C(1+i)^n$ $i = \frac{J}{m}$ $n = n_a \times m$	
Datos	$C = 5,000.00$ $J = 0.16$ $m = 2$ $n_a = 5$
Procedimiento	$i = \frac{0.16}{2} = 0.08$ $n = 5{\times}2 = 10$ $M_2 = 5,000(1+0.08)^{10} = 10,794.62$

d1) Cálculo de M22

$M = C(1+i)^n$ $i = \frac{J}{m} \quad n = n_a \times m$	
Datos	$C = 10{,}794.62$ $J = 0.20$ $m = 12$ $n_a = 1$
Procedimiento	$i = \frac{0.20}{12} = 0.016667 \quad n = 12 \times 1 = 12$ $M_{22} = 10{,}974.62(1 + 0.016667)^{12} = 13{,}162.92$

e) Fecha focal **Año 6**

$$M_{12} + M_{22} = X$$

$$30{,}748.53 + 13{,}162.92 = X$$

$$X = 43{,}911.40$$

f) Interpretación

Se puede comprobar este resultado efectuando los cálculos a diferentes fechas focales los cuales producirán resultados idénticos.

Las aplicaciones del interés compuesto además de utilizarse en muchas cuentas bancarias, trascienden a las áreas de negocios y planes de gobierno; sirven como indicador de la salud de la economía nacional y como parámetro de relación con otros países.

Las tasas de cambio son de gran importancia para el análisis de la economía y sus predicciones de comportamiento futuro.

La ley del interés compuesto se denomina frecuentemente como la ley de crecimiento orgánico, debido a que se puede aplicar a cualquier fenómeno cuyo comportamiento en el tiempo se modifique a una tasa constante. Existe un gran número de situaciones de la naturaleza, en la ciencia y en los negocios en los que resulta de suma utilidad el conocimiento de la ley del interés compuesto al aplicarse con propiedad.

Si ciertos fenómenos han experimentado variaciones constantes durante algunos años, las tasas de variación pueden resultar de gran utilidad para efectuar predicciones a corto y mediano plazos.

RESUMEN

En esta unidad, aprendiste la diferencia que existe entre el interés simple y el interés compuesto; que la mayoría de las operaciones financieras se realizan con interés compuesto con el fin de tener en cuenta que los intereses liquidados no entregados entran a formar parte del capital y, para próximos periodos, generarán a su vez intereses. Este fenómeno se conoce con el nombre de capitalización de intereses y forma el interés compuesto.

BIBLIOGRAFÍA

SUGERIDA

Autor	Capítulo	Páginas
Díaz y Aguilera (2008)	3	90-98
		120-134

Díaz Mata, Alfredo y Aguilera Gómez, Víctor (2008). Matemáticas financieras (4ª ed.). México: McGraw-Hill. [e-book disponible en REDUNAM, http://unam.libri.mx/libro.php?libroId=131

Unidad 3

Anualidades

OBJETIVO PARTICULAR

El alumno conocerá, identificará y calculará los diferentes tipos de anualidades existentes.

TEMARIO DETALLADO

(18 Horas)

3. Anualidades

3.1. Concepto
3.2. Anualidades ordinarias (simples, ciertas, vencidas e inmediatas)
3.3. Anualidades anticipadas
3.4. Anualidades diferidas
3.5. El caso general de las anualidades

INTRODUCCIÓN

En la unidad, estudiaremos que una *anualidad* es un conjunto de pagos iguales realizados a intervalos iguales. Pero no necesariamente se dan en periodos de un año, pueden ser semanales, mensuales, quincenales, etc.

Asimismo, definiremos, clasificaremos y conoceremos los elementos de una anualidad, que son renta, tasa de interés, monto y capital.

Estudiaremos las anualidades diferidas cuyos pagos inician después de cierto periodo, acordado tanto por el acreedor como por el deudor. En la actualidad, las tiendas departamentales ofrecen este tipo de pagos: "compre ahora y pague después".

El **capital,** al igual que en todas las operaciones comerciales, es el valor actual de la operación.

El **tiempo** es el plazo al que se pacta la operación.

El **momento inicial** es cuando se formaliza la operación, también recibe el nombre de convenio; puede existir un pago inicial o no, dependerá de ambas partes.

El **periodo de gracia** o periodo diferido es el intervalo que transcurre entre el momento inicial y el inicio del primer pago de la anualidad.

El periodo de gracia se mide utilizando como unidad de tiempo el correspondiente a los periodos de pago.

La **tasa de interés** es la que se pacta en un crédito; en compras a crédito generalmente no se indican, suele ser la más alta en el mercado.

Los **intereses** son los que genera la operación.

El **monto** es la acumulación de intereses más capital.

Dichos contenidos son los que el alumno encontrará a través del desarrollo de cada uno de los puntos del temario detallado de esta unidad.

3.1. Concepto

Los pagos realizados y los ingresos percibidos por la empresa son de vital importancia, por lo que se deben medir constantemente.

La *anualidad* es una sucesión de pagos, depósitos o retiros, generalmente iguales, que se realizan en periodos iguales.

El nombre de anualidad no implica que las rentas tengan que ser anuales, sino que se da a cualquier secuencia de pagos, iguales en todos los casos, a intervalos regulares, independientemente de que tales pagos sean anuales, semestrales, trimestrales o mensuales, quincenales o semanales.

Cuando en un país hay relativa estabilidad económica, es frecuente que se efectúen operaciones mercantiles a través de pagos periódicos; pueden hacerse con interés simple o compuesto, como es el caso de las anualidades.

Las anualidades nos son familiares en la vida diaria, tales como: rentas, sueldos, pagos de seguro social, pagos a plazos e hipotecarios, primas de seguros de vida, pensiones, pagos para fondos de amortización, alquileres, jubilaciones y otros; aunque entre unas y otras existen distintas modalidades y muchas diferencias.

En préstamos, como en adquisiciones de bienes, generalmente los pagos que se efectúan son iguales en intervalos y todo indica que la medida común es un año, a menos que se indique lo contrario. A veces sucede que son quincenales, mensuales, bimestrales, trimestrales, tanto para tasas como para pagos en el tiempo; cuando esto ocurre, se habla de convertibilidad de las tasas, dado que coinciden tiempo, tasa y pago de la deuda.

Literalmente, la palabra *anualidad* significa "periodo de un año", mas en el campo de las operaciones financieras tiene una definición más amplia, ya que una anualidad estará relacionada con periodos que no necesariamente son anuales, sino de cualquier magnitud: semestrales, mensuales, semanales o, incluso, diarios.

Anualidad	• Una **anualidad** es una sucesión de pagos, depósitos, abonos o retiros iguales, que se realizan a intervalos iguales con interés compuesto.
Intervalo	• **Intervalo** o periodo de pago o periodo de renta: se conoce como intervalo o periodo de pago al tiempo que transcurre entre un pago y otro.
Renta	• **Renta**: es el nombre que se da al pago periódico que se hace o se recibe.
Plazo de una anualidad	• **Plazo de una anualidad**: es el tiempo que transcurre entre el inicio del primer pago y el final o último.

Las anualidades son simples si los intervalos de pago son iguales en magnitud y coincide con capitalización de los intereses.

Generales

- Son anualidades **generales** cuando los intervalos de pago y los periodos de capitalización de interés no son iguales.

Ciertas

- Son **ciertas** cuando sus fechas son fijas y se estipulan de antemano.

Contingentes

- **Contingentes**, cuando la fecha del primer pago, la fecha del último pago o las dos no se fijan de antemano, depende de algún hecho que se sabe ocurrirá, pero no se sabe cuándo.

Venvidas

- **Vencidas**, cuando se pagan al final del periodo

Anticipadas

- **Anticipada**, cuando se pagan al inicio del periodo

Inmediatas

- **Inmediatas,** son los casos más comunes: la realización de los cobros o pagos tiene lugar en el periodo que sigue inmediatamente al trato.

Diferidas

- **Diferidas**: se pospone la realización de los cobros o pagos.

Para nombrar a la anualidad se usan de igual forma los términos *renta*, *pago periódico*, *abono* y, tal vez, otros más.

Son ejemplo de anualidades los salarios quincenales o mensuales, los fondos de amortización y depreciación, los pagos a plazos, las pensiones, los pagos de primas de pólizas de seguros de vida, de automóviles, las rentas producidas por los fondos de un fideicomiso, los pagos para amortizar créditos hipotecarios, etc.

Clasificación de las anualidades

Los pagos de una anualidad se pueden hacer al inicio o al final del periodo o, también, en sucesivos periodos intermedios. Puede ser que el periodo de capitalización coincida con el pago o que no coincida. Por estas razones y otras variantes, las anualidades se clasifican, según ciertos criterios, como sigue:

Tipos de anualidad

Criterio	Tipo
Intereses	Simples ---------- Generales
Tiempo	Ciertas ---------- Contingentes
Pagos	Ordinarias -------- Anticipadas
Iniciación	Inmediatas ------- Diferidas

Anualidades simples
Son aquellas en que los periodos de pago coinciden con los periodos de capitalización de intereses. En las generales, no coinciden. En las anualidades ciertas se conocen las fechas del primer pago y del último pago con certeza. En las contingentes pueden no conocerse la fecha de iniciación o la fecha de terminación o ambas a la vez.

Anualidades ordinarias
Se llaman también vencidas y es cuando los pagos o depósitos se efectúan ordinariamente al final de cada periodo. Por ejemplo: un préstamo que se paga al final de cada periodo.

Anualidades anticipadas
Los pagos o depósitos se realizan al principio de cada periodo. Por ejemplo, cuando se compra un bien y se da un enganche igual a cada pago.

Anualidades inmediatas
Ocurren cuando el primer pago se realiza en el primer periodo de la operación financiera.

Anualidades diferidas
En las anualidades diferidas existe un periodo que se llama de “gracia”, por el que se pospone el primer pago o depósito un lapso convenido.

Anualidades eventuales o contingente:
En las anualidades eventuales o contingentes se desconocen una o las dos fechas del plazo, no pudiendo ser preestablecidas. Por ejemplo: sobre la pensión de un derechohabiente no se sabe exactamente cuándo se jubilará ni cuándo dejará de cobrar (cuando muera, pero no se sabe cuando morirá). Este tema, así como la “perpetuidad”, no se estudiará en este curso, solo se mencionan para que sepas que existen otros tipos de anualidad.

Anualidades perpetuas
En las anualidades perpetuas o perpetuidad, los pagos son indefinidos, sin límite de tiempo Por ejemplo, una persona o institución crea una beca mensual mediante la donación de un capital que se invierte y produce intereses, que son precisamente la renta que se pagará.

Nomenclatura:

C	Representa el capital inicial, llamado también principal. Suele representarse también por las letras *A* o *P* (valor presente).
M	Representa el capital final, llamado también monto o dinero incrementado. Es el valor futuro de *C*.
R	Es la renta, depósito o pago periódico.
J	Es la tasa nominal de interés calculada para un periodo de un año. Se expresa en tanto por uno o tanto por ciento.
i	Es la tasa de interés por periodo y representa el costo o rendimiento por periodo de capitalización de un capital, ya sea producto de un préstamo o una cantidad que se invierte. Es el cociente de dividir la tasa nominal entre la frecuencia de conversión *m*.
m	Es la frecuencia de conversión o de capitalización y representa el número de veces que se capitaliza un capital en un año.
n_a	Es el número de años que permanece prestado o invertido un capital.
n	Es el número de periodos de que consta una operación financiera a interés compuesto.

Finalmente, para estudiar las anualidades, considerando su clasificación en cada caso, se deberán resolver los problemas siguientes:

1. Determinar el monto (*M*) o valor actual (*C*) de una serie de anualidades.
2. Establecer el valor de la anualidad (renta = *R*) en la etapa del monto o del valor actual.
3. Precisar la tasa (*i*) en función del monto o del valor actual.
4. Determinar el tiempo (*n*) en los problemas de monto y de valor actual (más el tiempo diferido, cuando se trate de esta clase de anualidades).

Es muy importante señalar que lo mismo que en el interés compuesto, en donde las variables *n* (números de pagos) e *i* (tasa de interés) se expresan en la misma medida de tiempo, en las anualidades se agrega una variable, la renta (*R*), que debe estar también en la misma medida de tiempo.

3.2. Anualidades ordinarias (simples, ciertas, vencidas e inmediatas)

Monto de una anualidad ordinaria

Una anualidad es ordinaria o vencida cuando los depósitos o pagos se hacen al final del periodo; se parte de su valor presente o capital para obtener el monto.

El monto de las anualidades ordinarias o vencidas es la suma de los montos de todas y cada una de las rentas pagadas hasta el momento de realizar la última.

Ejercicio 1

Una persona decide depositar $5,000.00 al fin de cada mes en una institución financiera que le abonará intereses de 12% anual convertible mensualmente: 1% mensual durante 6 meses. Se pide calcular y conocer el monto que se llegue a acumular al final del plazo indicado.

CONCEPTO	CANTIDAD ($)
Depósito al final del primer mes	5,000.00
Intereses por el segundo mes (5000 x 0.01)	50.00
Suma	5,050.00
Depósito al final del segundo mes	5,000.00
Monto al final del segundo mes	10,050.00
Intereses por el tercer mes (10050 x 0.01)	100.50
Depósito al final del tercer mes	5,000.00
Monto al final del tercer mes	15,150.50
Intereses por el cuarto mes (15150.50 x 0.01)	151.51
Depósito al final del cuarto mes	5,000.00
Monto al final del cuarto mes	20,302.01
Intereses por el quinto mes (20302.01 x 0.01)	203.02
Depósito al final del quinto mes	5,000.00
Monto al final del quinto mes	25,505.03
Intereses por el sexto mes (25505.03 x 0.01)	255.05
Depósito al final del sexto mes	5,000.00
Monto final (al término del sexto mes)	30,760.08

Ahora bien, si el monto total es igual a la suma de los montos de cada anualidad, llegaremos al mismo resultado:

Monto de la primera renta:	5,255.05
Monto de la segunda renta:	5,203.02
Monto de la tercera renta:	5,151.51
Monto de la cuarta renta:	5,100.50
Monto de la quinta renta:	5,050.00
Monto de la sexta renta:	5,000.00
Monto total	**30,760.08**

Fórmulas para calcular el monto futuro de una anualidad simple, cierta, ordinaria

Se conoce la renta, la tasa nominal, la frecuencia de conversión y el plazo de tiempo:

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n} - 1}{i}\right]$$

Siendo $i = \frac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$

Ejercicio 2. Si se aplica la fórmula anterior a los datos del ejercicio 1, se tiene:

$M = R\left[\frac{(1+i)^{n} - 1}{i}\right]$	
Datos	$R = 5{,}000$ $J = 0.12$ $m = 12$ $n = 6$
Procedimiento	$i = \frac{0.12}{12} = 0.01$ $M = 5{,}000\left[\frac{(1+0.01)^{6} - 1}{0.01}\right]$ $M = 30{,}760.08$

Ejercicio 3

Calcular el monto futuro de una serie de depósitos semestrales de \$20,000.00 durante 2.5 años en una cuenta bancaria que rinde:

a) 10% capitalizable semestralmente
b) 12% capitalizable semestralmente
c) Interpretar resultados.

Solución: a) Tasa 10%

Datos	$R = 20{,}000$ $J = 0.10$ $m = 2$ $n_a = 2.5$ $i = \frac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$
Procedimiento	$i = \frac{0.10}{2} = 0.05$ $n = 2{\times}2.5 = 5$ $M = 20{,}000\frac{(1+0.05)^{5} - 1}{0.05}$ $M = 110{,}512.62$

b) Tasa 12%

Datos	$R = 20{,}000$ $J = 0.12$ $m = 2$ $n_a = 2.5$ $i = \frac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$
Procedimiento	$i = \frac{0.12}{2} = 0.06$ $n = 2{\times}2.5 = 5$ $M = 20{,}000\frac{(1+0.06)^{5} - 1}{0.06}$ $M = 112{,}741.86$

Interpretación: Existe una diferencia de \$2,229.24, lo que representa un 2.02% al aumentar la tasa 2 puntos porcentuales.

Valor actual de una anualidad ordinaria

Cuando la época del cálculo coincide con la iniciación de la serie de pagos o rentas, el valor equivalente de la serie es actual. El lapso que transcurre entre la fecha de la entrega del valor actual y el vencimiento de la primera anualidad será igual a cada periodo que separa a las demás rentas.

El valor presente o actual de las anualidades ordinarias se puede presentar en alguna de estas dos modalidades:

a. Como el descuento de una serie de anualidades, que vencen escalonadamente y están separadas por intervalos iguales.

b. Como la determinación de un capital que, invertido a interés, proporciona una serie de rentas futuras.

Ejercicio 4. Se tienen seis pagarés con vencimientos escalonados en forma trimestral, cada uno de $25,000.00, y se quieren liquidar el día de hoy; la tasa es de 6% trimestral.

Determinemos el valor actual o presente de cada documento:

OPERACIÓN	RESULTADO ($)
1ª renta:	23,584.91
2ª renta	22,249.91
3ª renta	20,990.48
4ª renta	19,802.34
5ª renta	18,681.45
6ª renta	17,624.01
Valor Actual Total	**122,933.10**

Ahora bien, ¿qué cantidad habrá que invertir a 6% cuatrimestral para tener derecho a recibir seis rentas de $25,000.00 cada una? Conforme a la resolución anterior, se sabe que el valor actual es de $122,933.10. Comprobemos si con el importe de seis pagos de $25,000.00 cada uno el deudor salda su cuenta.

Concepto	($)
Capital invertido	122,933.10
Intereses del 1er. cuatrimestre (0.06)	7,375.98
Suma	130,309.08
Menos el pago de la 1a. renta	25,000.00
Saldo al final del 1er. cuatrimestre	105,309.08
Intereses del saldo (0.06)	6,318.55
Suma	111,627.63
Menos el pago de la 2ª renta	25,000.00
Saldo al final del 2o. cuatrimestre	86,627.63
Intereses del saldo (0.06)	5,197.65
Suma	91,825.28
Menos el pago de la 3ª renta	25,000.00
Saldo al final del 3er. cuatrimestre	66,825.28
Intereses del saldo (0.06)	4,009.52
Suma	70,834.80
Menos el pago de la 4ª renta	25,000.00
Saldo al final del 4o. cuatrimestre	45,834.80
Intereses del saldo (0.06)	2,750.09
Suma	48,584.89
Menos el pago de la 5ª renta	25,000.00
Saldo al final del 5o. cuatrimestre	23,584.89
Intereses del saldo (0.06)	1,415.09
Suma	24,999.98
Menos el pago de la 6ª renta	25,000.00
Saldo Final	–0.02*

* Por el redondeo de cifras

Dado lo anterior, se debe encontrar el valor actual de cada pago para determinar el valor presente total de la serie de rentas. Podemos decir que el valor actual es igual a la suma de los valores actuales de cada renta.

Fórmulas para calcular el valor presente de una anualidad simple, cierta, ordinaria

$$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

En donde $i = \frac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$

Ejercicio 5

Utilizando los datos del ejercicio anterior, obtener su valor presente o actual.

$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$		
Datos	$R = 25{,}000$ $i = 0.06$	$m = 4$ $n = 6$
Procedimiento	$C = 25{,}000\left[\frac{1-(1+0.06)^{-6}}{0.06}\right]$	$C = 122{,}933.11$

Ejercicio 6

¿Cuál es el valor en efectivo de una anualidad de $1,000.00 al final de cada 3 meses, durante 5 años, con un interés de 16% capitalizable trimestralmente?

Comprobar calculando el monto futuro de la operación mediante interés compuesto y anualidad e interpretar resultados.

Solución:

a) Valor presente

$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$	
Datos	$R = 1{,}000$ $\quad m = 4$ $i = 0.16$ $\quad n_a = 5$ $i = \frac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$
Procedimiento	$i = \frac{0.16}{4} = 0.04 \quad n = 4{\times}5 = 20$ $C = 1{,}000\left[\frac{1-(1+0.04)^{-20}}{0.04}\right] \quad C = 13{,}590.33$

b) Comprobación

b$_1$) Monto de una anualidad

$i = \frac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$
$i = \frac{0.16}{4} = 0.04 \quad n = 4{\times}5 = 20$
$M = 1{,}000\frac{(1+0.04)^{20}-1}{0.04} \quad M = 29{,}778.08$

b$_2$) Monto de interés compuesto

$M = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$		$M = C(1+i)^n$ $i = \frac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$
Datos	$R = 1{,}000$ $J = 0.16$ $m = 4$ $n_a = 5$	$C = 13{,}590.33$ $J = 0.16$ $m = 4$ $n_a = 5$
Procedimiento		$i = \frac{0.16}{4} = 0.04 \quad n = 4{\times}5 = 20$ $M = 13{,}590.33(1+0.04)^{20}$ $= 29{,}778.08$

Interpretación: Los resultados son idénticos al obtener el monto futuro de una anualidad simple, cierta, ordinaria y el monto futuro a interés compuesto.

Fórmulas para calcular la renta de una anualidad simple, cierta, ordinaria

a) Si se conoce el capital inicial, la tasa de interés nominal o por periodo de capitalización, la frecuencia de conversión y el plazo o número de periodos de capitalización:

$$R = \frac{Ci}{1 - (1+i)^{-n}}$$

Siendo $i = \frac{J}{m}$ y $n = n_a \text{ x } m$

b) Si se conoce el monto futuro, la tasa de interés nominal o por periodo de capitalización, la frecuencia de conversión y el plazo de tiempo o número de periodos de capitalización:

$$R = \frac{Mi}{(1+i)^{n} - 1}$$

Siendo $i = \frac{J}{m}$ y $n = n_a \text{ x } m$

Ejercicio 7

¿Cuál es la renta mensual que se requiere para obtener $30,760.08 durante 6 meses si se invierte con 12% capitalizable mensualmente?

Solución:

$R = \dfrac{Mi}{(1+i)^n - 1}$	
Datos	$M = 30{,}760.08$ $J = 0.12$ $m = 12$ $n_a = 0.5$ $i = \dfrac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$
Procedimiento	$i = \dfrac{0.12}{12} = 0.01$ $n = 12{\times}0.5 = 6$ $R = \dfrac{30{,}760.08{\times}0.01}{(1+0.01)^6 - 1}$ $R = 5{,}000.00$

Ejercicio 8

Una empresa debe de pagar dentro de 6 meses la cantidad de \$200,000.00. Para asegurar el pago, el contralor propone, por liquidez, reunir un fondo con depósitos mensuales que paga 10% capitalizable mensualmente.

a) Obtener el valor de los depósitos.
b) ¿Cuál es el valor acumulado al 4° mes?
c) Interpretar resultados.

a) Cálculo de *R*:

$R = \dfrac{Mi}{(1+i)^n - 1}$	
Datos	$M = 20{,}000$ $\quad J = 0.10$ $m = 12$ $\quad n_a = 0.5$ $i = \dfrac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$
Procedimiento	$i = \dfrac{0.10}{12} = 0.008333 \quad n = 12 \times 0.5 = 6$ $R = \dfrac{200{,}000 \times 0.008333}{(1 + 0.008333)^6 - 1} \quad R = 32{,}645.64$

b) Cálculo de 4° mes:

$M = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$	
Datos	$R = 32{,}645.61$ $\quad J = 0.10$ $m = 12$ $\quad n_a = 0.333333$ $i = \frac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$
Procedimiento	$i = \frac{0.10}{12} = 0.008333 \quad n = 12 \times 0.333333 = 4$ $M = 32{,}645.61 \frac{(1 + 0.008333)^4 - 1}{0.008333}$ $M = 132{,}223.74$

Interpretación: Es posible calcular, con base en el valor de la renta obtenida, cualquier monto en algún mes determinado.

Ejercicio 9

Una persona adquiere una computadora a crédito de 4 meses.
Calcular el pago mensual si el precio de contado es de $19,750.00:

a) A una tasa de interés de 21.6%.
b) Si la tasa aumenta en 2 pcc.
c) Interpretar resultados.

Solución: a) Tasa 21.6% b) Tasa 23.6%

	a) Tasa 21.6%	b) Tasa 23.6%
	$R = \dfrac{Ci}{1-(1+i)^{-n}}$	$R = \dfrac{Ci}{1-(1+i)^{-n}}$
Datos	$C = 19{,}750.00$ $m = 12$ $J = 0.216$ $n_a = 0.333333$ $i = \dfrac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$	$C = 19{,}750.00$ $m = 12$ $J = 0.236$ $n_a = 0.333333$ $i = \dfrac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$
Procedimiento	$i = \dfrac{0.216}{12} = 0.018$ $\mathrm{n} = 12 \times 0.333333 = 4$ $\mathrm{R} = \dfrac{19{,}750 \times 0.018}{1-(1+0.018)^{-4}}$ $\mathrm{R} = 5{,}161.67$	$i = \dfrac{0.236}{12} = 0.0196667$ $\mathrm{n} = 12 \times 0.333333 = 4$ $\mathrm{R} = \dfrac{19{,}750 \times 0.0196667}{1-(1+0.0196667)^{-4}}$ $\mathrm{R} = 5{,}182.63$

Interpretación: Existe una diferencia de $20.986, lo que representa un 0.41% al aumentar la tasa 2 puntos porcentuales.

Fórmulas para calcular el tiempo o plazo en una anualidad simple, cierta, ordinaria

a) Si se conoce el capital inicial, la renta, la tasa nominal o la tasa efectiva por periodo y la frecuencia de conversión:

$$n = \frac{Ln \dfrac{1}{1 - \dfrac{C}{R} i}}{Ln\,(1+i)}$$

En donde $i = \dfrac{J}{m}$

b) Si se conoce el monto futuro, la renta, la tasa nominal o la tasa efectiva por periodo y la frecuencia de conversión:

$$n = \frac{Ln \left[1 + \dfrac{M}{R}\, i \right]}{Ln\,(1+i)}$$

En donde $i = \dfrac{J}{m}$

Ejercicio 10

¿Cuántos pagos deben realizarse para llegar a acumular $30,760.08 si se depositan $5,000.00 mensuales con una tasa de interés de 12% compuesto mensual?

$n = \dfrac{Ln\left[1 + \frac{M}{R}\, i\right]}{Ln\,(1 + i)}$	
Datos	$M = 30{,}760.08$ $R = 5{,}000.00$ $J = 0.12$ $m = 12$ $i = \dfrac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$
 ***Procedimiento***	$i = \dfrac{0.12}{12} = 0.01$ $n = \dfrac{Ln\left[\frac{30{,}760.08}{5{,}000}\, 0.01 + 1\right]}{Ln\,(1 + 0.01)} = 6\ meses$

Ejercicio 11

¿Cuántos pagos bimestrales vencidos de $1,550.00 se tendrían que hacer para saldar una deuda pagadera hoy de $8,000.00, si el 1er. pago se realiza dentro de 2 meses y el interés es de 2.75% bimestral?

a) Expresar el resultado en años, meses y días.
b) Calcular el monto del pago último (2 casos: 4 pagos de $1,550.00 y un quinto pago mayor de esta cantidad o 5 pagos de $1,550.00 y uno sexto menor).
c) Comprobar estos resultados con base en sus respectivos valores actuales.

Solución:

a) Núm. de pagos y plazo

$n = \dfrac{Ln \dfrac{1}{1 - \frac{C}{R} i}}{Ln\,(1 + i)}$	**Datos**	$C = 8{,}000.00$ $\quad i = 0.0275$ $R = 1{,}550.00$ $\quad m = 6$
	Procedimiento	$n = \dfrac{Ln \dfrac{1}{1 - \frac{8{,}000}{1{,}550} 0.0275}}{Ln(1 + 0.0275)}$ $\quad n = 5.642592\ bimestres$ $n = 0\ años\ 11\ meses\ 9\ dias$

b) Monto último pago

b_1) 4 Pagos iguales y uno menor

$M = R \left[\dfrac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$	
Datos	$R = 1{,}550.00$ $i = 0.0275$ $n = 5$
Procedimiento	$M_1 = \dfrac{1{,}550(1 + 0.0275)^5 - 1}{0.0275} = 8{,}188.13$

Valor del adeudo después de 5 meses:

$M = C(1 + i)^n$
$C = 8{,}000.00$ $i = 0.0275$ $n = 5$
$M_2 = 8{,}000(1 + 0.0275)^5 = 9{,}162.19$ Diferencia: $M_1 - M_2 = 9{,}162.19 - 8{,}188.13 = 974.06$ Último pago: $R + (M_1 - M_2) = 1{,}550.00 + 974.06 = 2{,}524.06$

Conclusión: Serán entonces 4 pagos de $1,550.00 y uno mayor de $2,524.00

b$_2$) 5 pagos iguales y uno mayor:

$M = C(1+i)^n$	
Datos	$C = 974.06$ $i = 0.0275$ $n = 1$
Procedimiento	$M_3 = 974.06(1+0.0275)^1 = 1{,}000.84$ Último pago: 1,000.84

Conclusión: Serán entonces 5 pagos de $1,550.00
y uno mayor de $1,00.84

Fórmulas para calcular la tasa de interés de una anualidad simple, cierta, ordinaria

Debido a que la tasa de interés se encuentra en el numerador y en el denominador de las fórmulas de monto y valor actual de una anualidad simple, cierta, ordinaria, no se puede despejar, por lo que se usa, para su cálculo, el procedimiento llamado de prueba y error a base de iteraciones sucesivas.

También se puede utilizar una calculadora programable, calculadora financiera o una computadora con software financiero.

a) Si se conoce el capital inicial, la renta, la frecuencia de conversión y el plazo de tiempo o número de periodos de capitalización:

$$\frac{C}{R} = \frac{1-(1+i)^{n}}{i}$$

En donde $i = \dfrac{J}{m}$

b) Si se conoce el monto futuro, la renta, la frecuencia de conversión y el plazo de tiempo o número de periodos de capitalización:

$$\frac{M}{R} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

En donde $i = \frac{J}{m}$

Ejemplo 12

¿A qué tasa se aplicó una serie de 6 pagos mensuales de $5,000.00 cada uno, para acumular al final de los mismos, $30,760.08?

Solución

$\frac{M}{R} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$	
Datos	$M = 30{,}760.00$ $R = 5{,}000.00$ $m = 12$ $n = 6$ $n_a = 0.5$
Procedimiento	$\frac{30{,}760.08}{5{,}000} = 6.152016 = \frac{(1+i)^6 - 1}{i}$ $Si\ i = 0.005 \quad \frac{(1.005)^6 - 1}{0.005} = 6.075502$ $Si\ i = 0.012 \quad \frac{(1.012)^6 - 1}{0.012} = 6.182906$ $Si\ i = 0.01 \quad \frac{(1.01)^6 - 1}{0.01} = 6.152015$ $\therefore\ i = 0.01\ mensual = 12.0\%\ anual$

Ejemplo 13

Calcular con qué tasa de rendimiento nominal anual se acumulan $400,000.00 con 15 depósitos semestrales de $12,000.00.

a) Tasa de interés semestral.
b) Tasa nominal.
c) Tasa efectiva anual.
d) Interpretar resultados.

Solución: a) Cálculo de tasa semestral

$\frac{M}{R} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$	
Datos	M = 400,000.00 R = 12,000.00 m = 2 n_a = 7.5 $n = m \times n_a$
Procedimiento	$n = 2{\times}7.5 = 15$ $\frac{400{,}000}{12{,}000} = 33.333333 = \frac{(1+i)^{15}-1}{i}$ $Si\ i = 0.10 \quad \frac{(1.10)^{15}-1}{0.10} = 31.772482$ $Si\ i = 0.105 \quad \frac{(1.105)^{15}-1}{0.105} = 33.060035$ $Si\ i = 0.106 \quad \frac{(1.106)^{15}-1}{0.106} = 33.324398$ $\therefore\ i = 0.106$ semestral $= 10.6\%$ semestral

b) Cálculo de la tasa nominal

$J = i \times n$	
Datos	i = 0.106 m = 2 n_a = 1 $n = m \times n_a$
Procedimiento	
$n = 2{\times}1 = 2$ $J = 0.106{\times}2 = 0.212 = 21.2\%$	

c) Cálculo de la tasa efectiva anual

$e = (1+i)^n - 1$	
Datos	i = 0.106 m = 2 n_a = 1 $n = m \times n_a$
Procedimiento	
$n = 2{\times}1 = 2$ $e = (1+0.106)^2 - 1 = 0.2232 = 22.3\%$	

Interpretación: Existe una diferencia de 1.1 puntos porcentuales lo que representa un 5.2% mayor a la tasa efectiva de la tasa nominal anual.

Ejercicio 14

Un deudor requiere pagar hoy $175,000.00, pero al no disponer de esa cantidad acuerda con el acreedor liquidar en 6 mensualidades de $31,000.00 cada una, la primera de ellas dentro de un mes.

a) Calcular la tasa por período de esta operación financiera.
b) Obtener su tasa nominal anual.
c) Obtener la tasa efectiva anual.
d) Interpretar resultados.

a) Cálculo de la tasa mensual

$\frac{C}{R} = \frac{1-(1+i)^{n}}{i}$	Datos	Procedimiento
	$C = 175{,}000.00$ $R = 31{,}000.00$ $m = 12$ $n_a = 0.5$ $n = m \times n_a$	$n = 12 \times 0.5 = 6$ $\frac{175{,}000}{31{,}000} = 5.645161 = \frac{1-(1+i)^{-6}}{i}$ $Si\ i = 0.02 \quad \frac{1-(1.02)^{-6}}{0.02} = 5.601431$ $Si\ i = 0.018 \quad \frac{1-(1.018)^{-6}}{0.018} = 5.639435$ $Si\ i = 0.0177 \quad \frac{1-(1.0177)^{-6}}{0.0177} = 5.645169$ $\therefore\ i = 0.0177$ mensual $= 1.77\%$ mensual

b) Cálculo de la tasa nominal

$J = i \times n$	
Datos	$i = 0.0177$ $m = 12$ $n_a = 1$ $n = m \times n_a$
Procedimiento	
$n = 12 \times 1 = 12$ $J = 0.0177 \times 12 = 0.2124 = 21.2\%$	

c) Cálculo de la tasa efectiva anual

$e = (1+i)^{n} - 1$	
Datos	$i = 0.0177$ $m = 12$ $n_a = 1$ $n = m \times n_a$
Procedimiento	
$n = 12 \times 1 = 12$ $e = (1 + 0.0177)^{12} - 1 = 0.2343 = 23.4\%$	

Interpretación: Existe una diferencia de 2.2 puntos porcentuales lo que representa un 10.4% mayor a la tasa efectiva de la tasa nominal anual.

3.3. Anualidades anticipadas

A diferencia de las anualidades vencidas, que se pagan al final de cada periodo, las anticipadas se cubren al comienzo de cada periodo.

```
Ordinarias:              R       R       R       R        R
                  |_______|_______|_______|_______|_______|
                  |       |       |       |       |       |
Anticipadas:      R       R       R       R       R
```

En las anualidades ordinarias, la primera anualidad se paga al final del periodo, mientras que en las anticipadas se realiza al comenzar. Por eso, el pago de la última renta ordinaria coincide con la terminación del plazo estipulado en la operación; esto hace que no produzca intereses y que su inversión se haga solamente como complemento del monto de las rentas. En tanto, en las anualidades anticipadas, la última renta se paga al principio del último periodo: sí produce intereses.

Fórmulas para calcular el monto futuro de una anualidad simple, cierta, anticipada

Se conoce la renta, la tasa nominal, la frecuencia de conversión y el plazo:

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n} - 1}{i}\right](1+i)$$

O también

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1\right]$$

Siendo $i = \frac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$

Ejercicio 1

Si se hacen 6 depósitos trimestrales anticipados de $25,000.00 cada uno, con una tasa de 20% capitalizable trimestralmente, ¿cuál es el monto futuro?

R = $25,000.00 trimestrales
i = 20% capitalizable trimestralmente
= 0.20/4 = 0.05 trimestral
n = 6 trimestres
M = $178,550.21

Solución: a) Aritméticamente

1ª renta (principio del primer trimestre)	$25,000.00
Intereses por el primer trimestre	1,250.00
2ª renta (principio del segundo trimestre)	25,000.00
Monto al final del primer trimestre	51,250.00
Intereses por el segundo trimestre	2,562.50
3ª renta (principio del tercer trimestre)	25,000.00
Monto al final del segundo trimestre	78,812.50
Intereses por el tercer trimestre	3,940.63
4ª renta (principio del cuarto trimestre)	25,000.00
Monto al final del tercer trimestre	107,753.13
Intereses por el cuarto trimestre	5,387.65
5ª renta (principio del quinto trimestre)	25,000.00
Monto al final del cuarto trimestre	138,140.78
Intereses por el quinto trimestre	6,907.04
6ª renta (principio del sexto trimestre)	25,000.00
Monto al final del quinto trimestre	170,047.82
Intereses por el sexto trimestre	8,502.39
Monto al final del sexto trimestre	$178,550.21

b) Por fórmula

$M = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i)$	
Datos	$R = 25{,}000.00$ $J = 0.20$ $m = 4$ $n = 6$ $i = \frac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$
Procedimiento	$i = \frac{0.20}{4} = 0.05$ $M = 25{,}000\left[\frac{(1+0.05)^6 - 1}{0.05}\right](1+0.05)$ $M = 178{,}550.21$

Ejercicio 2

a) Obtener el monto que se acumula en 2 años si se depositan $1,500.00 al inicio de cada mes, en un banco que abona una tasa de 12.5% anual capitalizable por meses.
b) Obtener el monto si se hacen depósitos de 20% más.
c) Interpretar resultados.

Solución: a) Monto de anualidad anticipada

$M = R\left[\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i)$	
Datos	$R = 1{,}500$ $J = 0.125$ $m = 12$ $n_a = 2$ $i = \dfrac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$
Procedimiento	$i = \dfrac{0.125}{12} = 0.010417$ $n = 2{\times}12 = 24$ $M = 1{,}500\left[\dfrac{(1+0.010417)^{24}-1}{0.010417}\right](1+0.010417)$ $M = 41{,}084.44$

b) Si se deposita un 20% más

Datos	$R = 1{,}500 \times 1.20 = 1{,}800$ $J = 0.125$ $m = 12$ $n_a = 2$ $i = \dfrac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$
Procedimiento	$i = \dfrac{0.125}{12} = 0.010417$ $n = 2{\times}12 = 24$ $M = 1{,}800\left[\dfrac{(1+0.010417)^{24}-1}{0.010417}\right](1+0.010417)$ $M = 49{,}301.33$

Interpretación: El monto aumentará también un 20% ya que la renta es independiente de los demás factores.

Fórmulas para calcular el valor presente de una anualidad simple, cierta, anticipada:

$$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)$$

O también

$$C = R\left[1+\left[\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]\right]$$

Siendo $i = \frac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$

Ejercicio 3

¿Cuál es el capital de seis depósitos trimestrales anticipados de $25,000.00 si se calculan con 20% compuesto trimestralmente?

Solución

$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)$	
Datos	$R = 25{,}000.00$ $J = 0.20$ $m = 4$ $n = 6$ $i = \frac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$
Procedimiento	$i = \frac{0.20}{4} = 0.05$ $C = 25{,}000\left[\frac{1-(1+0.05)^{-6}}{0.05}\right](1+0.05)$ $C = 133{,}236.92$

Ejercicio 4

Una persona alquila un local acordando pagar $2,750.00 de renta mensual. Sin embargo, por motivo de viaje desea adelantar un año de renta.

a) Calcular el valor de esa renta anticipada si la tasa de rendimiento en un banco es de 16.5%.
b) Si la tasa fuera de 15.5%, ¿cuál sería el pago adelantado de un año?
c) Interpretar resultados.

Solución: a) Valor actual de una anualidad anticipada

$C = \left[R \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right](1+i)$	
Datos	$R = 2{,}750$ $J = 0.165$ $m = 12$ $n_a = 1$ $i = \dfrac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$
Procedimiento	$i = \dfrac{0.165}{12} = 0.013750 \quad n = 1\times12 = 12$ $C = 2{,}750\left[\dfrac{1-(1+0.01375)^{-12}}{0.01375}\right](1+0.01375)$ $C = 30{,}646.20$

b) Tasa 15.5%

$C = \left[R \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right](1+i)$	
Datos	$R = 2{,}750$ $J = 0.155$ $m = 12$ $n_a = 1$ $i = \dfrac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$
Procedimiento	$i = \dfrac{0.155}{12} = 0.012917 \quad n = 1\times12 = 12$ $C = 2{,}750\left[\dfrac{1-(1+0.012917)^{-12}}{0.012917}\right](1+0.012917)$ $C = 30{,}781.08$

Interpretación: Si la tasa es menor en un punto porcentual, el pago adelantado inicial aumenta en $134.88 lo que representa un incremento del 0.44%.

Fórmulas para calcular la renta de una anualidad simple, cierta, anticipada:

a) Si se conocen el capital inicial, la tasa de interés nominal o por periodo de capitalización, la frecuencia de conversión y el plazo o número de periodos de capitalización:

$$R = \frac{Ci}{1 + [i - (1+i)^{-n+1}]}$$

Siendo $i = \frac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$

Si se conocen el monto futuro, la tasa de interés nominal o por periodo de capitalización, la frecuencia de conversión y el plazo o número de periodos de capitalización:

$$R = \frac{Mi}{(1+i)^{n+1} - i - 1}$$

Siendo $i = \frac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$

Ejercicio 5

¿De cuánto es cada uno de 6 pagos trimestrales anticipados que se deben realizar para liquidar una deuda de $133,236.92, si se impone una tasa de interés de 20% compuesto trimestralmente?

Solución

$R = \dfrac{Ci}{1 + [i - (1+i)^{-n+1}]}$	
Datos	$R = 133{,}236.92$ $J = 0.20$ $m = 4$ $n = 6$ $i = \dfrac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$
Procedimiento	$i = \dfrac{0.20}{4} = 0.05$ $R = \dfrac{133{,}236.92 \times 0.05}{1 + [0.05 - (1 + 0.05)^{-6+1}]}$ $R = 25{,}000.00$

Ejercicio 6

Una persona debe pagar $102,500.00 dentro de 2 años y, para reunir esa cantidad, decide efectuar 12 depósitos bimestrales en una cuenta de inversión que otorga 12.3%.

a) ¿De qué cantidad deben ser los depósitos si hoy hace el primero?
b) Si prefiere hacer sólo 10 pagos, ¿qué sucede?
c) Interpretar resultados.

Solución:

a) Cálculo de la renta

$R = \dfrac{Mi}{(1+i)^{n+1} - i - 1}$	
Datos	$R = 102{,}500$ $J = 0.123$ $m = 6$ $n_a = 2$ $i = \dfrac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$
Procedimiento	$i = \dfrac{0.123}{6} = 0.0205$ $n = 2 \times 6 = 12$ $R = \dfrac{102{,}500 \times 0.0205}{(1 + 0.0205)^{12+1} - 0.0205 - 1}$ $R = 7{,}467.81$

b) 10 pagos

$$R = \frac{Mi}{(1+i)^{n+1} - i - 1}$$

Datos	R = 102,500 J = 0.123 m = 6 n_a = 1.666667 $i = \frac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$
Procedimiento	$i = \frac{0.123}{6} = 0.0205$ $n = 1.666667 \times 6 = 10$ $R = \frac{102{,}500 \times 0.0205}{(1 + 0.0205)^{10+1} - 0.0205 - 1}$ $R = 9{,}151.98$

Interpretación: Al realizar solo 10 depósitos en lugar de 12 (16.7% menos), el monto de los depósitos se incrementarán $1,684.17 o sea un 22.6% más.

Fórmulas para calcular el tiempo o plazo en una anualidad simple, cierta, anticipada:

a) Si se conocen el capital inicial, la renta, la tasa nominal o la tasa efectiva por periodo y la frecuencia de conversión:

$$n = 1 - \frac{Ln\left[1 + i - \frac{Ci}{R}\right]}{Ln\,(1 + i)}$$

En donde $i = \frac{J}{m}$

b) Si se conocen el monto futuro, la renta, la tasa nominal o la tasa efectiva por periodo y la frecuencia de conversión:

$$n = \frac{Ln\left[1 + i - \frac{Mi}{R}\right]}{Ln\,(1 + i)} - 1$$

En donde $i = \dfrac{J}{m}$

Ejercicio 7

¿Cuántos depósitos trimestrales anticipados de \$25,000.00, con una tasa de 20% capitalizable trimestralmente, se deben hacer para obtener un monto de \$178,550.21?

Solución

$n = \dfrac{Ln\left[1 + i - \frac{Mi}{R}\right]}{Ln\,(1 + i)} - 1$	
Datos	$R = 25{,}000.00$ $\quad M = 178{,}550.21$ $\quad i = \dfrac{J}{m}$ $J = 0.20$ $\quad m = 4$
Procedimiento	$i = \dfrac{0.20}{4} = 0.05$ $n = \dfrac{Ln\left[1 + 0.05 + \frac{178{,}551.21 \times 0.05}{25{,}000}\right]}{Ln(1 + 0.05)} - 1$ $n = 6\ trimestres$

Ejercicio 8

Una persona desea jubilarse al reunir $500,000.00 mediante depósitos mensuales anticipados de $2,000.00. Si la tasa de inversión es del 1.25% mensual, calcular:

a) En cuánto tiempo se reunirá esa cantidad.
b) Si los pagos se reducen en 50%, calcular el nuevo plazo.
c) Interpretar resultados.

Solución:

a) Cálculo del plazo

$$n = \frac{Ln\left[1 + i - \frac{Mi}{R}\right]}{Ln\,(1+i)} - 1$$	
Datos	$M = 500{,}000$ $R = 2{,}000$ $i = 0.0125$
Procedimiento	$$n = \frac{Ln\left[1 + 0.0125 + \frac{500{,}000 \times 0.0125}{2{,}000}\right]}{Ln(1 + 0.0125)} - 1$$ $$n = 113.315915\ meses = 9\ años\ 5\ meses\ 9\ días$$

b) Si los pagos se reducen en 50%, calcular el nuevo plazo

$$n = \frac{Ln\left[1 + i - \frac{Mi}{R}\right]}{Ln\,(1+i)} - 1$$	
Datos	$M = 500{,}000$ $R = 1{,}000$ $i = 0.0125$
Procedimiento	$$n = \frac{Ln\left[1 + 0.0125 + \frac{500{,}000 \times 0.0125}{1{,}000}\right]}{Ln(1 + 0.0125)} - 1$$ $$n = 158.607239\ \ meses = 13\ años\ 2\ meses\ 18\ días$$

Interpretación: Al reducir los pagos en un 50%, el tiempo en el que se reunirían los $500,000.00 aumentaría en 3 años 9 meses 9 días o sea un 39.96% más.

Fórmulas para calcular la tasa de interés de una anualidad simple, cierta, anticipada:

Debido a que la tasa de interés se encuentra en el numerador y en el denominador de las fórmulas de monto y valor actual de una anualidad simple, no se puede despejar, por lo que se usa para su cálculo el procedimiento llamado de prueba y error a base de iteraciones sucesivas.

También se puede utilizar una calculadora programable, calculadora financiera o una computadora con software financiero.

a) Si se conocen el capital inicial, la renta, la frecuencia de conversión y el plazo de tiempo o número de periodos de capitalización:

$$\frac{C}{R} = 1 + \frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}$$

Siendo $i = \dfrac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$

b) Si se conocen el monto futuro, la renta, la frecuencia de conversión y el plazo de tiempo o número de periodos de capitalización:

$$\frac{M}{R} = \frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} - 1$$

Siendo $i = \dfrac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$

Ejercicio 9

¿Cuál es la tasa de interés si se efectúan seis depósitos trimestrales anticipados de \$25,000.00 para obtener un monto de \$178,550.21?

Solución:

	$\frac{M}{R} = \frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1$
Datos	$M = 178{,}550.21$ $R = 25{,}000.00$ $m = 4$ $n = 6$
Procedimiento	$\frac{178{,}550.21}{25{,}000} = \frac{(1+i)^{6+1} - 1}{i} - 1 = 7.142008$ $Si\ i = 0.04 \quad \frac{(1+i)^7 - 1}{i} - 1 = 6.898294$ $Si\ i = 0.055 \quad \frac{(1+0.055)^7 - 1}{0.055} - 1 = 7.266894$ $Si\ i = 0.05 \quad \frac{(1+0.05)^7 - 1}{0.05} - 1 = 7.142008$ $\therefore i = 0.05\ trimestral = 20\%\ anual$

Ejercicio 10

¿Qué tasa de interés anual se necesita para que cinco depósitos anuales anticipados de \$50,000.00 equivalgan a un valor actual de \$200,000.00?

Solución:

	$\frac{C}{R} = 1 + \frac{1 - (1+i)^{-n+1}}{i}$
Datos	$C = 200{,}000.00$ $R = 50{,}000.00$ $m = 1$ $n_a = 5$ $n = m \times n_a$
Procedimiento	$n = 1 \times 5 = 5$ $\frac{200{,}000}{50{,}000} = 4 - 1 = 3\frac{1 - (1+i)^{-4}}{i}$ $Si\ i = 0.15 \quad \frac{1 - 1.15^{-4}}{0.15} = 2.854978$ $Si\ i = 0.13 \quad \frac{1 - 1.13^{-4}}{0.13} = 2.974471$ $Si\ i = 0.125 \quad \frac{1 - 1.125^{-4}}{0.125} = 3.005639$ $\therefore i = 0.125\ anual = 12.5\%\ anual$

3.4. Anualidades diferidas

Las anualidades diferidas son iguales a las anualidades vencidas ya anticipadas, y las fórmulas son las mismas, pero éstas tienen un periodo de gracia llamado tiempo diferido.

Las anualidades diferidas son aquellas en la cuales el primer pago se hace tiempo después del término del primer periodo que genera intereses.Se caracteriza porque la primera renta no se ejecuta en el primer periodo ni la última se cumple en el último periodo.

El procedimiento para evaluar sus elementos es muy simple, ya que se resuelven como inmediatas utilizando las fórmulas anteriores, para después trasladar en el tiempo el monto o el capital utilizando la fórmula del interés compuesto.

Cuando la serie de pagos se inicia en alguna fecha futura, decimos que su pago se aplaza o se difiere o se da un periodo de gracia. En este tipo de anualidades, hay dos tiempos:

a. Diferido o intervalo de aplazamiento, en el que no se realiza pago alguno. Se le llama *r*.

b. De percepción (*n*), el real, el tiempo en que se hacen los pagos o depósitos.

Podemos emplear las siguientes fórmulas o bien las de anualidades anticipadas.

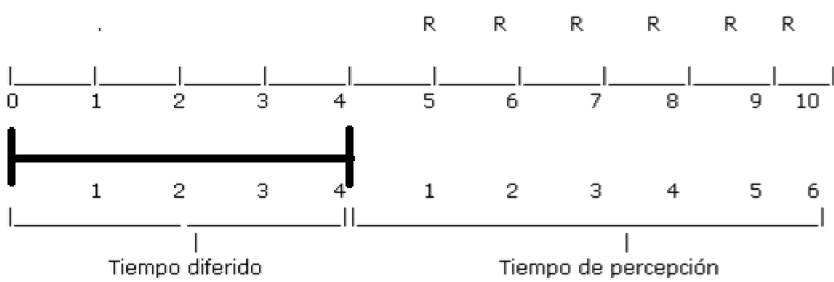
En los ejercicios resueltos lo haremos de las dos formas —tú aplica el que te resulte más práctico—.

Fórmulas para anualidades diferidas

CAPITAL	RENTA
$C = R\,\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i(1+i)^{k}}$	$R = \dfrac{Ci\,(1+i)^{k}}{1-(1+I)^{-n}}$
NÚMERO DE PERIODOS	**TIEMPO DIFERIDO**
$n = \dfrac{log\left[\dfrac{R}{R - Ci\,(1+i)^{k}}\right]}{log(1+i)}$	$k = \dfrac{log\left[R\left(\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{Ci}\right)\right]}{log(1+i)}$

$k\ es\ el\ tiempo\ diferido\ o\ periodo\ de\ gracia$

La gráfica siguiente ejemplifica el caso de anualidades ordinarias diferidas:



Como se ve en el diagrama, el primer pago se realizará en una fecha futura, es decir, al terminar el quinto periodo, pues durante cuatro periodos no se hace pago. Es evidente que éste es un caso de anualidades ordinarias diferidas.

Cálculo del monto de anualidades diferidas

Se utilizan las mismas fórmulas de una anualidad simple, cierta, ordinaria o anticipada, ya que lo único que se modifica es el inicio del primer pago o depósito, el cual no se efectúa hasta después de transcurrido un intervalo, que se inicia desde el momento en que la operación quedó formalizada.

El resultado del monto futuro de una anualidad diferida es exactamente el mismo que el de una anualidad inmediata.

El monto de las anualidades diferidas vencidas es igual al de las anualidades ordinarias, en las mismas condiciones de importe de la renta, plazo o tiempo y tasa de interés. Esto se debe a que, durante el tiempo diferido, no se realiza ningún pago o depósito. En el ejercicio 2, en el inciso b, se considera y comprueba el monto de una anualidad diferida.

Cálculo del valor presente de anualidades diferidas

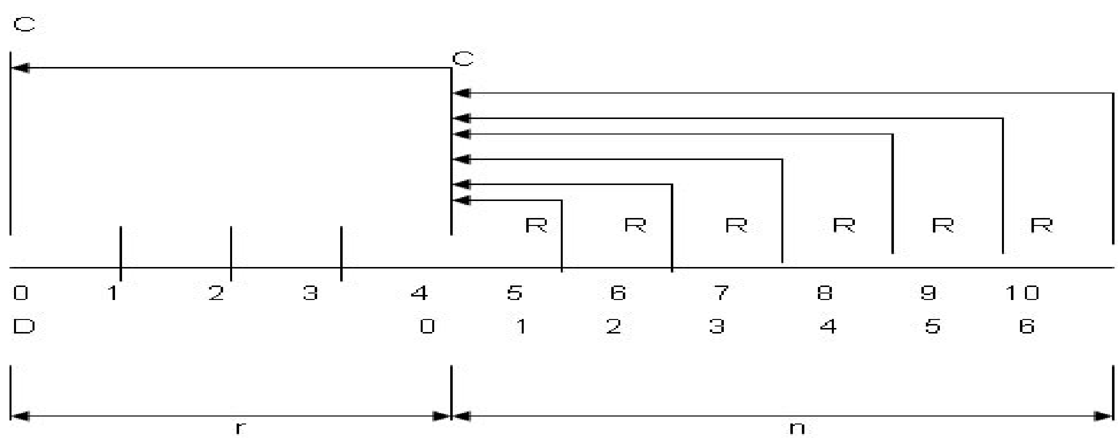
Se utilizan las mismas fórmulas de una anualidad simple, cierta, ordinaria o anticipada, ya que lo único que se modifica es el inicio del primer pago o depósito, el cual no se efectúa hasta después de transcurrido un intervalo, que se inicia desde el momento en que la operación quedó formalizada.

En este caso, es importante considerar el plazo diferido, o periodo de gracia, para traer a valor presente, al inicio de la operación, el valor actual de la anualidad ordinaria.

El valor presente de las anualidades ordinarias coincide con la iniciación del tiempo de pago, en tanto que el valor actual de las anualidades diferidas se sitúa en el comienzo del tiempo diferido. En otras palabras, el valor actual de las anualidades diferidas se calcula a una fecha anterior de aquella a la cual se calcula el valor presente de las anualidades ordinarias. Así, en el ejemplo del diagrama siguiente, el valor actual de las anualidades diferidas se calcularía en el 0, en tanto que, si no existiera el tiempo diferido y nos encontráramos frente a un caso de anualidades ordinarias, su valor actual se determinaría en el 4.

Para encontrar el valor actual de las anualidades diferidas, se puede calcular el valor presente como si se tratara de anualidades ordinarias a la fecha en que se inicia el periodo de pago. Conocido ese valor, lo descontamos por el tiempo diferido para regresarlo, en el tiempo, a la fecha de iniciación del periodo de aplazamiento.

Lo anterior, en forma de diagrama, se expresa de la siguiente manera:



Valor actual de una anualidad diferida

Ejercicio 1

> ¿Cuál es el valor actual diferido de seis rentas mensuales, de \$25,000.00 cada una, si se comienza a pagar al finalizar el quinto mes, a partir del día de hoy, y la tasa es de 24% convertible mensualmente?

A	.			A_I	R	R	R	R	R	R
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

En el diagrama, se ve que el número de pagos que no se realizarán es 4, por lo que:

Solución: a_1) Cálculo de A_1

$A = R\ \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$	
Datos	$R = 25{,}000.00$ $\quad J = 0.24$ $\quad i = \dfrac{J}{m}$ $m = 12$ $\quad n = 6$
Procedimiento	$i = \dfrac{0.24}{12} = 0.02$ $A_1 = 25{,}000\dfrac{1-(1+0.02)^{-6}}{0.02}$ $A_1 = 140{,}035.77$

a_1) Cálculo de A

$A = A_1\ (1+i)^{-n}$	
Datos	$A_1 = 140{,}035.77$ $\quad i = 0.02$ $\quad n = 4$
Procedimiento	$A = 140{,}035.77(1+0.02)^{-4}$ $A = 129{,}371.40$

Con la fórmula directa:

$$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i(1+i)^{k}}\right] = 25{,}000\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.24}{12}\right)^{-6}}{0.02(1+.02)^{4}}\right] = 129{,}371.40$$

Observa que el resultado es exactamente igual pero menos laborioso con esta fórmula. Se puede tener una pequeña diferencia por las cifras significativas que se pierden cuando no usas las memorias de tu calculadora científica. Te recomiendo que aprendas todas las funciones de la calculadora.

Hagamos la comprobación aritmética:

Concepto	($)
Capital	129,371.40
Intereses del primer mes	2,587.43
Monto al final del primer mes	131,958.83
Intereses del segundo mes	2,639.17
Monto al final del segundo mes	134,598.00
Intereses del tercer mes	2,691.96
Monto al final del tercer mes	137,289.96
Intereses del cuarto mes	2,745.80
Monto al final del cuarto mes	140,035.76
Intereses del quinto mes	2,800.71
Suma	142,836.47
Menos la primera renta	25,000.00
Capital al final del quinto mes	117,836.47
Intereses del sexto mes	2,356.73
Suma	120,193.20
Menos la segunda renta	25,000.00
Capital al final del sexto mes	95,193.20
Intereses del séptimo mes	1,903.87
Suma	97,097.07

Concepto	($)
Menos la tercera renta	25,000.00
Capital al final del séptimo mes	72,097.07
Intereses del octavo mes	1,441.94
Suma	73,539.01
Menos la cuarta renta	25,000.00
Capital al final del octavo mes	48,539.01
Intereses del noveno mes	970.78
Suma	49,509.79
Menos la quinta renta	25,000.00
Capital al final del noveno mes	24,509.79
Intereses del décimo mes	490.21
Suma	25,000.00
Menos la sexta renta	25,000.00
Al final del décimo mes	0.00

Lo anterior ha demostrado la exactitud del valor actual que hemos calculado.

Ejercicio 2

Un almacén oferta: "compre ahora… pague después" un mueble que un comprador recibe el 1° de octubre y debe pagar 12 mensualidades de $1,800.00 a partir del 1° de enero del año siguiente. Si se considera el interés al 18% convertible mensualmente:

a) ¿Cuál es el valor de contado?
b) Calcular el monto futuro mediante una anualidad y comprobar con el valor actual a interés compuesto.

Solución:

$$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i(1+i)^{k}}\right] = 1{,}800\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.18}{12}\right)^{-12}}{0.015(1+0.015)^{2}}\right] = 19{,}057.50$$

Desarrollándolo en otro método:

Solución: a) Valor de contado: a_1) Cálculo de A_1:

$A = R\,\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$		
Datos $R = 1{,}800$ $J = 0.18$ $m = 12$ $n_a = 1$ $i = \dfrac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$	*Procedimiento*	$i = \dfrac{0.18}{12} = 0.015$ $n = 1\times12 = 12$ $A_1 = 1{,}800\,\dfrac{1-(1+0.015)^{-12}}{0.015}$ $A_1 = 19{,}633.51$

a_1) Cálculo de A:

$A = A_1\,(1+i)^{-n}$	*Datos*	*Procedimiento*
	$R = 1{,}800$ $J = 0.18$ $m = 12$ $n_a = 0.166667$ $i = \dfrac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$	$i = \dfrac{0.18}{12} = 0.015$ $n = 0.166667\times12 = 2$ $A_1 = 19{,}633.51(1+0.015)^{-2}$ $A_1 = 19{,}057.50$

b) Cálculo del monto futuro

b_1) Cálculo del monto futuro anualidad

$M = R\,\dfrac{(1+i)^{n}-1}{i}$	
Datos	$R = 1{,}800.00$ $J = 0.015$ $m = 12$ $n_a = 1$ $n = m \times n_a = 12\text{x}1 = 12$
Procedimiento	$M = 1{,}800\,\dfrac{(1+0.015)^{12}-1}{0.015}$ $M = 23{,}474.18$

b_2) Cálculo del monto futuro a interés compuesto

$M = C\,(1+i)^{n}$	
Datos	$C = 19{,}057.50$ $i = 0.015$ $n = 14$ meses
Procedimiento	$M = 19{,}057.50(1+0.015)^{14}$ $M = 23{,}474.18$

Los resultados son idénticos.

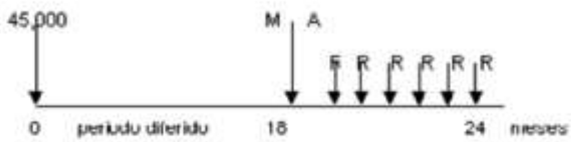
Ejercicio 3

Un capital de $45,000.00 se coloca en un pagaré de una institución financiera que otorga 8.5% anual con capitalización mensual durante un año y medio, con el objeto de obtener un monto de capital que cubra una buena parte de la colegiatura de un estudiante. Si se conoce que el costo de la colegiatura es de $75,000.00 para el próximo semestre, calcular el valor presente de la nueva anualidad y el monto de sus pagos si se considera una tasa de interés de 10.5%.

Solución:

	$M = C\,(1+i)^{n}$ $\qquad i = \frac{J}{m}$ y $\quad n = n_a \times m$
Datos	$C = 45{,}000$ $\quad J = 0.085$ $\quad m = 12$ $\quad n_a = 1.5$
Procedimiento	$i = \frac{0.085}{12} = 0.007083$ $n = 1.5 \times 12 = 18$ $M = 45{,}000 \times 1.007083^{18} = 51{,}096.35$ **Valor presente:** De la nueva anualidad: $A = 75{,}000.00 - 51{,}096.35 = 23{,}903.65$

Monto futuro:



Interpretación: Por el pago parcial efectuado de $51,096.35, se reduce la anualidad en 3.14 veces, por lo que la renta mensual también se reduce en la misma cantidad, representando, entonces, 61.8% menos, por lo que el ahorro financiero es considerable.

Cálculo de la renta:

$$R' = \frac{Ri}{(1+i)^{n}} - 1$$

Ejercicio 4

A Pedro Mena le dieron un crédito para la compra de un coche que cuesta $110,000. El primer pago lo hará al finalizar el quinto mes. Si la tasa es de 18%, la capitalización mensual y los pagos serán de $5,000.00, ¿en cuántos meses liquidará el crédito?

$$n = \frac{\log\left[\frac{R}{R - Ci(1+i)^{k}}\right]}{\log\,(1+i)} = \frac{\log\left[\frac{5000}{5000 - (110000)(0.015)(1.015)^{5}}\right]}{\log\,(1.015)} = 29.52$$

Ejercicio 5

Compré en un almacén $22,106.50 en mercancía, me dan un periodo de gracia para iniciar el primero de 13 pagos mensuales; si la tasa de interés es de 1.5% mensual, ¿a partir de qué mes iniciaré los pagos?

$$k = \frac{\log\left[R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{Ci}\right]\right]}{\log(1+i)} = \frac{\log\left[2000\left[\frac{1-(1.015)^{-13}}{(22{,}106.5)(0.015)}\right]\right]}{\log(1+0.015)} = 4$$

Tiene que empezar sus pagos al terminar el mes 4.

3.5. El caso general de las anualidades

En todos los problemas resueltos hasta el momento, los periodos de capitalización han coincidido con los de pago. Es decir, para rentas trimestrales consideramos la tasa trimestral; para pagos mensuales, tasas mensuales y así sucesivamente. Sin embargo, hay casos en que los periodos de pago no coinciden con los de capitalización. En estas circunstancias, lo primero que se debe hacer es unificar la tasa de interés a los periodos de pago: si los pagos son semestrales, la tasa de interés también debe estar en forma semestral y así sucesivamente. Estos problemas son considerados en las anualidades generales.

Existen 2 métodos para convertir las anualidades de tipo general en anualidades simples:

a) Determinar la tasa de interés equivalente.
b) Determinar la renta equivalente.

A su vez, se pueden presentar dos casos en relación con los periodos de depósitos o pagos:

1) Periodo de pago más largo que el de capitalización.
2) Periodo de capitalización más largo que el de pago.

Fórmulas de tasa equivalente:

Caso 1)

$$i' = (1+i)^p - 1$$

Caso 2)

$$i = (1+i)^{1/p} - 1$$

Fórmulas de renta equivalente:

Caso 1)

$$R' = \frac{Ri}{(1+i)^p} - 1$$

Caso 2)

$$R' = R\,\frac{(1+i')^p - 1}{i'}$$

Luego, para solucionar los casos generales de anualidades, se debe hacer lo siguiente:

a. Determinar las tasas o rentas equivalentes para que tanto la tasa de interés como los pagos estén en la misma unidad de tiempo.

b. Manejar el problema como una anualidad simple y utilizar la fórmula respectiva, según la anualidad que corresponda a cada ejercicio.

Ejercicio 4

Encontrar el monto y el valor presente de un conjunto de 5 pagos cuatrimestrales vencidos de $25,000.00, si el interés es de 21.6% convertible mensualmente (Caso 1).

Solución:

a) Tasa equivalente

$i' = (1+i)^{p} - 1$	
Datos	$J = 0.216$ $\quad m = 12$ $\quad p = 3$ $\quad i = \frac{J}{m}$
Procedimiento	$i = \frac{0.216}{12} = 0.018 \; i' = (1 + 0.018)^3 - 1 = 0.054978$

a_1) Cálculo monto futuro:

$M = R\,\frac{(1+i')^{n} - 1}{i'}$	*Datos*	$R = 25{,}000.00$ $\quad i' = 0.054978$ $\quad n = 5$
	Procedimiento	$M = 25{,}000\,\frac{(1 + 0.054978)^5 - 1}{0.054978} = 139{,}521.10$

a_2) Cálculo de valor presente:

$A = R\,\frac{1 - (1+i')^{-n}}{i'}$	*Datos*	$R = 25{,}000.00$ $\quad i' = 0.054978$ $\quad n = 5$
	Procedimiento	$A = 25{,}000\,\frac{1 - (1 + 0.054978)^{-5}}{0.054978} = 106{,}763.60$

b) Renta a equivalente:

$R' = \frac{Ri}{(1+i)^{p} - 1}$	Datos	$R = 25{,}000.00$ $J = 0.216$ $m = 12$ $p = 3$ $i = \frac{J}{m}$
	Procedimiento	$i = \frac{0.216}{12} = 0.018$ $R' = \frac{25{,}000 \times 0.018}{(1+0.018)^3 - 1} = 8{,}185.12$

b₁) Cálculo monto futuro:

$M = R' \frac{(1+i)^{n} - 1}{i}$	Datos	$R' = 8{,}185.12$ $i = 0.018$ $n = 15$
	Procedimiento	$M = 8{,}185.12 \frac{(1+0.018)^{15} - 1}{0.018} = 139{,}521.15$

b₂) Cálculo valor presente:

$A = R' \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$	
Datos	$R = 8{,}185.12$ $i' = 0.018$ $n = 15$
Procedimiento	$A = 8{,}185.12 \frac{1 - (1+0.018)^{-15}}{0.018} = 106{,}763.64$

Las cantidades de monto futuro y valor presente por los 2 métodos son idénticas.

Ejercicio 5

Obtener el monto y el valor presente de un conjunto de 10 depósitos mensuales vencidos de $5,500.00, si el interés que gana es de 12.8% con capitalización semestral (Caso 2).

Solución:

a) Tasa equivalente

$i' = (1+i)^{1/p} - 1$	
Datos	$J = 0.128$ $m = 2$ $p = 6$ $i = \frac{J}{m}$
Procedimiento	$i = \frac{0.128}{2} = 0.064$ $i' = (1+0.064)^{1/6} - 1 = 0.010393$

a$_1$) Cálculo monto futuro:

$M = R\,\frac{(1+i')^{n} - 1}{i'}$		
	Datos	$R = 5{,}500.00$ $i' = 0.010393$ $n = 10$
	Procedimiento	$M = 5{,}500\,\frac{(1+0.010393)^{10} - 1}{0.010393} = 57{,}644.83$

a$_2$) Cálculo de valor presente:

$A = R\,\frac{1 - (1+i')^{-n}}{i'}$		
	Datos	$R = 5{,}500.00$ $i' = 0.010393$ $n = 10$
	Procedimiento	$A = 5{,}500\,\frac{1 - (1+0.010393)^{-10}}{0.010393} = 51{,}982.56$

b) Renta a equivalente:

$R' = R\dfrac{(1+i)^{p} - 1}{i}$	Datos	$R = 5{,}500.00$ $\quad i' = 0.010393$ $\quad p = 6$
	Procedimiento	$R' = 5{,}500\dfrac{(1+0.010393)^{6}-1}{0.010393} = 33{,}869.39$

b_1) Cálculo monto futuro:

$M = R'\dfrac{(1+i)^{n} - 1}{i}$	Datos	$R' = 33{,}869.39$ $\quad J = 0.128$ $\quad m = 2$ $n_a = 10/12 = 0.833333$ $\quad i = \dfrac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$ $i = \dfrac{0.128}{2} = 0.064$ $\quad n = 0.833333\times 2 = 1.666667$
	Procedimiento	$M = 33{,}869.39\dfrac{(1+0.064)^{1.666667}-1}{0.064} = 57{,}644.84$

b_2) Cálculo valor presente:

$A = R'\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$	
Datos	$R = 33{,}869.39$ $\quad i' = 0.064$ $\quad n = 1.666667$
Procedimiento	$A = 33{,}869.39\dfrac{1-(1+0.064)^{-1.666667}}{0.064} = 51{,}982.57$

Las cantidades de monto futuro y valor presente por los 2 métodos son idénticas.

El concepto de anualidad en sus diferentes expresiones tiene una importante aplicación en diversos ámbitos, desde negocios internacionales, empresariales, hasta operaciones financieras particulares y personales.

El mundo actual, caracterizado por la gran facilidad de acceso a la información y el avance en las comunicaciones, proporciona los medios más adecuados para conocer con mayor facilidad los diferentes esquemas de financiamiento y créditos, cuyas operaciones se sustentan en los diversos tipos de anualidades estudiadas. Como ejemplos, se tienen los créditos a la vivienda, créditos para la adquisición de automóviles o para otros fines, como los financiamientos a la educación por medio de instituciones financieras de ahorro y préstamo o bancario comercial.

RESUMEN

En la unidad estudiamos que una anualidad es un conjunto de pagos iguales realizados a intervalos iguales. Pero no necesariamente se dan en periodos de un año, pueden ser periodos semanales, mensuales, quincenales, etc.

Asimismo, definimos, clasificamos y conocimos los elementos de una anualidad, que son renta, tasa de interés, monto y capital.

Recuerda lo siguiente:

- Una anualidad es una sucesión de pagos, depósitos, abonos o retiros iguales, que se realizan a intervalos iguales con interés compuesto.
- El intervalo o periodo de pago o periodo de renta es el tiempo que transcurre entre un pago y otro.
- La renta es el nombre que se da al pago periódico realizado.
- El plazo de una anualidad es el tiempo que transcurre entre el inicio del primer pago y el final o último.

Estudiamos las anualidades diferidas (aquellas en que los pagos inician después de cierto periodo, acordado tanto por acreedor como por el deudor). El periodo de gracia se mide utilizando como unidad de tiempo el correspondiente a los periodos de pago.

BIBLIOGRAFÍA

SUGERIDA

Autor	Capítulo	Páginas
Díaz y Aguilera (2008)	Anualidades simples, ciertas, vencidas e inmediatas	155-198
	Anualidades anticipadas	200-224
	Anualidades diferidas	225-244
Hernández (1996)	Capítulo 7	414-427

Díaz Mata, Alfredo y Aguilera Gómez, Víctor (2008). *Matemáticas financieras* (4ª ed.). México: McGraw-Hill. [e-book disponible en REDUNAM, http://unam.libri.mx/libro.php?libroId=131Díaz Mata, Alfredo y Aguilera Gómez, Víctor (2008). *Matemáticas financieras* (4ª ed.). México: McGraw-Hill. [e-book disponible en REDUNAM, http://unam.libri.mx/libro.php?libroId=131

Hernández Hernández, Abraham (1996). *Matemáticas Financieras* (3ª ed.).

Unidad 4

Amortización

OBJETIVO PARTICULAR

El alumno aprenderá a construir tablas y fondos de amortización, así como a identificar los diferentes elementos que las integran.

TEMARIO DETALLADO

(12 Horas)

4. Amortización

4.1. Amortización de una deuda
4.2. Tablas de amortización
4.3. Fondos de amortización
4.4. Tablas de fondos de amortización

INTRODUCCIÓN

En esta unidad estudiaremos qué es la amortización, calcularemos el importe del pago periódico o renta; elaboraremos tablas de amortización y de fondos de amortización, donde visualizaremos la amortización real, el pago de intereses y el saldo al final de cada periodo hasta liquidar el total de la deuda. En el caso del fondo, veremos cómo crecen los intereses y el modo de acumular el total que se desea tener en el tiempo propuesto.

Amortizar es el proceso financiero mediante el cual se extingue gradualmente una deuda por medio de pagos periódicos, que pueden ser iguales o diferentes.

En las amortizaciones de una deuda, cada pago o cuota entregada sirve para pagar los intereses y reducir el importe de la deuda.

Al obtener un préstamo o crédito en efectivo, en bienes o servicios, se contrae una deuda que puede liquidarse con un solo pago al final del plazo o mediante abonos periódicos cuyo importe y frecuencia pueden ser variables o constantes, por lo que se dice que el préstamo se amortiza.

La palabra amortización proviene del latín "*mortis*" (dar muerte). Simboliza ir dando muerte al capital prestado en forma paulatina. En matemáticas financieras, amortizar significa pagar una deuda y sus intereses mediante pagos parciales o abonos, los que pueden ser iguales en valor o variables, y efectuados a intervalos generalmente iguales.

Amortización puede definirse como el proceso mediante el cual se extingue gradualmente una deuda y sus intereses por medio de una serie de pagos o abonos al acreedor.

Cada pago o abono efectuado se divide en dos partes:

1º. Se pagan los intereses adeudados al momento en que se efectúa el pago

2º. El resto se aplica para disminuir el capital o saldo insoluto de capital.

El fondo de amortización es una suma de dinero que se va acumulando con el fin de obtener un determinado monto para adquirir un bien en el futuro. El fondo de amortización generalmente se forma invirtiendo cantidades iguales al final de periodos iguales; esto significa que el valor del fondo, al final de un cierto tiempo, corresponde al monto de una anualidad ordinaria.

Nomenclatura

- **C**
  - Representa el capital inicial, llamado también principal. Suele representarse también por las letras *A* o *P* (valor presente).
- **R**
  - Es la renta, depósito o pago periódico.
- **J**
  - Es la tasa nominal de interés calculada para un periodo de un año. Se expresa en tanto por uno o tanto por ciento.
- ***i***
  - Es la tasa de interés por periodo de tiempo y representa el costo o rendimiento por periodo de capitalización de un capital ya sea producto de un préstamo o de una cantidad que se invierte. Es el cociente de dividir la tasa nominal entre la frecuencia de conversión m.
- **m**
  - Es la frecuencia de conversión o de capitalización y representa el número de veces que se capitaliza un capital en un año.
- **na**
  - Es el número de años que permanece prestado o invertido un capital.
- **n**
  - Es el número de periodos de que consta una operación financiera a interés compuesto.

SI	• Es el saldo insoluto de capital o pendiente de amortizar en cualquier fecha.
CA	• Es el importe de capital por amortizar en cualquier fecha.
DAC	• Son los derechos del acreedor sobre un bien y se obtienen considerando el saldo insoluto de capital a determinada fecha y en forma porcentual.
DAD	• Son los derechos adquiridos por el deudor sobre el bien y considera la cantidad amortizada en cierta fecha y en forma porcentual.

4.1. Amortización de una deuda

Determinación del importe del pago periódico para amortizar una deuda:

Se calcula mediante la utilización de la fórmula para el valor presente de una anualidad simple, cierta, ordinaria y se considera una amortización de capital a base de pagos e intervalos iguales.

Se conoce el capital inicial que se adeuda, la tasa de interés nominal o periodo de capitalización, la frecuencia de conversión y el plazo o número de periodos de capitalización:

$$R = \frac{Ci}{1 - (1+i)^{-n}}$$

Siendo $i = \frac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$

Ejercicio 1

Juan Ramírez tiene una deuda de $100,000.00 que debe liquidar en 6 pagos mensuales a una tasa de 24% convertible mensualmente. ¿De cuánto dinero serán los pagos mensuales?

Solución:
a) Cálculo de la renta mensual:

$R = \dfrac{Ci}{1-(1+i)^{-n}}$	
Datos	$C = 100{,}000.00$ $J = 0.24$ $m = 12$ $n_a = 0.5$ $i = \dfrac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$
Procedimiento	$i = \dfrac{0.24}{12} = 0.02$ $n = 12 \times 0.5 = 6$ $R = \dfrac{100{,}000 \times 0.02}{1-(1+0.02)^{-6}}$ $R = 17{,}852.58$

Ejercicio 2

EMPRESA tiene una deuda de $180,000.00 que quiere amortizar mediante 6 pagos trimestrales, si la tasa de interés es de 18% con capitalización trimestral, ¿de cuánto será el pago trimestral?

$$R = \frac{Ci}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{180{,}000\left(\frac{0.18}{4}\right)}{1-\left(1+\frac{0.18}{4}\right)^{6}} = 34{,}898.11$$

Ejercicio 3

Al reestructurar una deuda de $95,000.00 me aplicaron una tasa de interés de 18% con capitalización semestral y los pagos serán de $21,177.36, ¿en cuánto tiempo la cubriré?

$$n = \frac{In\left|\frac{1}{1-\frac{Cl}{R}}\right|}{In(1|i)} = \frac{In\left|\frac{1}{1-\frac{(95,000)(0.09)}{21,177.36}}\right|}{In(1.09)} = 6$$

Ejercicio 4

¿Cuál es el valor de 6 pagos para saldar una deuda de $40,000.00 si la tasa de interés es de 36% compuesto cada dos meses?

$$R = \frac{40000\left(\frac{0.36}{6}\right)}{1-\left(1+\frac{0.36}{6}\right)^{-6}} = 8,134.5$$

4.2. Tablas de amortización

Tablas de amortización para pagos periódicos.

Una tabla o cuadro de amortización expresa la variación en el tiempo y en cada periodo de los saldos insolutos de capital, las amortizaciones a capital, los intereses causados o generados, etcétera.

Una tabla de amortización debe contener cuando menos lo siguiente:

Saldo inicial
Interés
Amortización
Pago
Saldo final

También, en caso de que exista un bien de por medio como garantía, existen derechos del acreedor sobre ese bien en 100% al principio de la operación y van disminuyendo conforme se va pagando el capital adeudado; pero, en cambio, irán aumentando los derechos adquiridos por el deudor conforme va saldando su deuda.

Para construir una tabla, se parte del saldo inicial de capital, que se multiplica por la tasa efectiva por periodo para obtener el monto de intereses en ese periodo. Esta cantidad se deduce del importe del pago periódico ya calculado y se obtiene la amortización de capital para ese periodo, cuyo nuevo saldo insoluto se obtendrá al deducir esta última cantidad del saldo insoluto anterior. Como la tasa es constante y los pagos periódicos iguales, se sigue este procedimiento hasta amortizar totalmente la deuda inicial.

Ejercicio 1

Una deuda de \$100,000.00 se debe liquidar en 6 pagos mensuales a una tasa de 24% convertible mensualmente.

a) Cálculo de la renta mensual:

$$R = \frac{Ci}{1-(1+i)^{-n}}$$

Datos

$C = 100{,}000.00$ $\quad J = 0.24$

$m = 12$ $\quad n_a = 0.5$ $\quad i = \frac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$

Procedimiento

$$i = \frac{0.24}{12} = 0.02 \qquad n = 12\times0.5 = 6$$

$$R = \frac{100{,}000\times0.02}{1-(1+0.02)^{-6}} \qquad R = 17{,}852.58$$

b) Tabla de amortización

Periodo fin de mes	Pago mensual	Monto intereses	Amortización	Saldo insoluto	Derechos deudor	DAC %	DAD %
0				100,000.00	0.00	100.0	0.0
1	17,852.58	2,000.00	15,852.58	84,147.42	15,852.58	84.1	15.9
2	17,852.58	1,682.95	16,169.63	67,977.79	32,022.21	68.0	32.0
3	17,852.58	1,359.55	16,493.03	51,484.76	48,515.24	51.5	48.5
4	17,852.58	1,029.70	16,822.88	34,661.88	65,338.12	34.7	65.3
5	17,852.58	693.24	17,159.34	17,502.54	82,497.46	17.5	82.5
6	17,852.58	350.05	17,502.54	0.00	100,000.00	0.0	100.0
∑	107,115.48	7,115.49	100,000.00				

Interpretación: Como se puede apreciar en la tabla, el pago mensual se conserva idéntico en los 6 periodos mientras que el monto de intereses disminuye en forma importante, mientras que la amortización va creciendo. El saldo insoluto son los derechos del acreedor (DAC) sobre un bien dado en garantía y van disminuyendo, en tanto los derechos adquiridos por el deudor (DAD) van aumentando a medida que va pagando el crédito otorgado. Las últimas columnas se refieren a los porcentajes de estos dos conceptos.

Fórmula para calcular el saldo insoluto de capital y los derechos porcentuales del acreedor sobre un bien a determinada fecha:

$$SI = C\,(1+i)^{p} - R\,\frac{(1+i)^{p} - 1}{i}$$

$$DAC = \frac{SI}{C} \times 100$$

Siendo *p* el número de periodos transcurridos a la fecha del cálculo.

Fórmula para calcular la cantidad amortizada de capital y los derechos porcentuales del deudor sobre un bien a una fecha determinada.

$$CA = R\,\frac{(1+i)^{p} - 1}{i} - C\,(1+i)^{p} - 1$$

$$DAD = \frac{CA}{C} \times 100$$

Siendo *p* el número de periodos transcurridos a la fecha del cálculo.

Fórmula para calcular el interés contenido en el pago en un periodo determinado.

$$I_p = R\,[1 - (1+i)^{-n+p-1}]$$

Siendo p el número del periodo determinado.

Ejercicio 2

Del ejercicio 1, calcular los derechos del acreedor sobre un bien y los derechos adquiridos del deudor:
a) Al tercer mes
b) Al quinto mes
c) Calcular los intereses contenidos en el mes 3 y en el mes 5.

Solución:

a) Al 3er. mes:

a_1) Derechos de acreedor:

$SI = C(1+i)^p - R\,\frac{(1+i)^p - 1}{i}$	
Datos	$C = 100{,}000.00 \quad i = 0.02$ $R = 17{,}852.58 \quad p = 3$ $DAC = \frac{SI}{C} \times 100$
Procedimiento	$SI = 100{,}000(1+0.02)^3 - 17{,}852.58\,\frac{(1+0.02)^3 - 1}{0.02}$ $SI = 51{,}484.76$ En porcentaje: $DAC = \frac{51{,}484.76}{100{,}000} \times 100$ $DAC = 51.5\%$

a_2) Derechos adquiridos del deudor:

$CA = R\,\frac{(1+i)^p - 1}{i} - C[(1+i)^p - 1]$	
Datos	$C = 100{,}000.00 \quad i = 0.02$ $R = 17{,}852.58 \quad p = 3$ a) Al 3er. mes $DAD = \frac{CA}{C} \times 100$
Procedimiento	$CA = 17{,}852.58\,\frac{(1+0.02)^3 - 1}{0.02} - 100{,}000[(1+0.02)^3 - 1]$ $CA = 48{,}515.24$ En porcentaje: $DAD = \frac{48{,}515.24}{100{,}000} \times 100$ $DAC = 48.5\%$

b) Al 5º. mes:

b_1) Derechos de acreedor:

$SI = C(1+i)^p - R\,\frac{(1+i)^p - 1}{i}$	
Datos	$C = 100{,}000.00$ $i = 0.02$ $R = 17{,}852.58$ $p = 5$ $DAC = \frac{SI}{C} \times 100$
Procedimiento	$SI = 100{,}000(1+0.02)^5$ $-17{,}852.58\frac{(1+0.02)^5-1}{0.02}$ $SI = 17{,}502.54$ En porcentaje: $DAC = \frac{17{,}502.54}{100{,}000}\times 100$ $DAC = 17.5\%$

b_2) Derechos adquiridos del deudor:

$CA = R\,\frac{(1+i)^p - 1}{i} - C[(1+i)^p - 1]$	
Datos	$C = 100{,}000.00$ $i = 0.02$ $R = 17{,}852.58$ $p = 5$ $DAD = \frac{CA}{C} \times 100$
Procedimiento	$CA = 17{,}852.58\frac{(1+0.02)^5-1}{0.02}$ $-100{,}000[(1+0.02)^5-1]$ $CA = 82{,}497.46$ En porcentaje: $DAD = \frac{82{,}497.46}{100{,}000}\times 100$ $DAD = 82.5\%$

c) Intereses contenidos:

c_1) Al 3er. mes:

$I_p = R[1-(1+i)^{-n+p-1}]$	
Datos	$R = 17{,}852.58$ $i = 0.02$ $p = 3$ $n = 6$
Procedimiento	$I_3 = 17{,}852.58[1-(1+0.02)^{-6+3-1}]$ $I_3 = 1{,}359.55$

c_2) Al 5º mes:

$I_p = R[1-(1+i)^{-n+p-1}]$	
Datos	$R = 17{,}852.58$ $i = 0.02$ $p = 5$ $n = 6$
Procedimiento	$I_3 = 17{,}852.58[1-(1+0.02)^{-6+5-1}]$ $I_3 = 693.24$

Interpretación: Es factible calcular el saldo insoluto, los derechos adquiridos del deudor y los intereses generados en cualquier periodo de amortización.

Las tablas de amortización a línea recta

Este sistema para amortizar deudas se caracteriza porque la parte que se amortiza del capital permanece constante. Por lo tanto, el pago periódico irá disminuyendo progresivamente y cada abono será siempre menor que el anterior.

Nomenclatura

$R1$	• Primera renta
Rk	• Renta en cualquier periodo
Am	• Amortización constante
Ak	• Capital amortizado hasta cualquier periodo

i	• Tasa por periodo
n	• Número de periodos totales
k	• Número de periodos parciales
d	• Diferencia entre dos rentas sucesivas
I	• Monto total de intereses
SIk	• Saldo insoluto del capital en cualquier periodo
Lk	• Liquidación de deudas en cualquier periodo

Fórmulas para calcular el saldo insoluto en cualquier periodo y la liquidación:

Total de la deuda en ese periodo:

$$SI_k = (n - k)\,A_m$$

$$L_k = (n - k)\,A_m + R_k$$

En donde: $A_m = \dfrac{C}{n}$

$R_1 = A_m\,(1 + in)$

$R_k = R_1 - (k - 1)d$

$d = A_m i$

Fórmula para calcular el capital amortizado en cualquier periodo.

$$A_k = A_m\,k$$

Fórmula para calcular el monto de intereses totales.

$$I = \frac{Ci}{2}\,(n + 1)$$

Ejercicio 3

Una deuda de $50,000.00 se tiene que pagar en 5 meses, amortizando $10,000.00 por mes a una tasa de 2.5% mensual. Calcular:

a) El valor de la primera renta.
b) La renta al tercer mes.
c) El pago para liquidar la deuda en el tercer mes.
d) Intereses totales.
e) Elaborar su tabla de amortización.

a) Cálculo de la primera renta:

$R_1 = A_m\,(1 + in)$			
Datos	A_m = 10,000.00	i = 0.025	n = 5
Procedimiento	$R_1 = 10{,}000(1 + 0.025\times 5) = 11{,}250$		

b) Cálculo de la renta 3er. mes:

$R_k = R_1 - (k-1)d$ $d = A_m i$			
Datos	R_1 = 11,250	k = 3	A_m = 10,000
Procedimiento	$d = 10{,}000\times 0.025 = 250$ $R_3 = 11{,}250 - 2\times 250 = 10{,}750$		

c) Liquidación de la deuda 3er. mes:

$L_k = (n - k)\,A_m + R_k$			
Datos	R_3 = 10,750	k = 3	A_m = 10,000
Procedimiento	$L_3 = (5-3)10{,}000 + 10{,}750 = 30{,}750$		

d) Intereses totales:

$I = \frac{Ci}{2}(n+1)$	
Datos	$C = 50{,}000$ $i = 0.025$ $n = 5$
Procedimiento	$I = \frac{50{,}000 \times 0.025}{2}(5+1) = 3{,}750$

e) Tabla de amortización:

Periodo	Amortización	Monto de intereses	Pago mensual	Saldo insoluto
0				50,000.00
1	10,000.00	1,250.00	11,250.00	40,000.00
2	10,000.00	1,000.00	11,000.00	30,000.00
3	10,000.00	750.00	10,750.00	20,000.00
4	10,000.00	500.00	10,500.00	10,000.00
5	10,000.00	250.00	10,250.00	0
Σ	50,000.00	250.00	53,750.00	

En este ejemplo, no se incluyeron las columnas de derechos del acreedor (DAC) y de los derechos adquiridos del deudor (DAD) porque no se considera ninguna prenda o activo que garantice el adeudo en el tiempo.

Ejercicio 4

Una deuda de $50,000.00 se tiene que pagar en 5 meses, amortizando $10,000.00 por mes. En los primeros 3 meses se carga una tasa de 2.5% mensual y en los 2 siguientes, 2% mensual. Calcular el valor de los pagos en una tabla de amortización.

Periodo fin de mes	Pago mensual	Monto Intereses	Amortización	Saldo Insoluto	Derechos deudor	DAC %	DAD %
0				50,000	0	100.0	0.0
1	11,250	1,250	10,000	40,000	10,000	80.0	20.0
2	11,000	1,000	10,000	30,000	20,000	60.0	40.0
3	10,750	750	10,000	20,000	30,000	40.0	60.0
4	10,400	400	10,000	10,000	40,000	20.0	80.0
5	10,200	200	10,000	0	50,000	0.0	100.0
	53,600	3,600	100,000				

4.3. Fondos de amortización

A una suma de dinero que se va acumulando con el fin de obtener un determinado monto, con el fin de liquidar una deuda o adquirir un bien, se le llama *fondo de amortización.* El fondo de amortización generalmente se forma invirtiendo cantidades iguales al final de periodos iguales; esto significa que el valor del fondo, al final de un cierto tiempo, corresponde al monto de una anualidad ordinaria.

El fondo de amortización es también el método por el cual se provee el monto, por medio de una serie de rentas o pagos, para liquidar una deuda. Asimismo, funciona para ahorrar o recuperar el valor histórico de un activo. Esto se realiza invirtiendo una serie de pagos iguales, en periodos iguales, durante el lapso de vida útil del bien, con la finalidad de acumular un monto disponible en efectivo para volver a comprar el sustitutivo del activo al término de su uso. Esta práctica es muy útil financieramente, aun cuando, al llegar al fin de su vida útil, la cantidad acumulada no llegue a cubrir el costo del bien.

En este rubro, se utilizan las fórmulas del monto o valor futuro de las diferentes anualidades, generalmente, la del *monto de anualidades ordinarias*:

$$R = \frac{Mi}{(1+i)^n - 1}$$

Monto acumulado al final del periodo

Para el calcular el monto al final del periodo se utiliza la fórmula:

$$M = R\,(1+i)\left[\frac{(1+i)^{n} - 1}{i}\right]$$

Ejemplo 1

Una empresa desea reunir, al final de 22 trimestres, cierta cantidad para comprar equipo nuevo. Si hace depósitos trimestrales de $18,000.00 con una tasa de interés de 12.72% con capitalización trimestral, ¿cuánto reunirá al final de los 6 meses?

$$M = R(1+i)\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right) = 18{,}000\left(1+\frac{0.1272}{4}\right)\left(\frac{1+\left(\frac{0.1272}{4}\right)^{22} - 1}{\frac{0.1272}{4}}\right)$$

$$= 578{,}862.414$$

Saldo al final de un periodo

Si se quiere encontrar el saldo al final de cierto periodo de pago, se calcula con la fórmula del monto de las anualidades ordinarias, tomando en cuenta, en *n*, los depósitos o rentas que se han efectuado hasta ese momento.

$$M = \frac{R(1+i)^{n} - 1}{i}$$

Ejemplo 2

¿Cuál será el depósito anual para acumular, al cabo de 6 años, un monto de $240,000.00, si dichas rentas obtienen un rendimiento de 8% anual? (Los $240,000.00 representan el valor de un activo adquirido hoy, que se pretende reemplazar al final de su vida útil, que es de 6 años.)

$$R = \frac{Mi}{(1+i)^{n} - 1}$$

$$R = \frac{(240{,}000)(0.08)}{(1+0.08)^{6}-1} = \$32{,}715.69$$

Si se quiere encontrar el saldo al final de cierto periodo de pago, se calcula con la fórmula del monto de las anualidades ordinarias, tomando en cuenta, en *n*, los depósitos o rentas que se han efectuado hasta ese momento.

Ejemplo 3

Del ejercicio 2, ¿cuál será, el saldo final del cuarto periodo?

$$M_4 = 32{,}715.69\left(\frac{(1+0.08)^{4}-1}{0.08}\right) = 147{,}520.56$$

El saldo al final del cuarto periodo es de $147,520.56.

4.4. Tablas de fondos de amortización

En este método se utiliza, al igual que en la amortización, una matriz, en donde las columnas se conforman así:

a) La primera expresa los periodos (*n*).

b) La segunda, los depósitos o rentas (*R*).

c) La tercera, los intereses (*I*) del periodo que se devengan y resulta de multiplicar el saldo final (*M*) del periodo anterior por la tasa de interés (*i*).

d) La cuarta, la cantidad que se acumula al fondo (*CA*) y se calcula sumando la renta (*R*) más los intereses (*I*) del periodo.

e) La quinta, el saldo final (*M*), resultado de la suma del saldo final (*M*) del periodo anterior más la cantidad que se acumula (*CA*) al fondo del periodo.

f) La sexta es el porcentaje de acumulación del fondo.

Periodos **N**	Rentas **(*R*)**	Intereses (*I*) **(M) (I)**	Cantidad que se acumula al fondo (*CA*) **R + I**	Saldo final o monto (M) **(M) + (*CA*)**	**%**

Los renglones muestran las operaciones de cada uno de los periodos. Ilustremos lo anterior con el ejercicio siguiente.

Ejemplo 1

¿Cuál será el depósito anual para acumular, al cabo de 6 años, un monto de $240,000.00, si dichas rentas obtienen un rendimiento de 8% anual? (Los $240,000.00 representan el valor de un activo adquirido hoy, que se pretende reemplazar al final de su vida útil, que es de 6 años).

$$R = \frac{Mi}{(1+i)^n - 1}$$

Datos

$C = 240{,}000.00$

$i = 0.08$

$n = 6$

Procedimiento

$$R = \frac{240{,}000 \times 0.08}{(1+0.08)^6 - i} = 32{,}715.69$$

Nota: Debido al redondeo de cifras hay una pequeña variación.

Periodos N	Rentas (*R*)	Intereses (*I*) (M) (i)	Cantidad que se acumula al fondo (*CA*) R + I	Saldo final o monto (*M*) (*M*) + (*CA*)
1	32,715.69	0-----	32,715.69	32,715.69
2	32,715.69	2,617.26	35,332.95	68,048.64
3	32,715.69	5,443.89	38,159.58	106,208.22
4	32,715.69	8,496.66	41,212.35	147,420.57
5	32,715.69	11,793.65	44,509.34	191,929.91
6	32,715.69	15,354.39	48,070.08	239,999.99*
TOTAL	196,294.14	43,705.85	239,999.99*	

NOTA: Debido al redondeo de cifras hay una pequeña variación.

Si analizamos la tabla, observamos lo siguiente:

Las rentas sirven para aumentar la inversión que, al finalizar los periodos de pago, se utiliza para liquidar la deuda o sustituir el activo al expirar su vida útil.

↓

Los intereses se agregan a la inversión.

↓

Si se quiere encontrar el saldo al final de cierto periodo de pago, se calcula con la fórmula del monto de las anualidades ordinarias, tomando en cuenta, en *n*, los depósitos o rentas que se han efectuado hasta ese momento.

Por ejemplo, el saldo final al cuarto periodo es:

$M = R\,\dfrac{(1+i)^k - 1}{i}$	
Datos	$M = 32{,}715.69$ $\quad i = 0.08 \quad k = 4$
Procedimiento	$M_4 = 32{,}715.69\,\dfrac{(1+0.08)^4 - 1}{0.08} = 147{,}420.56$

***Nota:** la diferencia con $147,420.57 de la tabla se explica por el redondeo que se hizo en la misma.*

Ejemplo 2

La vida útil de un equipo industrial de casas GEO, que acaba de ser adquirido por esta compañía, es de 5 años. Con el fin de reemplazarlo, al final de ese tiempo, la empresa establece un fondo de amortización y efectuará depósitos anuales en una cuenta bancaria que paga 9.6%. Si se estima que el equipo costará $42,740 dólares, ¿cuál será el valor del depósito? Construye una tabla del fondo de amortización.

$$R = \frac{(42{,}740)(0.096)}{(1+0.096)^5 - 1} = 7{,}056.68$$

Periodos N	Rentas (*R*) en dólares	Intereses (*I*) dólares (M) (i)	Cantidad que se acumula al fondo (*CA*) R + I	Saldo final o monto (*M*) (*M*) + (*CA*)
1	7,056.68	-----0-----	7,056.68	7,056.68
2	7,056.68	677.44	7,734.12	14,790.81
3	7,056.68	1,419.92	8,476.60	23,267.41
4	7,056.68	2,233.67	9,290.35	32557.76
5	7,056.68	3,125.54	10,182.22	42,740.00
Total		7,456.58	42,740.00	

Por último, recuerda que estudiamos los mecanismos más usuales para cancelar una deuda mediante pagos periódicos a interés compuesto. Se describieron también las características y ventajas de los esquemas más usuales de amortización, como el de amortización gradual, la amortización constante y la amortización variable.

El conocimiento de esta temática es muy importante, ya que la adecuada comprensión, capacidad y habilidad para determinar cómo se amortizan los créditos representa una ventaja considerable para quienes se ven en la necesidad de endeudarse, al hacer la mejor elección tanto de los diversos planes y sistemas de amortización como de la persona o institución que otorgan los créditos o préstamos.

Los depósitos a un fondo de amortización representan la posibilidad de tener un monto futuro para cancelar una deuda mediante un pago único. Sin embargo, la creación de fondos se puede constituir para cualquier otro propósito, como, por ejemplo, la reposición de maquinaria o equipos al término de su vida útil, para gastos de jubilación de personal en las empresas o para adquirir un bien mueble o inmueble en un futuro. Existen, por lo tanto, diversos tipos de fondos nombrados de acuerdo al fin que persigan, como los fondos de ahorro, fondos vacacionales, fondos para jubilación, para la educación, etcétera.

Algunas de las principales ventajas, al constituir fondos para adquirir un bien o un servicio, son, por ejemplo, que al pagar de contado se puede obtener algún descuento considerable en el precio de compra; también el comprador evita el pago de altos intereses, cargos y comisiones por comprar a crédito; además, sus depósitos periódicos generan y ganan intereses y, lo que es más importante, contribuyen a fortalecer el hábito del ahorro. En cuanto a la mayoría de las personas de nivel socioeconómico medio o bajo, se les facilita más liquidar sus deudas mediante pagos periódicos que con pagos de contado.

RESUMEN

En esta unidad aprendimos que la amortización es el método por el cual se va liquidando una deuda en pagos parciales. El importe de cada pago sirve para solventar los intereses. La amortización es una de las aplicaciones más importantes de las anualidades. Las deudas se amortizan con pagos periódicos iguales. Se hacen depósitos periódicos iguales en un fondo de amortización que genera intereses para amortizar una deuda futura.

Para encontrar cada una de las variables o incógnitas, se utiliza la fórmula del valor actual de los diversos tipos de anualidades. Generalmente, se calcula con base en el valor actual de las anualidades ordinarias.

En la amortización se demuestra que:

1. El capital va disminuyendo conforme se van dando los pagos hasta su liquidación total.

2. Al ir reduciéndose el capital, los intereses también van descendiendo.

3. La amortización del capital va aumentando conforme pasan los periodos, al ir disminuyendo –en la misma proporción– los intereses.

4. Si se quieren conocer las amortizaciones de los diferentes periodos, basta multiplicar la primera amortización por la razón: $(1+i)^n$
Donde n es el número de periodos que faltan para llegar a la amortización del periodo correspondiente.

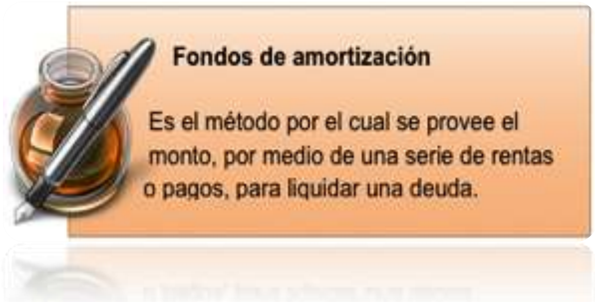
5. La suma de las amortizaciones será igual al valor actual o capital inicial del préstamo.

Tablas de amortización

Para su mayor comprensión, las amortizaciones pueden representarse en una matriz donde:

Las columnas representan lo siguiente:

1. La primera muestra los periodos (*n*).
2. La segunda da el importe de la renta o pago (*R*).
3. La tercera indica los intereses (*I*) y resulta de multiplicar el saldo insoluto (*SI*) anterior por la tasa de interés del periodo (*i*).
4. La cuarta señala la amortización (*A*) del periodo y resulta de restar al pago del periodo (*R*) los intereses del mismo (*I*).
5. La quinta revela la amortización acumulada (*AA*), consecuencia de la suma de la amortización acumulada (*AA*) del periodo anterior más la amortización (*A*) del periodo en estudio.
6. La sexta expresa el saldo insoluto de la deuda, que se obtiene al hacer alguno de estos procedimientos: • Restar al capital inicial (*C*) la amortización acumulada (*AA*) hasta ese periodo. • Restar el saldo insoluto del periodo anterior (*SI*) la amortización del periodo (*A*).



Asimismo, funciona para ahorrar o recuperar el valor histórico de un activo. Esto se realiza invirtiendo una serie de pagos iguales, en periodos iguales, durante el lapso de vida útil del bien, con la finalidad de acumular un monto disponible en efectivo para volver a comprar el sustitutivo del activo al término de su uso.

Esta práctica es muy útil financieramente, aun cuando, al llegar al fin de su vida útil, la cantidad acumulada no llegue a cubrir el costo del bien. En este rubro, se utilizan las fórmulas del monto o valor futuro de las diferentes anualidades, generalmente, la del monto de anualidades ordinarias.

Tablas de fondo de amortización

En este método se utiliza, al igual que en la amortización, una matriz, en donde las columnas se conforman así:

1. La primera expresa los periodos (*n*).
2. La segunda, los pagos o rentas (*R*).
3. La tercera, los intereses (*I*) del periodo y resulta de multiplicar el saldo final (*M*) del periodo anterior por la tasa de interés (*i*).
4. La cuarta, la cantidad que se acumula al fondo (*CA*) y se calcula sumando la renta (*R*) más los intereses (*I*) del periodo.
5. La quinta, el saldo final (*M*), resultado de la suma del saldo final (*M*) del periodo anterior más la cantidad que se acumula (*CA*) al fondo del periodo.

BIBLIOGRAFÍA

SUGERIDA

Autor	Capítulo	Páginas
Díaz y Aguilera (2008)	8. Amortización y fondos de amortización	319-332

Díaz Mata, Alfredo y Aguilera Gómez, Víctor (2008). *Matemáticas financieras* (4ª ed.). México: McGraw-Hill. [e-book disponible en REDUNAM, http://unam.libri.mx/libro.php?libroId=131

Unidad 5

Depreciación

OBJETIVO PARTICULAR

El alumno conocerá y aplicará los diferentes métodos de depreciación.

TEMARIO DETALLADO

(6 Horas)

5. Depreciación

INTRODUCCIÓN

Al predecir el futuro, dos tipos de riesgos están involucrados. Uno de ellos es que el activo no rinda lo que se había pronosticado por descomposturas imprevistas, por elevados costos de mantenimiento, baja productividad u obsolescencia anticipada. El otro riesgo es que las futuras condiciones económicas y la demanda por el producto puedan no evolucionar como se esperaba.

Algo muy importante, entre todos los problemas del presupuesto de capital, es la recuperación del capital invertido.

En esta unidad se estudiarán los métodos de recuperación de capital, lo que requiere de una comprensión de los métodos de depreciación:

La depreciación es el desgaste de los activos fijos en la vida útil, es la reducción del valor histórico de las propiedades, planta y equipo por su uso o caída en desuso. La contribución de estos activos a la generación de ingresos del ente económico debe reconocerse periódicamente a través de la depreciación de su valor histórico ajustado. Con el fin de calcular la depreciación de las propiedades, planta y equipo es necesario estimar su vida útil y, cuando sea significativo, su valor de recuperación.

Casi todos los bienes tienden a depreciarse, salvo: terrenos, gemas (piedras preciosas) joyas, alhajas, reliquias, arte en general; estos bienes, al paso del tiempo, acrecen su valor.

La pérdida de valor de los bienes es conocida como depreciación y debe quedar reflejada contablemente con el fin de:

1. Determinar el costo de los bienes o servicios que se generan con tales activos.

2. Establecer un fondo de reserva que permita reemplazar el bien al final de su vida útil.

Entre los métodos que veremos en este recorrido, se encuentra el de *línea recta*, que es el más simple, pero el más utilizado en muchos países, incluyendo México, además de que está aprobado por autoridades para cumplir con las disposiciones fiscales. El método de línea recta supone que la depreciación anual es la misma durante toda la vida útil del activo. Entonces, la base de la depreciación se divide entre el número de años de vida útil calculada y determina el cargo que anualmente se hará al fondo de reserva y a los resultados.

Otro método que se revisará es el de *suma de dígitos*, cuyo régimen de depreciación asigna un cargo mayor a los primeros años de servicio y lo disminuye con el transcurso del tiempo. También se revisarán otros métodos.

Por último, veremos la depreciación en épocas inflacionarias.

5.1. Concepto

La *depreciación* se define como la pérdida de valor que sufren los activos fijos, principalmente por causas físicas o funcionales.

Fiísicas

Estas causas refieren al desgaste producido por el uso o la acción de elementos naturales o por la combinación de ambos.

Funcionales

Se presentan por obsolescencia o por insuficiencia.

La primera es cuando el activo fijo se retira porque resulta anticuado por mejores técnicas o por nuevas invenciones. Respecto a la segunda, se observa cuando el activo fijo no puede hacer frente al servicio que de él se exige. El valor efectivo de la depreciación es aquel que actúa primero para acabar la vida útil del activo.

Al terminar la vida útil de un activo fijo, se le puede reemplazar. Para llevar a cabo el reemplazo o reposición de los activos será necesario crear un fondo de reserva, el cual se forma separando en forma periódica ciertas cantidades de dinero para ese fin.

Desde el punto de vista fiscal o impositivo, los tiempos y porcentajes de los cargos por depreciación autorizados se aplican según diversos métodos de depreciación.

Valor en libros

El costo original de un activo menos la depreciación acumulada a una fecha determinada se denomina valor en libros y representa el valor que aún tiene el activo en los registros contables de una empresa.

Cuando un activo fijo ha llegado al final de su vida útil tiene un valor de rescate conocido también como valor de desecho o de salvamento o residual. Puede ser nulo cuando el activo se convierte en un total desperdicio; puede ser positivo cuando existe una recuperación económica. Puede ser negativo si se requiere un gasto adicional para su remoción o retiro.

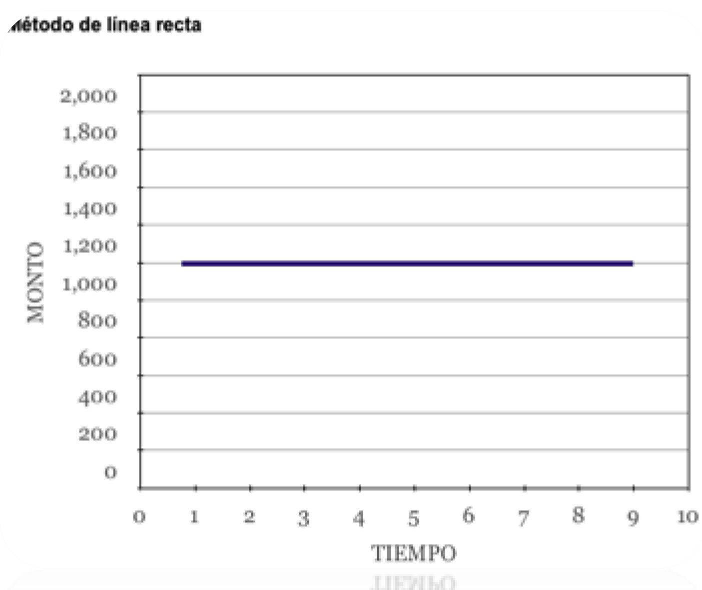
Esquemas de depreciación

Nomenclatura

- *C* • Costo original del activo
- *S* • Valor de salvamento o residual
- *B* • Base de depreciación del activo fijo
- *n* • Vida útil calculada en años
- *d* • Tasa de depreciación anual
- *N* • Número de unidades de producción o de servicio
- *Pk* • Número de unidades de producción o servicio acumuladas al año *k*

- *Dk* — Depreciación anual en el año *k*
- *Ak* — Depreciación acumulada al final del año *k*
- *Vk* — Valor en libros al final del año *C*

5.2. Método de línea recta



Es un método muy utilizado por su simpleza y fácil aplicación. Se basa en el supuesto de que el cargo por depreciación anual es igual para todos los años de la vida útil del activo. La depreciación se calcula dividiendo la base de depreciación entre el número de años de la vida útil del activo.

La depreciación acumulada crece cada año en una cantidad fija y el valor en libros disminuye en la misma cantidad.

Una desventaja de este método es que no todos los activos pierden valor uniformemente sino en forma más importante en los primeros años de su vida útil. Tampoco toma en cuenta los intereses generados en un fondo de reserva.

Fórmulas para calcular la base de depreciación, el monto de la depreciación, la depreciación acumulada a un año *k* y el valor en libros al final del año *k*.

Base de la depreciación	$B = C - S$
Depreciación por año	$D_k = \dfrac{C - S}{n} = \dfrac{B}{n}$
Depreciación acumulada	$A_k = kD_k$
Valor en libros en cualquier año	$V_k = C - kD_k$

Ejercicio 1

El Hospital Juárez de México compra un equipo de cómputo en $24,000.00 y se calcula una vida útil de 4 años antes de ser reemplazado por un equipo más moderno. Su valor residual se calcula en $3,500.00.

a) Determínese la depreciación anual por el método de la línea recta.
b) Elaborar su tabla de depreciación.
c) Encontrar su punto de equilibrio.
d) Interpretación.

Solución:

a) Depreciación anual

$D_k = \dfrac{C - S}{n} = \dfrac{B}{n}$	
Datos	$C = 24{,}000.00$ $S = 3{,}500.00$ $n = 4$
Procedimiento	$D_k = \dfrac{24{,}000 - 3{,}500}{4} = 5{,}125.00$

b) Tabla de depreciación

Años	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros	% depreciación
0	0	0	24,000.00	0.0
1	5,125.00	5,125.00	18,875.00	21.3
2	5,125.00	10,250.00	13,750.00	42.7
3	5,125.00	15,375.00	8,625.00	64.1
4	5,125.00	20,500.00	3,500.00	85.4
	20,500.00			14.6

c) Punto de equilibrio E:

$A_k = kD_k$	
Datos	$C = 24{,}000$ $D_k = 5{,}125$ $V_k = C - kD_k$
Procedimiento	$A_k = 5{,}125k$ $V_k = 24{,}000 - 5{,}125k$ $k = 2.34$ años $A_k = V_k = 12{,}000$ $E(2.34, 12{,}000)$

d) Interpretación:

La depreciación anual es constante, la deprecación acumulada crece y el valor en libros decrece hasta el valor de salvamento. La abscisa del punto de equilibrio es la relación entre el costo original del activo y el doble de la depreciación anual, en tanto la ordenada es la mitad del mismo costo inicial del activo.

Ejercicio 2

La empresa KUMISA cambia su maquinaria deteriorada y adquiere nuevo equipo con un costo original de $210,000.00 y un valor de salvamento de $30,000.00, el cual se recuperará al final de la vida útil del activo de 6 años. La maquinaria producirá un total de 120,000 unidades, distribuidas a lo largo de su vida útil de la siguiente manera:

Años	Unidades producidas
1	25,000
2	30,000
3	25,000
4	15,000
5	15,000
6	10,000
Total	120,000

Elabora la tabla de depreciación:

$D_1 = \dfrac{C - S}{n}$ $depreciación = D = \dfrac{B}{n}$ $\begin{matrix}depreciación \\ acumulada\end{matrix} = D_a = C - tD$	
Datos	n = 6 años C = \$210,000.00 S = \$30,000.00
Procedimiento	$B = C - S = 210{,}000 - 30{,}000 = 180{,}000$ $depreciación = D = \dfrac{B}{n} = \dfrac{210{,}000 - 30{,}000}{6} = 30{,}000$

Tabla de depreciación:

Años (n)	Depreciación (D)	Depreciación acumulada (Da)	Valor en libros (V)
0	-----0-----	-----0-----	210,000.00
1	30,000.00	30,000.00	180,000.00
2	30,000.00	60,000.00	150,000.00
3	30,000.00	90,000.00	120,000.00
4	30,000.00	120,000.00	90,000.00
5	30,000.00	150,000.00	60,000.00
6	30,000.00	180,000.00	30,000.00

Interpretación:

La depreciación anual es constante, la deprecación acumulada crece y el valor en libros decrece hasta el valor de salvamento. La abscisa del punto de equilibrio es la relación entre el costo original del activo y el doble de la depreciación anual, en tanto la ordenada es la mitad del mismo costo inicial del activo.

5.3. Método de suma de dígitos

Es un método en el que la depreciación anual es variable y decrece con el tiempo, es mayor en los primeros años de vida útil del activo y disminuye en los años subsiguientes.

La depreciación anual es una fracción del valor de uso. El denominador de dicha fracción se obtiene numerando los años de la vida útil y se suman después. El numerador para el primer año es igual a la vida útil estimada, reduciéndose en una unidad por cada año. La fracción se multiplica por la base de la depreciación y se obtiene el cargo anual.

Fórmulas para calcular la base de depreciación, el denominador de la fracción para la suma de dígitos, la depreciación acumulada a un año *k* y el valor en libros al final del año *k*

Base de la depreciación	$B = C - S$
Denominador de la fracción	$S_v = \frac{n\,(n+1)}{2}$
Depreciación para el año *k*	$D_k = \frac{n - k + 1}{S_v} \times B$
Depreciación acumulada	$A_k = \frac{kB}{2S_v}\,(2n - k + 1)$
Valor en libros en cualquier año	$V_k = C - A_k$ ó $V_k = C - \frac{kB}{2S_v}\,(2n - k + 1)$

Ejercicio 1

Se compra un mobiliario de oficina con valor de $26,925.00; se estima una vida útil de 5 años y tiene un valor de rescate de $6,000.00. Por el método de suma de dígitos:

a) Obtener la base de depreciación.
b) Elaborar su tabla de depreciación.
c) Verificar su depreciación, su depreciación acumulada, y su valor en libros en el año 3.
d) Interpretación.

Solución:

a) Base de la depreciación

$B = C - S$	
Datos	$C = 26{,}925.00$ $S = 6{,}000.00$
Procedimiento	

$$B = 26{,}925 - 6{,}000 = 20{,}925$$

a_1) Denominadores de las fracciones:

$$S_v = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

$n = 5$

$$S_v = \frac{5(5+1)}{2} = 15$$

a_2) Numeradores de las fracciones:

Año	1	2	3	4	5
Numerador	5	4	3	2	1

a_3) Fracciones:

Año	1	2	3	4	5
Numerador	5/15	4/15	3/15	2/15	1/15

b) Tabla de depreciación:

Años	Fracción	Base de depreciación	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0					26,925.00
1	0.333333	20,925.00	6,975.00	6,975.00	19,950.00
2	0.266667	20,925.00	5,580.00	12,555.00	14,370.00
3	0.200000	20,925.00	4,185.00	16,740.00	10,185.00
4	0.133333	20,925.00	2,790.00	19,530.00	7,395.00
5	0.066667	20,925.00	1,395.00	20,925.00	6,000.00

c) Verificación al año 3:

c_1) Depreciación:

$D_k = \dfrac{n - k + 1}{S_v} \times B$	
Datos	$B = 20{,}925$ $\quad k = 3$ $n = 5$ $\quad S_k = 15$
Procedimiento	$D_k = \dfrac{5-3+1}{15} \times 20{,}925 = 4{,}185$

c_2) Depreciación acumulada:

$A_k = \dfrac{kB}{2S_v}(2n - k + 1)$	
Datos	$B = 20{,}925$ $\quad k = 3$ $n = 5$ $\quad S_v = 15$
Procedimiento	$A_k = \dfrac{3 \times 20{,}925}{2 \times 15}(2 \times 5 - 3 + 1) = 16{,}740$

c_3) Valor en libros:

$V_k = C\,\dfrac{kB}{2S_v}(2n - k + 1)$	
Datos	$C = 26{,}925$ $\quad B = 20{,}925$ $\quad k = 3$ $n = 5$ $\quad S_v = 15$
Procedimiento	$A_k = 26{,}925 - \dfrac{3 \times 20{,}925}{2 \times 15}(2 \times 5 - 3 + 1) = 10{,}185$ o también: $V_k = C - A_k = 26{,}925 - 16{,}740 = 10{,}185$

d) Interpretación:

Este método se utiliza cuando se considera que un activo se deprecia mucho más al principio de su vida útil, por lo que su depreciación irá disminuyendo con el tiempo.

La depreciación de los activos constituye, desde el punto de vista impositivo y fiscal, una importante ventaja al registrar en libros esas partidas y, por otra parte, las empresas destinan ciertas cantidades de dinero en forma periódica para la creación de fondos que eviten una descapitalización abrupta al momento de reponer sus activos, cuando dejan de ser útiles o cuando exista la necesidad de costosas reparaciones o simplemente para su mantenimiento.

Por lo tanto, de acuerdo con lo expuesto en este tema, resulta de gran utilidad conocer las particularidades de los diferentes métodos de depreciación de activos y, en su caso, poder conocer su valor real en cualquier momento.

Ejercicio 2

Altos Hornos de México cambia su maquinaria deteriorada y adquiere nuevo equipo con un costo original de $210,000.00 y un valor de salvamento de $30,000.00, el cual se recuperará al final de la vida útil del activo de 6 años. La maquinaria producirá un total de 120,000 unidades, distribuidas a lo largo de su vida útil de la siguiente manera:

Años	Unidades producidas
1	25,000
2	30,000
3	25,000
4	15,000
5	15,000
6	10,000
Total	120,000

Da la depreciación anual y elabora la tabla de depreciación por el método de suma de dígitos.

$$S_v = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Datos

n = 6 años　　C = $210,000.00

S = $30,000.00　　B = $180,000.00

Procedimiento

Se suman los dígitos

$$S = \frac{6(6+1)}{2} = 21$$

Se ordenan los años de forma inversa:

Año	1	2	3	4	5	6
Año en orden invertido	6	5	4	3	2	1
Suma de Dígitos	21	21	21	21	21	21
Fracción que depreciará	6	5	4	3	2	1
	21	21	21	21	21	21

$$D_1 = \frac{6-1+1}{21}(180{,}000) = 51{,}428.57$$

$$D_2 = \frac{6-2+1}{21}(180{,}000) = 42{,}857.14$$

$$D_3 = \frac{6-3+1}{21}(180{,}000) = 34{,}285.71$$

$$D_4 = \frac{6-4+1}{21}(180{,}000) = 25{,}714.28$$

$$D_5 = \frac{6-5+1}{21}(180{,}000) = 17{,}142.85$$

$$D_6 = \frac{6-6+1}{21}(180{,}000) = 8{,}571.42$$

Tabla de depreciación por el método suma de dígitos

Años (*n*)	Dígitos (*a/b*)	Depreciación (*D*)	Depreciación acumulada (*Da*)	Valor en libros (*V*)
0	-----0-----	-----0-----	-----0-----	210,000.00
1	6/21	51,428.57	51,428.57	158,571.43
2	5/21	42,857.14	94,285.71	115,714.29
3	4/21	34,285.71	128,571.42	81,428.58
4	3/21	25,714.29	154,285.71	55,714.29
5	2/21	17,142.86	171,428.57	38,571.43
6	1/21	8,571.43	180,000.00	30,000.00

Este método se utiliza cuando se considera que un activo se deprecia mucho más al principio de su vida útil, por lo que su depreciación irá disminuyendo con el tiempo. Observamos que la depreciación es diferente para cada año: disminuye conforme pasa el tiempo.

5.4. Método de porcentaje fijo

El método del porcentaje fijo considera que la depreciación anual es precisamente un porcentaje constante, igual para cada año, sobre el valor en libros del año que precede y como se va reduciendo en cada periodo, disminuye conforme pasa cada año. En el primer año será mayor y mucho menor en el último año que se deprecia.

Fórmulas para la depreciación del método de porcentaje fijo.

Depreciación anual	$D_k = V_{k-1}d$
Valor en libros	$V_1 - V_0 d = C - Cd$ ó $V_k = C(1-d)^k$
Valor de salvamento	$S = C(1-d)^n = V_n$
$d =$ *tasa de depreciación anual fijada*	

Ejercicio 1

La bomba de alimentación de una gran empresa de agua purificada tiene un costo de $75,000.00. El contable le da una vida útil de 5 años y que se podrá vender como chatarra en $10,000.00. ¿Calcula la tasa de depreciación? Elaborar la tabla de depreciación correspondiente.

$$Calculamos\ la\ tasa\ de\ depreciación = S = C(1-d)^{n}$$

$$entonces: d = | - \left(\frac{S}{C}\right)^{\frac{1}{N}} = 1 - \left(\frac{10000}{75000}\right)^{\frac{1}{5}} = 0.33167;\ \ 33.167\%$$

El porcentaje obtenido se utiliza para hacer la tabla de depreciación por el método de porcentaje fijo.

Año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros	Tasa de depreciación
0	-------	-------	75,000.00	0.33167
1	24875.63	24875.63	50,124.38	0.33167
2	16625.00	41500.63	33,499.37	0.33167
3	11110.90	52611.53	22,388.47	0.33167
4	7425.70	60037.23	14,962.77	0.33167
5	4962.78	65000.00	10,000.00	

5.5 Método por unidad de producción o servicio

Como los activos pueden depreciarse de acuerdo a su vida útil, igual se puede depreciar en función de las unidades producidas o las horas de servicio de un equipo de producción, esto puede hacerse si se conoce la vida esperada del equipo en proceso. En este método puede suceder que la depreciación anual no sea la misma para todos los años, ya que la producción supuesta o las horas de servicio pueden variar de un año para otro.

Fórmula calcular la depreciación por el método de producción o servicio.

Base de la depreciación	$B = C - S$
$d = \frac{B}{n}$	n = horas de servicio

Ejercicio 1

Calcula la depreciación anual y elabora el cuadro correspondiente si en un horno que costo $6,500.00 tiene un valor de desecho de $2,000.00 y 6 años de vida útil, que da en la fabricación de barras de jabón fino las siguientes horas de servicio.

AÑO	HORAS
1	2350
2	2500
3	2100
4	2050
5	1900
6	1600
total	12500

$$B = C - S$$

$$d = \frac{B}{n}$$

Procedimiento

$$B = 6500 - 2000 = 4500$$

$$d = \frac{4500}{12500} = \$0.36$$

Para encontrar la depreciación anual multiplicamos este valor por el número de horas al año.

$$\text{año 1: } (2350)(0.36) = 846$$
$$\text{año 2: } (2500)(0.36) = 900$$
$$\text{año 6: } (1600)(0.36) = 576$$

Año	Producción anual	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0	---	--	--	6500
1	2350	846	846	5654
2	2500	900	1746	4754
3	2100	756	2502	3998
4	2050	738	3240	3260
5	1900	684	3924	2576
6	1600	576	4500	2000
total	12500	4500		

Ejercicio 2

Un zapatero estima que la máquina de pintar el zapato, la cual le costó $4 166.00 tiene una vida útil de 8000 horas distribuidas como sigue:

AÑO	HORAS
1	2000
2	2270
3	2100
4	1630
total	8000

Calcula la depreciación anual y elabora el cuadro de depreciación, considerando que el valor de rescate es nulo y que para remover la máquina se tiene que pagar $750.00.

$B = C - S$ $\qquad d = \frac{B}{n}$

Procedimiento

$B = 4166 - (-750) = 4916$ $\qquad d = \frac{4916}{8000} = \$0.6145$

$$año\ 1: (2000)(0.6145) = 1229$$
$$año\ 2: (2270)(0.6145) = 1394.91$$
$$año\ 4: (1630)(0.6145) = 1001.35$$

Año	Producción anual	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0	---	--	--	4166.00
1	2000	1229.00	1229.00	2937.00
2	2270	1394.91	2623.91	1542.08
3	2100	1290.45	3914.36	251.63
4	1630	1001.63	4916.00	-750.00

5.6. Método de fondo de amortización

En este método existen dos valores para la depreciación.

Depreciación anual	• La depreciación *anual* que es constante y que se supone se deposita en un fondo creado para reemplazar el activo al final de su vida útil.
Depreciación neta	• La depreciación *neta* que incluye los intereses y es variable, se acumula y se relaciona directamente con el valor en libros. En este sistema los intereses se calculan con base en la depreciación acumulada y no según el valor en libros.

Se supone que el valor futuro de los depósitos es igual al monto acumulado en el fondo para la reposición del activo y debe ser igual a su vez a la depreciación total o base de la depreciación.

Fórmulas para la depreciación por el método de fondo de amortización.

Monto que se debe acumular al cabo de n años

$$M = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

Depreciación

$$D_k = B\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right] = \frac{Bi}{(1+i)^k - 1}$$

Depreciación acumulada

$$A_k = D\left[\frac{(1+i)^k - 1}{i}\right]$$

M = B es el monto que se debe acumular al cabo de n años

Ejercicio 1

El Instituto México compró un equipo de video para la sala de profesores, con un costo de $40,000.00 y su administrador considera que tiene una vida útil de 5 años, pasado ese tiempo tendrá que desecharlo sin recuperar nada. La tasa de interés en el mercado es de 35%. Por el método de fondo de amortización: encuentra el valor de la aportación anual para el fondo; da el cargo anual por depreciación, y elabora una tabla de depreciación.

$$depreciación = D_k = B\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right] = \frac{40000(0.35)}{(1+0.35)^5 - 1} = 4{,}018.33$$

Año	Depósito anual	Intereses ganados	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0		---	--	--	40,000.00
1	4,018.33	0	4,018.33	4018.33	35,981.67
2	4,018.33	1,406.42	5,424.75	9443.08	30,556.92
3	4,018.33	3,305.08	7,323.41	16766.48	23,233.52
4	4,018.33	5,868.27	9,886.60	26653.08	13,364.92
5	4,018.33	9,328.58	13,346.91	39999.99	0.01
totales		19,908.34	39,999.99		

5.7. Depreciación en épocas inflacionarias

En los métodos antes utilizados los costos se mantienen constantes en el supuesto de que no existe inflación. Pero en tiempos inflacionarios, en los que los precios de todos los bienes y servicios se incrementan, un sistema de depreciación basada en el costo histórico se ve impedido para cumplir con los objetivos ya planteados, pues si la depreciación se mantiene sin actualizar, los precios no revelan los costos actuales y ni siquiera el fondo previsto permitiría el reemplazo de ese bien.

Un elemento que las empresas deben actualizar en forma diaria es la depreciación para efectos financieros, donde entra el concepto de *valor de reposición*, esto será el importe que se necesitará en el futuro para reponer un activo en servicio, en un momento determinado. En este cálculo influyen tres factores: la vida útil esperada del activo; la obsolescencia del activo, la inflación esperada.

Ejercicio 1

¿Cuál es el valor de reposición del equipo que adquiere el IMSS con valor de $40,000.00, con una vida útil de 5 años, si se cree que la inflación será del 25%?

Se calcula con la fórmula de interés compuesto:

$$\mathrm{M} = 40{,}000(1 + .25)^5 = 122{,}070.31\ .$$

Este es el valor esperado en 5 años

Ejercicio 2

Si el valor del equipo del ejercicio anterior disminuye 5% anual, ¿cuál será el valor de reposición esperado, *si la inflación anual será de 25%*?

$$Valor\ de\ reposición\ a\ precio\ constante = VRC = C(i)$$

$$VCR = 40000(0.95)^5 = 30{,}951.23$$

A este valor se le aplica la inflación esperada.

$$\mathrm{M} = 30951.23(1 + .25)^5 = 94455.66$$

Ejercicio 3

¿Cuál es el valor de reposición de un equipo de transporte que tiene un costo de $73,800.00, si la vida útil esperada es de 4 años, el valor del equipo disminuye 7% anual y la inflación anual esperada es 18%?

Primero obtenemos el valor de reposición constante:

$$\mathrm{VCR} = 73800(0.93)^4 = 55{,}206.23$$

A este valor se le aplica la inflación esperada:

$$\mathrm{M} = 55{,}206.23(1 + 0.18)^4 = 107{,}032.61$$

RESUMEN

En la unidad se definió el concepto de *depreciación* como la pérdida de valor de un activo a lo largo del tiempo; se vio la exigencia de registrar la depreciación de los activos en la contabilidad de la empresa, porque éstos tienen un vida útil y un valor en los libros contables, y por qué hay que sustituirlos por nuevos equipos o servicios.

Se vio que la depreciación básicamente *tiene dos objetivos*: determinar el costo real de los bienes o servicios que genera un activo, y establecer una reserva para reemplazarlo al final de su vida útil.

Se estudiaron los métodos más usados en las empresas, tales como: línea recta; porcentaje fijo; suma de dígitos; por unidad de producción o servicio; por el fondo de amortización. Asimismo, se consideraron los efectos de la inflación en los ejercicios de depreciación.

BIBLIOGRAFÍA

SUGERIDA

Autor	Capítulo	Páginas
Díaz y Aguilera (2008)	8. Amortización y fondos de amortización	403-427
Villalobos (1993)	8	538-540

Díaz Mata, Alfredo y Aguilera Gómez, Víctor (2008). *Matemáticas financieras* (4ª ed.). México: McGraw-Hill. [e-book disponible en REDUNAM, http://unam.libri.mx/libro.php?libroId=131

Villalobos, José L. (2009). *Matemáticas financieras* (3ª ed.). México: Pearson Educación. [e-book disponible en REDUNAM, http://unam.libri.mx/libro.php?libroId=512

Unidad 6

Aplicaciones bursátiles

OBJETIVO PARTICULAR

El alumno conocerá la aplicación de las matemáticas financieras en el ámbito bursátil.

TEMARIO DETALLADO

(8 Horas)

6. Aplicaciones bursátiles

6.1. Bolsa de valores e instrumentos bursátiles
6.2. Rendimiento de instrumentos bursátiles
6.3. Rendimiento de valores bursátiles que ofrecen rendimientos de capital
6.4. Rendimiento de valores bursátiles que pagan intereses

INTRODUCCIÓN

Es común que las empresas públicas o privadas necesiten de importantes capitales para financiar sus proyectos, por lo que les sería prácticamente imposible conseguirlos de un solo inversionista; pero con la emisión de títulos de crédito, conocidos como bonos u obligaciones y adquiridos por personas físicas o morales, que así se convierten en inversionistas o prestamistas del emisor, se financian las inversiones importantes.

Al conseguir un préstamo en esas condiciones, la empresa emisora se compromete a pagar a los inversionistas una cantidad fija y periódica por concepto de intereses, mediante los cupones adjuntos a los bonos y obligaciones. Asimismo, la emisora se obliga a reintegrarles el valor del título de crédito en la fecha de redención o vencimiento.

El mercado de valores representa una de las más importantes fuentes de financiamiento para las organizaciones, tanto del sector privado como del sector público; por otro lado, ofrece alternativas de inversión y ahorro, así como manejar el dinero sobrante de dichas organizaciones. En el ámbito empresarial, una actividad permanente es el análisis de la situación económica y financiera, de donde inferirá decisiones que contribuyan a mejorar su desempeño y, con ello, maximizar sus beneficios.

Los valores bursátiles son las fuentes de financiamiento del sector público y privado. Los mercados de valores están integrados por las instituciones financieras, que proporcionan el mecanismo para transferir o distribuir capitales de la masa de ahorradores hacia los demandantes.

Los mercados de valores están integrados por una serie de participantes que compran y venden acciones e instrumentos de crédito, con la finalidad de que los financistas cubran sus necesidades de capital y los inversionistas coloquen su exceso de capital en negocios redituables.

La Bolsa de Valores, reglamentada por la ley del Mercado de Valores, es la institución (mercado) en donde el piso de remates realiza transacciones de compraventa de valores de los documentos que formalizan las operaciones.

Bono

Es una obligación financiera contraída por el inversionista. De igual forma, podemos decir que bono es un certificado de deuda, es una promesa de pago futura documentada en un papel que determina el monto, plazo, moneda y secuencia de pagos. Existen varios tipos de bonos, según el propósito para el que fueron creados.

Las *obligaciones* son títulos-valor nominativos mediante los cuales se documenta un préstamo que una sociedad anónima (o sociedad nacional de crédito) obtiene de un conjunto de inversionistas. Existen dos tipos de obligaciones:

Obligaciones hipotecarias	• Cuando la garantía real de la empresa emisora recae sobre bienes inmuebles de la empresa.
Obligaciones quirografarias	• Garantizadas por el prestigio y solvencia del emisor.

El documento o título es redimible en una fecha preestablecida por el emisor, el cual, generalmente, viene acompañado por cupones, que son el instrumento con el que el emisor paga los intereses al inversionista. Se desprenden del título y se cobran en las fechas indicadas; se hacen efectivos en un banco o con un corredor de bolsa.

En algunos casos, los intereses se acumulan, se recapitalizan y se cobran hasta el final del plazo, junto con el valor de redención del documento. Un Bono del Ahorro Nacional es uno de ellos.

Los valores que intervienen en un bono o una obligación son:

El valor nominal o denominación es el consignado en el documento.

El valor de redención es el valor con que el emisor devuelve al tenedor del título la inversión y este valor puede ser:

I. Igual al valor nominal o de emisión, en cuyo caso se dice que se redime a la par.

II. Mayor que el valor nominal, en cuyo caso se dice que se redime con premio o con prima.

III. Menor que la denominación: se redime con descuento.

Las fechas del título son:

I. Fecha de emisión, cuando se emiten o colocan en el mercado de valores.

II. Fecha de redención o vencimiento, cuando el organismo emisor se compromete a reintegrar el capital prestado por los inversionistas.

III. Fecha de compraventa, es aquella en la que el documento es negociado o transferido a un tercero o también al organismo emisor.

La tasa de interés con la que el emisor paga al inversionista en periodos regulares, desde la emisión hasta la redención, es una tasa de interés simple, ya que los intereses se liquidan al final de cada periodo.

Las ganancias de capital se obtienen a través de una tasa capitalizable, es con la que el inversionista gana al comprar esta clase de títulos.

La *diferencia entre un bono y una obligación* es que el bono es emitido por el gobierno o alguna de sus dependencias. Las obligaciones son emitidas por empresas privadas.

6.1. Bolsa de valores e instrumentos bursátiles

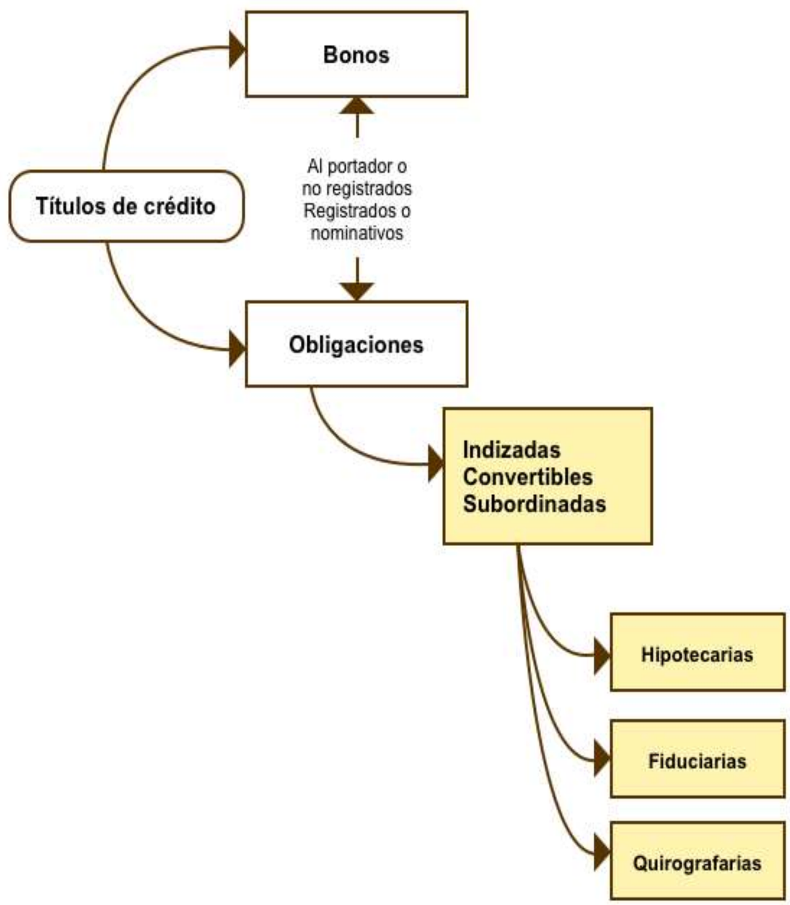
Los participantes en la operación de las bolsas son básicamente los demandantes de capital (empresas, organismos públicos o privados y otros entes), los oferentes de capital (ahorradores, inversionistas) y los intermediarios.

Bolsa de valores es una organización privada que brinda las facilidades para que sus miembros negocien la compra venta de acciones de sociedades o compañías anónimas, bonos públicos y privados, certificados, títulos de participación y una variedad de instrumentos de inversión, atendiendo los mandatos de sus clientes.

Las bolsas de valores fomentan el ahorro y la inversión a largo plazo, fortaleciendo el mercado de capitales e impulsando el desarrollo económico y social de los países donde funcionan. Los participantes en la operación de las bolsas son básicamente los demandantes de capital (empresas, organismos públicos o privados y otros entes), los oferentes de capital (ahorradores, inversionistas) y los intermediarios.

El bono es un título de crédito emitido por un gobierno a un plazo determinado y que gana intereses a pagar en intervalos de tiempo bien definidos. Por su parte, una obligación es un título de crédito emitido por una empresa, a un plazo determinado y con intereses a pagar en intervalos de tiempo bien definidos. Se utilizan para recabar dinero proveniente de inversionistas, con la obligación de pagarles un interés cada cierto periodo, además de reintegrarles el capital invertido al término del plazo estipulado.

Los bonos y obligaciones pueden ser registrados o nominativos, si tienen el nombre del propietario, o pueden ser al portador o no registrados cuando no lo tienen. Éstos son más comerciales y por tanto más fácilmente negociables.



El nombre de los bonos depende principalmente del propósito para el que fueron creados, mientras que las obligaciones se clasifican como: indizadas, convertibles o subordinadas; pero, principalmente, según el respaldo que tienen, como las hipotecarias (garantizadas mediante una hipoteca sobre los bienes propiedad de la emisora), fiduciarias (cuando están garantizadas con un fideicomiso) y quirografarias (si la garantía se fundamenta en el prestigio y solvencia del emisor).

El beneficio que obtiene un inversionista al comprar bonos y obligaciones depende básicamente de la tasa de interés nominal, que el organismo emisor determina y paga, y la tasa de rendimiento para las ganancias de capital, es decir, las utilidades que logra el inversionista.

Es evidente que el beneficio depende también de otros factores como el tiempo que falta para la redención del documento, la periodicidad del pago de intereses a través de los cupones y el valor de redención, entre otros.

Fórmula para determinar el precio de mercado de una obligación o bono antes de su redención, *incluyendo los cupones*:

$$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + M(1+i)^{-n}$$

Donde:

- C • Precio de mercado
- M • Valor de redención
- J • Tasa de rendimiento anual
- m • Número de capitalizaciones en un año
- i • Tasa de rendimiento por periodo: *i=J/M*
- n_a • Plazo en años, tiempo que hay entre la fecha de compraventa y la fecha de redención
- n • Plazo en periodos: $n = n_a \times m$

R = Valor de cada cupón

$$R = N\frac{r}{m}$$

N	Valor nominal de la obligación o bono
r	Tasa de interés anual determinada por la emisora.

Intereses = valor del título + valor de los cupones – la inversión

FIGURA 6.1. CICLO DE LAS OBLIGACIONES

6.2. Rendimiento de instrumentos bursátiles

Clasificación de las obligaciones:

Nominativas

Tienen el nombre del propietario.

Al portador

No poseen el nombre del propietario.

Según el tipo de garantía con que se respaldan:

- **Fiduciaria.** Garantía constituida en un fideicomiso.
- **Hipotecaria.** Avalada con hipoteca sobre bienes propiedad del emisor.
- **Prendaria.** Garantizada por diversos bienes.
- **Quirografaria.** Garantía que otorga el emisor, por su buena reputación, en cuanto a su cumplimiento con obligaciones contraídas.

Por su manera de generar el interés (i)

Cupones: generalmente tienen impresa la fecha de vencimiento en la cual se deberán pagar los intereses.

Algunas obligaciones no presentan cupones, ya que los intereses generados son capitalizables y se pagan al vencimiento del documento.

Se pueden encontrar otras obligaciones o bonos que no pagan intereses en ninguna ocasión. Este tipo de documentos se venden en un valor menor al nominal, es decir, con descuento (se les llama obligación o bonos de cupón cero).

Ejemplo 1

Una empresa emite obligaciones por $100.00 cada una, con un vencimiento a la par dentro de 6 años, y con pagos de interés mensual de 12% anual. Si una persona compra una de las obligaciones, ¿cuál será el importe de cada uno de los pagos a que tiene derecho? ¿Cuál será el interés total que recibirá? ¿Qué cantidad recibirá en total al finalizar el plazo?

$I = Cit$	
Datos	C = \$100.00 i = 12% anual capitalizable mensualmente = 0.12/12 = 0.01 mensual = 1% mensual t = 6 años = 72 meses I = ? cada mes = ? total M = ?
Procedimiento	$I = 100(0.01)(1) = 1 = \$1.00\ cada\ mes$ $I = 100(0.01)(72) = 72$ $= \$72.00\ en\ el\ total\ del\ plazo$ $M = 100 + 72 = 172 = \$172.00$

Interpretación: Como no se capitalizan los intereses, se emplea la fórmula de interés simple para encontrar el valor de redención.

El interés total que se recibirá es de $72 en 6 años.

La cantidad total que recibirá es el valor nominal del documento más los intereses es de $172.00

Ejemplo 2

¿Cuál es el valor de compraventa de una obligación emitida por TELCEL con valor nominal de $100.00, emitida a la par y colocada en el mercado de valores con interés de 40% pagadero semestralmente? Suponer que se transfiere tres años antes de su redención y que se pretende un beneficio de 30%, capitalizable por semestres para su comprador. ¿Cuál es la utilidad?

$R = N\frac{r}{n}$	
Datos	*Valor nominal* = 100 I = 40% con capitalización semestral Tasa de rendimiento = 30% capitalizable semestralmente.
Procedimiento	Valor de cupón $R = 100\left(\frac{0.4}{2}\right) = \$20$ $C = 100\left(1+\frac{0.3}{2}\right)^{-6} + 20\left(\frac{1-(1.15)^{-6}}{0.15}\right) = \$118.92$ $Intereses = valor\ del\ título + valor\ de\ los\ cupones - la\ inversión$ $I = 100 + 6(20) - 118.92 = 101.08$

Interpretación: La tasa de interés nominal se divide entre dos porque el año tiene dos semestres. Como se transfiere 3 años antes de su redención: *np*=3 años por dos semestres=6.

Aplicando la fórmula para calcular el valor del cupón obtenemos 20.

Con la fórmula general, obtenemos el valor presente de la obligación, pero la tasa de interés de rendimiento es de 30% dividida entre dos que son los semestres que tiene el año.

Ejemplo 3. ¿Qué cantidad se paga por una obligación cuyo valor nominal es de $10,000.00 y se redime en 12% menos de su valor nominal (bajo la par o con descuento)?

Datos

$M = \$10{,}000.00$
$d = 12\% = 0.12$
$C = ?$

$$D = 10000(0.12)(1) = 1200 = \$1{,}200.00$$

$$C = 10000 - 1200 = 8800 = \$8{,}800.00$$

Interpretación
La tasa de interés es simple y nos pide el problema el valor presente que es con descuento porque se redime con valor menor al nominal

Ejercicio 4

El gerente de INVERSA desea obtener para su empresa 18% de interés capitalizable cada mes de una inversión en bonos. ¿Cuánto deberá pagar hoy por un bono cuyo valor nominal es de $500.00, paga intereses mensuales de 15% con capitalización mensual y su redención será a la par dentro de 5 años?

	$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + M(1+i)^{-n}$
Procedimiento	$I = R = (500)\left(\frac{.15}{12}\right) = 6.25$ $C = 6.25\left[\frac{1-\left(1+\frac{.18}{12}\right)^{-60}}{0.015}\right] + 500(1+0.015)^{-60} = 450.77$ $I = 500 + (6.25)(60) - 450.77 = 424.22$

Interpretación: Al comprar la obligación, el gerente INVERSA adquiere el derecho de recibir el pago mensual de los intereses y el valor de redención en la fecha de vencimiento.

El pago que recibirá INVERSA por concepto de intereses mensuales es el valor de redención que recibirá en 5 años, es 500 porque es a la par.

Como el gerente desea obtener un rendimiento de 18.% capitalizable cada mes, el precio a pagar por la obligación se obtiene calculando el valor presente de los intereses mensuales, los cuales forman una anualidad vencida más el valor presente del valor de vencimiento, ambos calculados a la tasa de 18% capitalizable cada mes.

El precio que deberá pagar por cada bono es de 450.77

El interés total ganado por el comprador en cada bono es: 424.22

Ejercicio 5

Una compañía emite bonos con valor de $100.00 cada uno, redimibles a la par a un plazo de 5 años. La tasa de interés ofrecida es de 30% pagadera cada trimestre. ¿Qué precio se debe pagar por cada bono si se adquieren un año antes del vencimiento y se desea un rendimiento de 27.74% capitalizable cada mes?

$$i_r = 27.74\ cap. cada\ mes = 28.38\ cap\ trim. i = 0.07095$$

$$R = 100\left(\frac{0.3}{12}\right)(3) = 7.5$$

$$C = 7.5\left[\frac{1-(1+.07095)^{-60}}{0.07095}\right] + 100(1+.07095)^{-60} = 105.61$$

Antes de calcular el valor presente del bono, es necesario obtener la tasa equivalente capitalizable trimestralmente de la tasa de rendimiento deseada.

Encontramos el interés trimestral de cada cupón. Ahora ya podemos encontrar el valor de compra del bono con la fórmula de anualidades de valor presente.

6.3. Rendimiento de valores bursátiles que ofrecen rendimientos de capital

Prima
Cantidad extra de dinero que se da a alguien a modo de recompensa, estímulo o agradecimiento.

Cuando el valor de compraventa resulta mayor que el de redención, se dice que se compra con prima o con premio, aun cuando el valor de compraventa incluya el valor de los cupones. Esta comparación se hace con el valor de redención, no con el nominal o de emisión.

Cuando se compra un instrumento de esta naturaleza emitido a la par, el hecho de que sea con premio dependerá de la relación que haya entre las tasas de interés y de rendimiento.

Los rendimientos serán mayores que los que de la tasa de interés nominal. La magnitud de la prima dependerá de la diferencia que exista entre las dos tasas.

Datos que contienen:

a) *Fecha de emisión*.	Fecha cuando se colocan o emiten los documentos.	
b) *Valor nominal*.	Cantidad marcada en el documento. Representa el importe de dinero que da el inversionista al emisor, salvo que el título de crédito esté colocado con descuento.	
c) *Valor de vencimiento o redención*:	*A la par*.	Cantidad que el emisor pagará al concluir el plazo pactado (es igual al valor nominal). Es decir, el documento pagará intereses al vencimiento de cada uno de los cupones que tuviera; por tanto, se paga sólo lo que el inversionista aportó al inicio.
	Con premio o sobre la par.	El valor de redención es mayor que el valor nominal y ocurre cuando los intereses se capitalizan en cada cierto intervalo, pagándose al final del plazo establecido.
	Con descuento o bajo la par.	El valor de redención es menor que el nominal y sucede cuando los documentos se pagan, al inicio del plazo, por un valor menor, es decir, con descuento.

d) *Fecha de vencimiento o redención*.	Es la fecha en la cual se debe pagar el título (está estipulada en el mismo documento). Cuando se tiene una cláusula de redención anticipada, se indica que el documento se puede redimir antes de su vencimiento.	
e) *Tasa de interés nominal*.	Es la tasa utilizada para pagar los intereses del documento. Puede ser:	*Fija*. No tiene variación a pesar de las condiciones del mercado.
		Variable. La tasa se ajusta periódicamente de acuerdo con las condiciones del mercado, atándose a una tasa de referencia (CETES o TIIE).
		Real. Sucede cuando el valor nominal se actualiza según la inflación y, sobre ese nuevo valor, se calculan los intereses pactados en los cupones. Se utiliza para que el inversionista esté protegido ante la inflación.

Ejercicio 1

Una empresa emite obligaciones por \$100.00 cada una, con un vencimiento a la par dentro de 6 años y con pagos de interés mensual de 12% anual. Si una persona compra una de las obligaciones:

a) ¿Cuál será el importe de cada uno de los pagos a que tiene derecho?
b) ¿Cuál será el interés total que recibirá?
c) ¿Qué cantidad recibirá en total al finalizar el plazo?

$I = Cin$ $M = C + I$ $i = \frac{J}{m}$ $n = n_a \times m$	
Datos	$C = 100.00$ $J = 0.12$ $m = 12$ $n_a = 6$
Procedimiento	$i = \frac{0.12}{12} = 0.01 \quad n = 6{\times}12 = 72$ $I = 100{\times}0.01{\times}72 = 72$ $M = 100 + 72 = 172.00$ a) Cada uno de los pagos será de \$1.00 b) Recibirá en total de intereses \$72.00 c) El pago total será de \$172.00

Ejercicio 2

Cierta persona adquiere bonos con un valor nominal de \$1,000.00, cuya redención es de 15% sobre el valor nominal (sobre la par o con premio), ¿cuál es el valor de redención en un año?

$M = C\,(1 + in)$	
Datos	$C = 1{,}000$ $i = 0.15$ $n = 1$
Procedimiento	$M = 1{,}000(1 + 0.15{\times}1) = 1{,}150.00$

Ejercicio 3

¿Qué cantidad se paga por una obligación cuyo valor nominal es de \$10,000.00 y se redime en 12% menos de su valor nominal (bajo la par o con descuento)?

$C = M\,(1 - dn)$	
Datos	$C = 10{,}000$ $d = 0.12$ $n = 1$
Procedimiento	$C = 10{,}000(1 - 0.12{\times}1) = 8{,}800.00$

Ejercicio 4

Una empresa emitió bonos de $100.00 que vencen a la par dentro de 19 trimestres, con intereses de 21% anual pagaderos cada trimestre. ¿Cuánto deberá pagarse por cada bono el día de hoy si se pretenden rendimientos de 30% anual compuesto por trimestres?

	$C = M(1+i)^{-n} + R\left[\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$
Datos	$M = 100$ $i = 0.30$ $m = 4$ $r = 0.21$ $n = 19$ $R = N\dfrac{r}{m}$
Procedimiento	$R = 100\dfrac{0.21}{4} = 5.25$ $C = 100(1+0.075)^{-19} + 5.25\dfrac{1-(1+0.075)^{-19}}{0.075} = 77.59$

Ejercicio 5

Una obligación emitida por SUMESA con valor nominal de $20,000.00, que se redimió el 2 de enero de este año con intereses de 46.4% pagaderos en cupones, que han vencido el dos de enero y el dos de julio de cada año, se transfirieron el segundo día de 2014 a un comprador que pretende un rendimiento de 60% con capitalización semestral.

a) Encuentra el valor de compraventa

b) Cuál fue el descuento para el comprador.

	$C = R\left[\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + M(1+i)^{-n}$
Datos	$M = 20{,}000$ $n = 3$ años entre la transacción y la redención $p = 2$ tiene dos meses al año $r = 0.60$ $i = 0.464$
Procedimiento	Se calcula primero R el valor de cada cupón y obtenemos: $R = 20{,}000\left[\dfrac{0.464}{2}\right] = \$4{,}640$ a) *Entonces el valor de compraventa es:* $C = 4{,}640\left[\dfrac{1-(1+0.30)^{-6}}{0.30}\right] + 20{,}000\left[1+\dfrac{0.6}{2}\right]^{-6} = \$16{,}405.86$ El descuento es la diferencia entre el valor de redención menos el valor de compraventa. b) *El descuento para el comprador es:* $d = M - C = 20{,}000 - 16{,}405.86 = 3{,}594.14$

Ejercicio 6

El gobierno federal coloca bonos con valor nominal de $15.00, redimibles a 120% en un plazo de 8 años, los intereses se pagan a razón de 34% mediante cupones cuatrimestrales.

a) ¿Cuál es el precio que deberá pagarse por cada obligación cinco años después de su emisión, si se pretende un rendimiento de 45% capitalizable cuatrimestralmente?
b) Calcula los intereses que gana el inversionista.
c) Calcula el descuento que recibe el inversionista.

$$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + M(1+i)^{-n}$$

Datos	M = \$18.00 n = 3	M = 15(1.2) = \$18.00 p = 3	r = 0.45 $i = \frac{0.34}{3}$

El valor de cada cupón o R es $1.70. Recuerda que el valor de los intereses de cada cupón se calcula en base al valor nominal.

Ahora podemos calcular el valor de compraventa:

a) $$C = 18\left(1+\frac{0.45}{3}\right)^{-9} + 1.7\left(\frac{1-\left[1+\frac{0.45}{3}\right]^{-9}}{\frac{0.45}{3}}\right) = 13.22$$

y es de 13.22 pesos.

b) **18+9(1.7)-13.22=$20.07**

Descuento = **18-13.22=$4.77**

Los intereses son el valor de redención más el número de cupones por el valor del descuento R menos el valor de compraventa.

6.4. Rendimiento de valores bursátiles que pagan intereses

Ejercicio 1

BONASA coloca en el mercado de valores una serie de obligaciones de $200.00 cada una, redimibles a la par en un plazo de 8 años con cupones que vencen bimestralmente. Cuatro años y medio antes de la redención, un inversionista adquiere medio centenar de dichas obligaciones con un costo total de $12,000.00.

a) Cuál es la tasa de interés que la empresa aceitera ofrece en sus obligaciones, suponiendo que el inversionista obtendrá beneficios de 27% capitalizable por bimestre?
b) ¿Cuál es el premio del inversionista?
c) ¿Cuánto obtiene de intereses?

$C = M(1+i)^{-n} + R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$	$R = M\left(\frac{i}{p}\right)$
Datos	$M = 200$ $p = 6$; porque el año tiene 6 bimestres $n = 4.5$ años, el plazo entre la compraventa y el vencimiento de los documentos $np = (4.5)(6) = 27$ número de cupones que faltan por cobrar al momento de la compraventa $c = 240$ porque el valor de cada título es de = 12,000 / 50 $r = 0.27 / 6 = 0.045$

a)

$$240 = 200(01 + 0.045)^{-27} + R\left[\frac{1-(1.045)^{-27}}{0.045}\right]$$

$$240 = 60.9382 + R(15.4513)$$

$$R = \frac{240 - 60.9382}{15.4513} = 11.58$$

$$R = M\left(\frac{i}{p}\right)$$

$$i = \frac{Rp}{M} = \frac{(11.58)(6)}{200} = 0.3476$$

$$i = 34.76\%$$

Primero debemos calcular R, el valor de los cupones, ya que con ella se calcula el valor de la tasa de interés R=11.58.

Después ya podemos calcular la tasa nominal

Y obtenemos una tasa de interés de 34.76% significa que las obligaciones se colocaron en el mercado con esa tasa de interés simple anual pagadera en bimestres.

Para resolver el inciso b) el premio es el valor de compra venta menos el valor de redención el premio de cada una de las acciones es de $40

b)

$$C - M = 240 - 200 = \$40$$

Los intereses son la diferencia de lo que recibirá menos lo que invierte el comprador.

c)

$$I = 200 + 27(11.58) - 240 = \$272.66$$

$$I_{50} = 50(272.89) = 13{,}644.50$$

Ejercicio 2

El gobierno federal coloca bonos con valor nominal de $15.00, redimibles a 120% en un plazo de 8 años, los intereses se pagan a razón de 34% mediante cupones cuatrimestrales.

a) ¿Cuál es el precio que deberá pagarse por cada obligación cinco años después de su emisión, si se pretende un rendimiento de 45% capitalizable cuatrimestralmente? Serán 3 años antes de su vencimiento.
b) Calcula los intereses que gana el inversionista.
c) Calcula el descuento que recibe el inversionista.

$$C = M(1+i)^{-n} + R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$d = M - C$$

Datos	$M = \$18.00$ $\quad M = 15(1.2) = \$18.00$ $r = 0.45$ $i = 0.34/3$ $p = 3$ $n = 3$ $R = 15\left(\frac{0.34}{3}\right) = \$1.7$

Procedimiento	El valor de cada cupón o *R* es $1.70. Recuerda que el valor de los intereses de cada cupón se calcula en base al valor nominal. Ahora podemos calcular el valor de compraventa: a) $C = 18\left(1+\frac{0.45}{3}\right)^{-9} + 1.7\left(\frac{1-\left[1+\frac{0.45}{3}\right]^{-9}}{\frac{0.45}{3}}\right) = 13.22$ y es de 13.33 pesos. b) $Intereses = 18 + 9(1.7) - 13.22 = \$20.07$ c) $Descuento = 18 - 13.22 = \$4.77$ Los intereses son el valor de redención más el número de cupones por el valor del descuento *R* menos el valor de compraventa.

RESUMEN

En esta unidad se han estudiado las características principales de los bonos y obligaciones y su comportamiento en el mercado de valores y financiero. Sin embargo, es importante señalar que este mercado está conformado por el mercado de dinero y el mercado de capitales.

Mercado de dinero	En el mercado de dinero se emiten y comercializan instrumentos de crédito de corto plazo, alta liquidez y bajo riesgo, por lo que, en general, las tasas de rendimiento que ofrecen son relativamente más bajas que otras opciones de inversión; los más usuales son los valores de renta fija, cuyos rendimientos y beneficios se conocen de antemano.
Mercado de capitales	El mercado de capitales se emiten y negocian valores de mediano y largo plazos, baja liquidez y riesgo alto. Pueden ser de renta fija o variable. Entre los principales instrumentos del mercado financiero podemos mencionar los Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES), el pagaré bancario, las aceptaciones bancarias, los ajustabonos o bonos ajustables del gobierno federal, los bonos de desarrollo del gobierno federal (BONDES), los bonos de la tesorería de la federación (tesobonos), el papel comercial, los bonos bancarios, los certificados de participación en plata (ceplatas), los petrobonos, los udibonos, etcétera.

Como seguramente se ha podido observar y apreciar en los temas tratados en esta presentación, el campo financiero nos ofrece múltiples y muy variadas opciones de conocimiento, cuyas aplicaciones son verdaderamente útiles tanto en la vida personal y familiar como en el desarrollo profesional.

En el campo de los negocios nacionales y mundiales, toma especial importancia la comprensión, contenido e interpretación de los diversos conceptos que se encuentran en la matemática financiera y que se aplican cotidianamente en una enorme gama de operaciones financieras, crediticias, de inversión y en múltiples transacciones de tipo comercial.

Por lo anterior, cobra especial importancia lograr un conocimiento pleno de los conceptos fundamentales matemático-financieros por parte de los alumnos. Te invitamos y exhortamos a profundizar en ellos para que, con tu práctica profesional, puedas contribuir con plenitud al bienestar de la sociedad en que vivimos.

BIBLIOGRAFÍA

SUGERIDA

Autor	Capítulo	Páginas
Díaz y Aguilera (2008)	9. Inversión en bolsa de valores	354-359
Villalobos (1993)	8.	538-540

Díaz Mata, Alfredo y Aguilera Gómez, Víctor (2008). *Matemáticas financieras* (4ª ed.). México: McGraw-Hill. [e-book disponible en REDUNAM, http://unam.libri.mx/libro.php?libroId=131

Villalobos, José Luis (1993). “Interés simple” en *Matemáticas Financieras*. México: Iberoamérica.

BIBLIOGRAFÍA GENERAL

SUGERIDA

Hernández Hernández, Abraham (1996). *Matemáticas Financieras*. (3ª ed.). México: ECAFSA.

BÁSICA

Cantú Treviño, Jesús (2008). *Matemáticas financieras* (4ª ed.). México: Limusa.

Díaz Mata, Alfredo y Aguilera Gómez, Víctor (2008). *Matemáticas financieras* (4ª ed.). México: McGraw-Hill. [e-book disponible en REDUNAM, http://unam.libri.mx/libro.php?libroId=131

Mora Zambrano, Armando (2009). *Matemáticas financieras* (3ª ed.). México: Alfaomega.

Vidaurri Aguirre, Héctor (2008). *Matemáticas financieras* (4ª ed.). México: Cengage Learning. [e-book disponible en REDUNAM, http://unam.libri.mx/libro.php?libroId=512

Villalobos, José L. (2009). *Matemáticas financieras* (3ª ed.). México: Pearson Educación.

COMPLEMENTARIA

Álvarez A. Alberto (2005). *Matemáticas financieras* (3ª ed.). México: McGraw¬Hill, 488 pp.

García, Jaime. (2008). *Matemáticas financieras con ecuaciones de diferencial finita*.(5ª ed.). México: Pearson Educación. [e-book disponible en REDUNAM, http://unam.libri.mx/libro.php?libroId=34

Toledano Castillo, M. A. y L. E. Hummelstine (2003). *Matemáticas financieras*. México: CECSA, 269 pp.

ELECTRÓNICA

LIBROS			
FUENTE	CAPÍTULO (S)	SOPORTA	LIGA
Budnick, Frank S. (2007). *Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales*[recurso electrónico]. (4a ed.). México: McGraw-Hill.	8	Unidades 1, 2 y 3	http://unam.libri.mx/libro.php?libroId=129
García, Jaime A. (2008). *Matemáticas financieras con ecuaciones de diferencia finita* (5a ed.). México: Pearson.	3 4 6	Unidades 1 y 2 Unidad 3 Unidad 4	http://unam.libri.mx/libro.php?libroId=130#
Díaz Mata, Alfredo y Víctor Manuel Aguilera Gómez (2008c). *Matemáticas financieras* (4a ed.). México:	2 3 4, 5, 6, y 7 8 10	Unidad 1 Unidad 2 Unidad 3 Unidad 4 Unidad 5	http://unam.libri.mx/libro.php?libroId=131#

McGraw-Hill Interamericana.	9	Unidad 6	
Haeussler, Ernest F.(2009). *Matemáticas para administración y economía*. (12a ed.). México: Pearson.	5	Unidades 1, 2, 3 y 4	http://unam.libri.mx/libro.php?libroId=5#
Mora Zambrano, Armando (2009). *Matemáticas financieras* (3a. Ed.). México, D. F.: Alfaomega.	2 5 6 7 8	Unidad 1 Unidad 2 Unidad 3 Unidad 4 Unidad 6	http://www.bibliotechnia.com/bibliotechnia20/?aaa=cb60c4f101e104f51755ff17f499ac73&option=com_libros&task=preview&id=6563&Itemid=5
Vidaurri Aguirre, Héctor Manuel (2008c). *Matemáticas financieras* (4a ed.). México, D.F.: Cengage Learning.	4 5 6 7 10	Unidad 1 Unidad 2 Unidad 3 Unidad 4 Unidad 5	http://unam.libri.mx/libro.php?libroId=512#
Villalobos, José Luis (2007, 2009). *Matemáticas financieras* (3ª ed.). México: Pearson Educación.	3 4 5 6 10	Unidad 1 Unidad 2 Unidad 3 Unidad 4 Unidad 5	http://www.bibliotechnia.com/bibliotechnia20/index.php?Itemid=6&option=com_libros&task=read&id=2528&bookmark=4

Facultad de Contaduría y Administración
Sistema Universidad Abierta y Educación a Distancia