Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Contaduría y Administración
Sistema Universidad Abierta y Educación a Distancia

Licenciatura en Administración

Razonamiento Lógico Matemático para la Toma de Decisiones

Apunte electrónico

SUAyED

COLABORADORES

DIRECTOR DE LA FCA
Dr. Juan Alberto Adam Siade

SECRETARIO GENERAL
L.C. y E.F. Leonel Sebastián Chavarría

– – – –

COORDINACIÓN GENERAL
Mtra. Gabriela Montero Montiel
Jefe de la División SUAyED-FCA-UNAM

COORDINACIÓN ACADÉMICA
Mtro. Francisco Hernández Mendoza
FCA-UNAM

– – –

AUTOR
M. I. O. Norma Elvira Peralta Márquez

DISEÑO INSTRUCCIONAL
Lic. Guadalupe Montserrat Vázquez Carmona

CORRECCIÓN DE ESTILO
Mtro. Carlos Rodolfo Rodríguez de Alba

DISEÑO DE PORTADAS
L.CG. Ricardo Alberto Báez Caballero
Mtra. Marlene Olga Ramírez Chavero
L.DP. Ethel Alejandra Butrón Gutiérrez

DISEÑO EDITORIAL
Mtra. Marlene Olga Ramírez Chavero

OBJETIVO GENERAL

Al finalizar el curso, el estudiante dominará los fundamentos matemáticos a fin de desarrollar habilidades de razonamiento lógico-matemático que le permitan analizar situaciones hipotéticas y de la vida real para la resolución de problemas. Asimismo, será capaz de acreditar evaluaciones de razonamiento matemático y habilidades cuantitativas.

TEMARIO DETALLADO

(Horas 64)

1. Fundamentos para el análisis matemático	20
2. Introducción a las evaluaciones de habilidades cuantitativas	4
3. Solución de problemas y suficiencia de datos	12
4. Álgebra y tópicos especiales de matemáticas	16
5. Métodos cuantitativos aplicados a los negocios y la toma de decisiones	12

INTRODUCCIÓN

En el mundo, la mayoría de las universidades prestigiadas oferentes de posgrados en el área de negocios utilizan como herramienta de selección de sus alumnos el GMAT, *Graduate Manegement Admission Test*, que es un examen estandarizado que evalúa el razonamiento numérico y verbal de los aspirantes, está elaborado de manera tal que puede determinar las capacidades del alumno, no sus conocimientos. Se presenta por completo en inglés.

El GMAT consta de tres grandes rubros: Redacción analítica, Sección cuantitativa y Sección verbal. En la Sección cuantitativa se manejan dos tipos de problemas: *Problem solving* (solución de problemas) y los *Data Sufficiency* (suficiencia de datos) que presentan un razonamiento totalmente nuevo para el estudiante.

En la Facultad de Contaduría y Administración, dentro de sus planes de estudio 2012, se consideró y aprobó la inclusión de una asignatura que permitiera al alumno reforzar los conocimientos cuantitativos adquiridos hasta su ingreso a la facultad e introducir el razonamiento lógico matemático que se requiere para presentar dicho examen de admisión, que también ya se está aplicando por algunas empresas para contratar a su personal.

El material que se presenta a continuación tiene por objeto enseñar a los alumnos un nuevo tipo de razonamiento lógico matemático que les facilite la presentación del GMAT o, incluso, un nuevo enfoque en la resolución de problemas de tipo cuantitativo; finalmente, se mostrará una pequeña proporción de la teoría y algoritmos matemáticos fundamentales en la toma de decisiones.

Cabe destacar que gran parte del material aquí presentado, se basa en el libro de texto: *Razonamiento lógico matemático para la toma de decisiones* (2015), elaborado por la Mtra. Norma Elvira Peralta Márquez, editado por UNAM-Facultad de Contaduría y Administración.

ESTRUCTURA CONCEPTUAL

Los temas aquí abordados están en el orden que marca el plan de estudios 2012, sin embargo, se recomienda para el estudiante el orden siguiente:

RAZONAMIENTO LÓGICO MATEMÁTICO PARA LA TOMA DE DECISIONES	
Orden del Plan 2012	**Orden propuesto para estudio**
1.Fundamentos para el análisis matemático	1.Fundamentos para el análisis matemático
2.Introducción a las evaluaciones de habilidades cuantitativas	4.Álgebra y tópicos especiales de matemáticas
3.Solución de problemas y suficiencia de datos	2.Introducción a las evaluaciones de habilidades cuantitativas
4.Álgebra y tópicos especiales de matemáticas	3.Solución de problemas y suficiencia de datos
5.Métodos cuantitativos aplicados a los negocios y la toma de decisiones	5.Métodos cuantitativos aplicados a los negocios y la toma de decisiones

Unidad 1.

Fundamentos para el análisis matemático

OBJETIVO PARTICULAR

Al término de esta unidad, el alumno identificará los fundamentos de aritmética, álgebra y geometría.

TEMARIO DETALLADO

(20 horas)

1. Fundamentos para el análisis matemático

- 1.1. Principios del análisis aritmético
  - 1.1.1. Resolución de ejercicios *Problem Solving* y *Data Sufficiency* con:
    - 1.1.1.1.Propiedades de los números
    - 1.1.1.2.Fracciones y decimales
    - 1.1.1.3. Escalas y proporciones
    - 1.1.1.4. Exponentes y radicales
- 1.2 Principios del análisis algebraico
  - 1.2.1 Resolución de ejercicios *Problem Solving* y *Data Sufficiency* con:
    - 1.2.1.1. Simplificación algebraica, polinomios y factorización
    - 1.2.1.2. Ecuaciones lineales, inecuaciones, sistemas de ecuaciones y ecuaciones cuadráticas
- 1.3 Principios del análisis geométrico
  - 1.3.1 Resolución de ejercicios *Problem Solving* y *Data Sufficiency* con:
    - 1.3.1.1. Líneas, ángulos, áreas y perímetros
    - 1.3.1.2. Triángulos, polígonos y circunferencias

INTRODUCCIÓN

Aún no se cuenta con un documento base real de quién fue el primero en descubrir las matemáticas, no obstante, se encuentran muchas exposiciones generales del origen de las matemáticas en Egipto.

Según Aristóteles, las matemáticas se originaron porque la clase sacerdotal de Egipto tenía el tiempo necesario para dedicarse a su estudio.

La palabra *aritmética* está definida por la Real Academia de la Lengua como “parte de las matemáticas que estudia los números y las operaciones hechas con ellos”.

La palabra *geometría* se deriva de las palabras griegas *geo*, que significa “tierra” y *metron*, que significa medir. Los antiguos egipcios y babilonios (4000-3000 a. C.) pudieron desarrollar una serie de reglas prácticas para medir figuras geométricas sencillas y para determinar sus propiedades. El conocimiento de la geometría pasó a Grecia desde Egipto y Babilonia. Los griegos legaron algunos de los más grandes descubrimientos para el avance de las matemáticas.

Entre los griegos más prominentes que contribuyeron al progreso matemático estaban Tales de Mileto (640-546 a. C.), Pitágoras, discípulo de Tales (¿580?-500 a. C.), Platón (429-348 a. C.), Arquímedes (287-212 a. C.) y Euclides (alrededor de 300 a. C.).

La Real Academia de la Lengua define el *álgebra* como: “Parte de las matemáticas en la cual las operaciones aritméticas son generalizadas, empleando números, letras y signos. Cada letra o signo representa simbólicamente un número u otra entidad matemática. Cuando alguno de los signos representa un valor desconocido se le llama incógnita”.

La historia del álgebra tiene sus orígenes en el año 2000 a. C. en Mesopotamia y Babilonia, puesto que su base es justamente la aritmética, más o menos en la misma época, los egipcios desarrollan un álgebra elemental para resolver problemas cotidianos; por su parte, los griegos en los siglos I, II y III d. C., hicieron grandes publicaciones acerca de la aritmética y la geometría.

En el año 1202 Leonardo Pisa, matemático italiano, mejor conocido como Fibonacci difundió en Europa el sistema de numeración arábiga y publicó el *Liber Abaci* (*Tratado del Ábaco*); en los siglos XV y XVI otros notables matemáticos europeos hacen contribuciones importantes en el área.

En el año 1637 René Descartes, matemático francés, fusionó la geometría y el álgebra inventando la geometría analítica. En 1750 Gabriel Cramer, matemático suizo, introduce la regla de Cramer en el álgebra lineal para dar solución a los sistemas de ecuaciones lineales.

1.1. Principios del análisis aritmético

Para iniciar el aprendizaje de la aritmética, es preciso definir los conceptos elementales para la comprensión del tema.

Antes que nada, es necesario precisar que un *conjunto* es la colección de objetos denominados elementos. A los conjuntos se les denota con letras mayúsculas A, B, C, etc. y a sus elementos con letras minúsculas x, y, z, etc.

Dos conjuntos son iguales, si y solo si tienen los mismos elementos. Para denotar que un elemento forma parte de un conjunto o no, se utilizará cualquiera de las siguientes expresiones con su respectiva notación:

$$\boldsymbol{x \in A}\begin{cases} \boldsymbol{x\ pertenece\ al\ conjunto\ A} \\ \boldsymbol{x\ es\ elemento\ de\ A} \\ \boldsymbol{x\ est\text{á}\ en\ A} \end{cases} \qquad \boldsymbol{x \notin A}\begin{cases} \boldsymbol{x\ no\ pertenece\ al\ conjunto\ A} \\ \boldsymbol{x\ no\ es\ elemento\ de\ A} \\ \boldsymbol{x\ no\ est\text{á}\ en\ A} \end{cases}$$

Se dice que el conjunto A está contenido en B, o que el conjunto A es subconjunto de B, si y solo si cada elemento de A es elemento de B y se denota $\boldsymbol{A \subseteq B}$.

Se dice que un conjunto A no está contenido en B o que un conjunto A no es subconjunto de B, si y solo si existe un elemento de A que no pertenece a B y se denota $\boldsymbol{A \nsubseteq B}$.

Existen dos maneras de describir un conjunto:

- **Por extensión**, cuando se enumeran los elementos del conjunto.

- **Por comprensión**, cuando a la totalidad de los elementos se les describe a través de una fórmula o característica.

EJEMPLOS

Por extensión:

1. El conjunto A de todas las letras que conforman la palabra "Archivología".

$$\boldsymbol{A = \{a, r, c, h, i, v, o, l, g\}}$$

   Note usted que se están omitiendo las letras que se repiten, la razón es porque resulta redundante.

2. El conjunto B de los meses del año cuyo nombre inicia con la letra m.

$$\boldsymbol{B = \{marzo, mayo\}}$$

Por comprensión:

1. El conjunto A que se comprende de todos los meses del año.

$$\boldsymbol{A = \{x | x \text{ es un mes del año}\}}$$

2. El conjunto B de las soluciones de una ecuación de 2° grado.

$$\boldsymbol{B = \{x | -2x^2 + 5x + 3 = 0\}}$$

Al conjunto que contiene la totalidad de elementos en un problema, se le denomina Conjunto Universal y se denota U.

Al conjunto que no contiene elementos, se le denomina Conjunto Vacío y se denota Ø.

1.1.1 Resolución de ejercicios con:

a) Propiedades de los números

A continuación se presentan los conjuntos numéricos más importantes dentro de las matemáticas:

1. Los números naturales N.

$$\boldsymbol{N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}}$$

2. Los números enteros Z.

$$\boldsymbol{Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}}$$

3. Los números racionales Q.

$$\boldsymbol{Q = \left\{x = \frac{a}{b} \middle| \, a, b \in Z \text{ } y \text{ } b \neq 0\right\}}$$

3. Los números Irracionales I.

$$\boldsymbol{I = \left\{x \neq \frac{a}{b} \middle| \, a, b \in Z \text{ } y \text{ } b \neq 0\right\}}$$

4. Los números reales R.

$$\boldsymbol{R = Q \cup I}$$

Nota: El conjunto de números reales, para las matemáticas que se manejan en este curso, es el conjunto que contiene a cualquier número.

El conjunto de los **números naturales** tiene asociadas dos operaciones binarias, la adición o suma y el producto o multiplicación que satisfacen los siguientes axiomas:

1. La suma de números naturales es conmutativa, es decir, si $\boldsymbol{a, b \in N}$ entonces:

$$\boldsymbol{a + b = b + a}$$

2. La suma de números naturales es asociativa, es decir, si $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{N}$ entonces:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

3. El producto de números naturales es conmutativo, es decir, si $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \in \mathbf{N}$ entonces:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$$

4. El producto de números naturales es asociativo, es decir, si $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{N}$ entonces:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$$

5. Existe en N un elemento neutro para el producto, el 1, es decir, si $\mathbf{a} \in \mathbf{N}$ entonces:

$$\boldsymbol{a}\times\mathbf{1}=\mathbf{1}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$$

6. En N el producto distribuye a la suma, es decir, si $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{N}$ entonces:

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})$$
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$$

El conjunto de los **números enteros** tiene asociadas dos operaciones binarias, la adición o suma y el producto o multiplicación que satisfacen los siguientes axiomas:

1. La suma de números enteros es conmutativa, es decir, si $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{Z}$ entonces:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$$

2. La suma de números enteros es asociativa, es decir, si $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{Z}$ entonces:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$$

3. Existe en $\mathbf{Z}$ un elemento neutro para la suma, el 0, es decir, si $\mathbf{a} \in \mathbf{Z}$ entonces:

$$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{a}=\mathbf{a}$$

4. Para cada $\mathbf{a} \in \mathbf{Z}$ existe en $\mathbf{Z}$ su inverso aditivo que se denota $-\mathbf{a}$, entonces:

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = (-\mathbf{a}) + \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

5. El producto de números enteros es conmutativo, es decir, si $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \in \mathbf{Z}$ entonces:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

6. El producto de números enteros es asociativo, es decir, si $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{Z}$ entonces:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

7. Existe en $\mathbf{Z}$ un elemento neutro para el producto, el 1, es decir, si $\mathbf{a} \in \mathbf{Z}$ entonces:

$$\boldsymbol{a} \times \mathbf{1} = \mathbf{1} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$$

8. En $\mathbf{Z}$ el producto distribuye a la suma, es decir, si $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{Z}$ entonces:

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})$$
$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$$

El conjunto de los **números racionales** (o fraccionarios) tiene asociadas dos operaciones binarias, la adición o suma y el producto o multiplicación que se definen, respectivamente, de la siguiente manera, sean $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbf{Z}$ entonces:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} + \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} = \frac{\boldsymbol{ad} + \boldsymbol{bc}}{\boldsymbol{bd}}$$

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \times \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} = \frac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{d}}$$

Nota: En adelante, para denotar el producto se omitirá el signo $\times$.

Con estas dos operaciones binarias se satisfacen los siguientes axiomas:

1. La suma de números racionales es conmutativa, es decir, si $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q$ entonces:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

2. La suma de números racionales es asociativa, es decir, si $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in Q$ entonces:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$$

3. Existe en Q un elemento neutro para la suma el $\frac{0}{1}$, es decir, si $\frac{a}{b} \in Q$ entonces:

$$\frac{a}{b} + \left(\frac{0}{1}\right) = \left(\frac{0}{1}\right) + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

4. Para cada $\frac{a}{b} \in Q$ existe en Q su inverso aditivo que se denota $\frac{-a}{b}$, entonces:

$$\frac{a}{b} + \left(\frac{-a}{b}\right) = \left(\frac{-a}{b}\right) + \frac{a}{b} = \frac{0}{1}$$

5. El producto de números racionales es conmutativo, es decir, si $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q$ entonces:

$$\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{c}{d}\frac{a}{b}$$

6. El producto de números racionales es asociativo, es decir, si $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in Q$ entonces:

$$\left(\frac{a}{b}\frac{c}{d}\right)\frac{e}{f} = \frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}\frac{e}{f}\right)$$

7. Existe en $\boldsymbol{Q}$ un elemento neutro para el producto el $\frac{1}{1}$, es decir, si $\frac{a}{b} \in \boldsymbol{Q}$ entonces:

$$\frac{a}{b}\left(\frac{1}{1}\right) = \left(\frac{1}{1}\right)\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

8. Para cada $\frac{a}{b} \in \mathbf{Q}, \mathbf{con}\ \frac{a}{b} \neq \frac{0}{1}$ existe en $\mathbf{Q}$ su inverso multiplicativo (otro número racional que al ser multiplicado por éste da como resultado al $\frac{1}{1} \in \mathbf{Q}$), a saber, el número $\frac{b}{a}$, que se denota por $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$ entonces:

$$\frac{a}{b}\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{ab}{ba} = \frac{ab}{ab} = \frac{1}{1}$$

9. En $\mathbf{Q}$ el producto distribuye a la suma, es decir, si $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbf{Q}$ entonces:

$$\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b}\frac{c}{d}\right) + \left(\frac{a}{b}\frac{e}{f}\right)$$
$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)\frac{e}{f} = \left(\frac{a}{b}\frac{e}{f}\right) + \left(\frac{c}{d}\frac{e}{f}\right)$$

b) Fracciones y decimales

El conjunto de los **números irracionales** se caracterizan precisamente porque no pueden expresarse como cocientes de números enteros, más aún, son aquellos cuyo cociente tiene una expansión decimal infinita.

El propósito de este curso no tiene contemplado el estudio a mayor profundidad de este conjunto numérico, por lo cual solo se presentarán algunos ejemplos de estos números como:

$$\pi = 3.1415926535 \ldots$$
$$e = 2.7182818284 \ldots$$
$$\sqrt{2} = 1.4142135623 \ldots$$
$$\sqrt{3} = 1.7320508075 \ldots$$

Y también tienen asociadas dos operaciones binarias, la suma y el producto.

Los números reales se definieron como la unión de los números racionales con los irracionales, este es un conjunto con un número infinito incontable de elementos, también tienen asociadas dos operaciones binarias, la suma y el producto; recuerda que en todos tus estudios anteriores tuviste que operar con estos números, incluso en su forma decimal.

Las operaciones que comúnmente se manejaron en los números reales, coloquialmente hablando son: la suma, la resta, la multiplicación y la división, porque con toda la formalidad se tienen definidas solo la suma y el producto, las otras dos operaciones se derivan de los inversos aditivos y multiplicativos.

c) Escalas y proporciones

Cuando se realiza la comparación de dos números reales, se puede hacer a través de una diferencia (resta) o, de igual manera, se puede utilizar un cociente y se determina qué tanto es mayor uno del otro, en este caso se abordará la comparación con cocientes.

Se dice que la razón de dos números es el resultado de dividirlos. Sean $\boldsymbol{c, d} \in \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{c/d}$ o $\boldsymbol{c{:}d}$ que representa la razón *c es a d*.

Ejemplo:
La razón de 5 a 3, se denota $\mathbf{5/3}$ o $\mathbf{5{:}3}$ y se lee *cinco* es a *tres*.
En este caso, el número 5 se denomina antecedente y el 3 se denomina consecuente.
Una proporción consiste en la igualdad entre dos razones y se puede representar de dos maneras:
$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}$ o $\boldsymbol{a{:}b{::}c{:}d}$ y se lee: $\boldsymbol{a}$ es a $\boldsymbol{b}$ como $\boldsymbol{c}$ es a $\boldsymbol{d}$.

- Proporcionalidad

Cuando el cociente entre dos magnitudes es constante, se dice que las magnitudes son directamente proporcionales.

Ejemplo 1:

Cualquier producto cuyo costo dependa de su peso o unidad de volumen (carne, gasolina, papel, etc.) se dice que los costos son proporcionales a las unidades adquiridas.

Ejemplo 2:

Supongamos que el litro de gasolina magna tiene un costo de $12.50. Si llenamos la siguiente tabla con los costos de llenar un tanque con los litros de gasolina que se piden, encontramos lo siguiente:

Gasolina (l)	5	10	15	20	25	30	35
Costo ($)	62.50	125.00	187.50	250.00	312.50	375.00	437.50

Es muy sencillo ver que los precios que se solicitaron para los distintos números de litros, se pueden determinar a través de una sencilla regla de tres.

Cuando una magnitud crece, mientras que la otra magnitud decrece, se dice que son inversamente proporcionales.

Ejemplo 3:

Supongamos que se quieren almacenar cajas en un almacén con capacidad de 240 metros cúbicos, se cuenta con cajas cuyo volumen son de 1, 2, 4 y 8 metros cúbicos, entonces podrá llenar el almacén de acuerdo con:

Número de cajas	240	120	60	30
Tamaño en m^3	1	2	4	8

Observa que entre más crezca el volumen de la caja, menor será el número de cajas que se podrán almacenar.

d) Exponentes y radicales

La potencia entera positiva de un valor númerico o variable, representa exactamente el número de factores que se están multiplicando de este valor o variable consigo mismo.

Ejemplos

$$\mathbf{3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}$$

$$\boldsymbol{x^3 = x \times x \times x = (x)(x)(x)}$$

$$\boldsymbol{z^n = z \times z \times \ldots \times z \ \ (n\, factores\, de\, z)}$$

La potencia entera negativa de un valor númerico o variable, representa el recíproco del producto de la potencia positiva.

Ejemplos

$$\mathbf{3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}}$$

$$\boldsymbol{x^{-3} = \frac{1}{x^3}}$$

La potencia racional de un valor númerico o variable, representa la raíz de este número.

Ejemplos

$$\mathbf{27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27}}$$

$$\boldsymbol{x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}}$$

Con base en las definiciones anteriores, se derivan las siguientes:

Leyes de los exponentes y los radicales

$x^0 = 1$	$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$
$x^1 = x$	$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$
$x^n = xx \ldots x$ (multiplicar x n-veces)	$(x^{-n})^m = x^{-(nm)}$
$x^n x^m = x^{n+m}$	$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$
$(ax^n)(bx^m) = (ab)x^{n+m}$	$x^{\left(\frac{1}{m}\right)} = \sqrt[m]{x}$
$(x^n)^m = x^{nm}$	$x^{\left(\frac{-1}{m}\right)} = \frac{1}{\sqrt[m]{x}}$
$(xy)^n = x^n y^n$	$x^{\left(\frac{n}{m}\right)} = \sqrt[m]{x^n}$
$(x^n)^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{n}{m}}$	$x^{\left(\frac{-n}{m}\right)} = \frac{1}{\sqrt[m]{x^n}}$

1.2. Principios del análisis algebraico

Los símbolos usados en álgebra para representar cantidades son los números y las letras. Para iniciar el aprendizaje de la aritmética, es preciso definir los conceptos elementales para la comprensión del tema.

- Los números se emplean para representar cantidades conocidas y determinadas. Por convención se usan las primeras letras del abecedario para denotar también cantidades conocidas, a las que se denomina **coeficiente**.
- Se denominan **variables** a las letras que representan cantidades desconocidas. Por convención se usan las últimas letras del abecedario como *u, v, w, x, y, z*.
- Una **expresión algebraica** es la representación de un símbolo algebraico o de una o más operaciones algebraicas.
- **Término** es una expresión algebraica que consta de un solo símbolo o de varios símbolos no separados entre sí por el signo **+** o el signo **-**.

Ejemplo 1

La siguiente es una expresión algebraica:

$$\mathbf{3x^2+5xy-183}$$

Consta de tres términos:

Primer término	Segundo término	Tercer término
$\mathbf{3x^2}$	$\mathbf{5xy}$	$\mathbf{-183}$

Observa que cuando un término no va precedido por un signo, toma el valor positivo.

Ejemplo 2

$$-3y^5 + \frac{1}{3}x^2 - 18xy + 10$$

Consta de cuatro términos:

Primer término	Segundo término	Tercer término	Cuarto término
$-3y^5$	$\frac{1}{3}x^2$	$-18xy$	10

1.2.1 Resolución de ejercicios con:

a) Simplificación algebraica, polinomios y factorización

Cuando un término involucra un coeficiente, una variable y un exponente, estos elementos se distinguen, tal como se observa en la siguiente tabla:

ax^n	$a = coeficiente$
	$x = variable\ en\ la\ base$
	$n = exponente$

Un polinomio es una expresión algebraica que tiene la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

- Un **monomio** es una expresión algebraica que consta de un solo término.
- Un **polinomio** es una expresión algebraica que consta de más de un término.
- El **grado de un polinomio** es el grado de su término de mayor grado.

Por lo general, un polinomio se ordena de forma ascendente o descendente al grado del polinomio.

Suma de polinomios

Para poder sumar dos polinomios será necesario hacerlo únicamente de términos semejantes, es decir, se suman los coeficientes que estén multiplicando a variables con la misma potencia.

Ejemplo:

Realiza la suma de los siguientes polinomios:

$\boldsymbol{P(x) = -8x^5 + 4x^4 + 10x^3 - 15x^2 - 100}$ con $\boldsymbol{Q(x) = -x^5 - 12x^3 + 15x^2 + 2x + 117}$

Se recomienda colocar en orden cada uno de los términos y sumar los coeficientes como se muestra a continuación:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & -8x^5 & +4x^4 & +10x^3 & -15x^2 & & -100 \\
+ & -x^5 & & -12x^3 & +15x^2 & +2x & +117 \\
\hline
 & -9x^5 & +4x^4 & -2x^3 & 0x^2 & +2x & +17
\end{array}
$$

Puesto que por convención no se expresa de manera escrita un término que esté multiplicado por cero, el polinomio que resultó de la suma es:

$$\boldsymbol{-9x^5 + 4x^4 - 2x^3 + 2x + 17}$$

Producto de polinomios

Si recordamos la forma de multiplicar que estudiamos en la educación básica, cuando las unidades se sumaban con unidades, decenas con decenas y centenas con centenas, ese mismo proceso se realizará para los polinomios pero considerando un orden estrictamente relacionado con la potencia del término en cuestión.

A continuación se muestra un ejemplo de la manera en que se multiplican dos polinomios, recuerda que para los propósitos de esta asignatura se están ordenando de forma descendente.

Ejemplo:

Multiplicar $-10x^3 + 15x^2 - 20x - 10$ con $5x^2 + x + 11$

	$\times$	$-10x^3$	$+15x^2$	$-20x$	-10
			$5x^2$	$+x$	$+11$
		$-110x^3$	$+165x^2$	$-220x$	-110
	$-10x^4$	$+15x^3$	$-20x^2$	$-10x$	
$-50x^5$	$+75x^4$	$-100x^3$	$-50x^2$		
$-50x^5$	$+65x^4$	$-195x^3$	$+95x^2$	$-230x$	-110

Por lo tanto el polinomio que resulta del producto es:

$$-50x^5 + 65x^4 - 195x^3 + 95x^2 - 230x - 110$$

También se puede realizar este producto de forma lineal, aplicando continuamente la propiedad distributiva, del producto con respecto a la suma, aplicar repetidamente las leyes de los exponentes y sumar los términos semejantes.

Sin embargo, observe que el método expuesto de multiplicar polinomios permite reducir un posible error por omisión de algún término.

b) Ecuaciones lineales, inecuaciones, sistemas de ecuaciones y ecuaciones cuadráticas

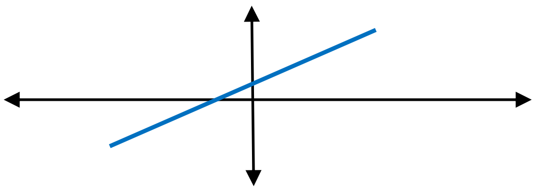
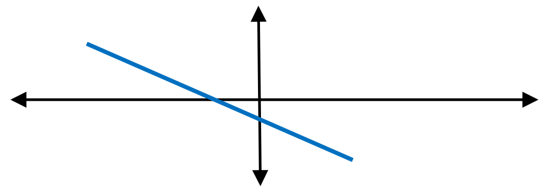
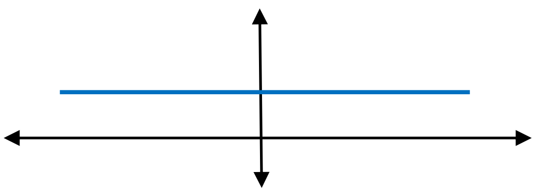
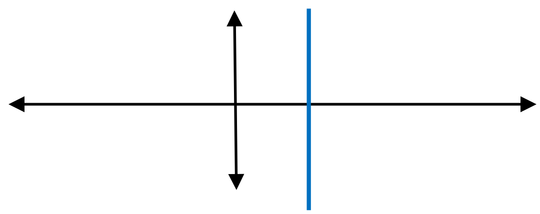
Las **ecuaciones lineales** son expresiones algebraicas de grado 1 y solo se analizarán los casos más simples.

- La recta

Una recta en su expresión pendiente ordenada al origen se expresa de la siguiente manera:

$$y = mx + d$$

La pendiente de una recta indica su grado de inclinación, de esta manera:

$m > 0$	$m < 0$
	
$m = 0$	m, *no determinada*
	

Y en términos generales, a la ecuación de una recta también se le presenta como:

$$ax + by = c$$

Pero son exactamente lo mismo, a continuación se muestra el despeje que se hará de la ecuación general de la recta:

$$ax + by = c$$

$$by = c - ax$$

$$y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x$$

Nota que $m = \frac{-a}{b}$ y que $d = \frac{c}{b}$

Además, existe también la manera de determinar la ecuación de una recta de la que se conoce su pendiente y que pasa por un punto, digamos $P_0(x_0, y_0)$:

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

Observa que $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ no tienen subíndice porque son unas variables y que $\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}$ son valores conocidos.

En caso de no conocer la pendiente, pero sí dos puntos en el plano cartesiano por los que pasa, digamos $\boldsymbol{P_1(x_1, y_1)}$ y $\boldsymbol{P_2(x_2, y_2)}$, la forma de determinar la ecuación de la recta es a partir de la pendiente, con la fórmula:

$$\boldsymbol{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

De esta manera, la ecuación de la recta queda:

$$\boldsymbol{(y - y_1) = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)}$$

Ejemplos:

1. Determine la recta cuya pendiente es -1/3 y que pasa por el punto (-3,5)

   Se sustituyen los valores directamente en la fórmula:

$$\boldsymbol{(y - 5) = \frac{-1}{3}(x - (-3))}$$

   De esta manera:

$$\boldsymbol{(y - 5) = \frac{-1}{3}(x + 3)}$$
$$\boldsymbol{(y - 5) = \frac{-1}{3}x - 1}$$
$$\boldsymbol{y = \frac{-1}{3}x - 1 + 5}$$

   Quedando la ecuación de la recta con pendiente y ordenada al origen:

$$\boldsymbol{y = \frac{-1}{3}x + 4}$$

   Y la ecuación general:

$$\boldsymbol{\frac{1}{3}x + y = 4}$$

O, si se multiplica toda la igualdad por 3:

$$\boldsymbol{x + 3y = 21}$$

2. Determine la recta que pasa por (2,3) y por (-3,-5)

   Se sustituyen los valores directamente en la fórmula:

$$(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{3}) = \left(\frac{\boldsymbol{-5 - 3}}{\boldsymbol{-3 - 2}}\right)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{2})$$

   De esta manera:

$$(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{3}) = \left(\frac{\boldsymbol{-8}}{\boldsymbol{-5}}\right)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{2})$$
$$(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{3}) = \left(\frac{\boldsymbol{8}}{\boldsymbol{5}}\right)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{2})$$
$$(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{3}) = \frac{\boldsymbol{8}}{\boldsymbol{5}}\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{16}}{\boldsymbol{5}}$$
$$\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{8}}{\boldsymbol{5}}\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{16}}{\boldsymbol{5}} + \boldsymbol{3}$$

   La ecuación de la recta con pendiente y ordenada al origen queda así:

$$\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{8}}{\boldsymbol{5}}\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{5}}$$

   Y la ecuación general:

$$\frac{\boldsymbol{-8}}{\boldsymbol{5}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{-1}}{\boldsymbol{5}}$$

   O, si se multiplica por toda la igualdad por 5:

$$\boldsymbol{-8x + 5y = -1}$$

Las **inecuaciones lineales** son expresiones algebraicas de grado 1 y se caracterizan porque en lugar de tener un signo de igualdad se tienen desigualdades del tipo $<, \leq, >$ $\boldsymbol{y}$ $\geq$.

Ejemplos:

$$-3x + 18 < 4x - 3$$

$$8y + 21 \geq 2y - 54$$

$$y + \frac{2}{5} \leq \frac{3}{3}y - 1$$

¿Cómo se resuelve una inecuación?

La manera en que se resuelve una inecuación es muy similar a como se resuelve una ecuación lineal, solo debe recordarse que *si divide o multiplica de ambos lados de una desigualdad por un valor negativo la desigualdad se invierte.* La solución a una inecuación de primer grado es necesariamente un intervalo de la recta real.

Ejemplos:

Se resolverán a continuación dos inacuaciones lineales para que quede más claro y posteriormente se representará su conjunto solución en la recta real.

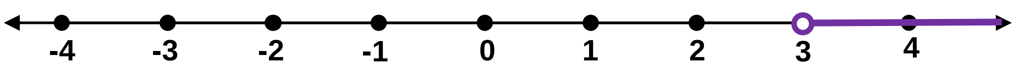
$$8y + 21 \geq 2y - 54$$
$$8y + 21 - 21 \geq 2y - 54 - 21$$
$$8y - 2y \geq 2y - 2y - 75$$
$$6y \geq -75$$
$$\frac{1}{6}(6y) \geq \frac{1}{6}(-75)$$
$$y \geq \frac{-75}{6}$$

Que es un intervalo de la recta real: $[\frac{-75}{6}, +\infty)$

$$-3x + 18 < 4x - 3$$

$$-3x + 18 - 18 < 4x - 3 - 18$$
$$-3x < 4x - 21$$
$$-3x - 4x < 4x - 4x - 21$$
$$-7x < -21$$
$$\frac{-1}{7}(-7x) > \frac{-1}{7}(-21)$$
$$x > \frac{21}{7} = 3$$

Que es un intervalo de la recta real: $(3, +\infty)$



Note que en el primer ejemplo el círculo está relleno, eso indica que $\frac{-75}{6}$ está incluído en el intervalo y, en el segundo ejemplo, el 2 no está considerado.

- Sistemas de ecuaciones lineales de 2x2

Un sistema de ecuaciones lineales de 2x2 se expresa de la siguiente forma:

$$(Ecuación\ 1) \quad a_1x + b_1y = c_1$$
$$(Ecuación\ 2) \quad a_2x + b_2y = c_2$$

Como puede apreciarse, se trata de dos líneas rectas en el plano cartesiano, por tanto, la solución implica el determinar el punto en que se intersectan dichas rectas, si no son rectas paralelas.

Para determinar la solución de un sistema de ecuaciones de 2x2, hay una diversidad de algoritmos, de los cuales se recordarán solo cuatro:

- Suma y resta
- Sustitución
- Igualación
- Determinantes

Suma y resta

El algoritmo consiste de los siguientes pasos:

1. Elegir una variable a despejar (*x* o *y*)

2. El coeficiente de la variable no elegida en la ecuación 1, multiplicará a toda la ecuación 2 y el coeficiente de la variable no elegida en la ecuación 2, multiplicará a toda la ecuación 1.

3. Restar la ecuación 2 de la ecuación 1.

4. Ahora, ya solo existe una ecuación de primer grado con una incógnita, por tanto, se despeja su valor.

5. La variable que ya tiene su valor determinado, en el paso 4, se sustituye en cualquiera de las ecuaciones originales y se despeja el valor de la otra variable.

Ejemplo:

$$\boldsymbol{Ec.1 \qquad 3x + 5y = 9}$$

$$\boldsymbol{Ec.2 \qquad -9x - y = 1}$$

1. Elegir una variable a despejar, en este caso *y*.

2. Multiplicar la ecuación 1 por (-9) y la ecuación 2 por (3).

$$-27x - 45y = -81$$
$$-27x - 3y = 3$$

3. Restar la ecuación 2 de la ecuación 1.

$$-42y = -84$$

4. Ahora, ya solo existe una ecuación de primer grado con una incógnita, por tanto, se despeja su valor.

$$y = 2$$

5. La variable que ya tiene su valor determinado, en el paso 4, se sustituye en cualquiera de las ecuaciones originales y se despeja el valor de la otra variable.

$$3x + 5(2) = 9$$
$$3x = 9 - 10$$
$$3x = -1$$
$$x = \frac{-1}{3}$$

Sustitución

El algoritmo de sustitución consiste en los siguientes pasos:

1. Elegir una variable a despejar (*x* o *y*) de una de las dos ecuaciones (1 o 2) y despejarla.

2. Sustituir la variable despejada en la ecuación no-elegida.

3. Ahora, ya solo existe una ecuación de primer grado con una incógnita, por tanto, se despeja su valor.

4. La variable que ya tiene su valor determinado, en el paso 3, se sustituye en la variable despejada en el paso 1.

Ejemplo:

$$\boldsymbol{Ec.1} \qquad \boldsymbol{3x+5y=9}$$
$$\boldsymbol{Ec.2} \qquad \boldsymbol{-9x-y=1}$$

1. Elegir una variable a despejar, en este caso y de la ecuación 2.

$$\boldsymbol{-y=1+9x}$$
$$\boldsymbol{y=-1-9x}$$

2. Sustituir la variable despejada en la ecuación 1.

$$\boldsymbol{3x+5(-1-9x)=9}$$

3. Ahora, ya solo existe una ecuación de primer grado con una incógnita, por tanto se despeja su valor.

$$\boldsymbol{3x+5(-1-9x)=9}$$
$$\boldsymbol{3x-5-45x=9}$$
$$\boldsymbol{-42x=9+5}$$
$$\boldsymbol{x=\frac{14}{-42}=\frac{-1}{3}}$$

4. X=-1/3, se sustituye en la variable despejada en el paso 1.

$$\boldsymbol{y=-1-9\left(\frac{-1}{3}\right)}$$
$$\boldsymbol{y=-1+3=2}$$

Igualación

El algoritmo consiste de los siguientes pasos:

1. Elegir una variable a despejar (*x* o *y*) de las dos ecuaciones y despejarlas.

2. Igualar las variables despejadas. Ahora, ya solo existe una ecuación de primer grado con una incógnita, por tanto, se despeja su valor.

3. La variable que ya tiene su valor determinado, en el paso 2, se sustituye en una de las variables despejadas en el paso 1.

Ejemplo:

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{Ec.1} & \boldsymbol{3x+5y=9} \\ \boldsymbol{Ec.2} & \boldsymbol{-9x-y=1} \end{array}$$

1. Elegir una variable a despejar, digamos *X* de las dos ecuaciones y despejarlas.

$$\boldsymbol{3x = 9 - 5y} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x = \frac{9-5y}{3}}$$

$$\boldsymbol{-9x = 1 + y} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x = \frac{1+y}{-9}}$$

2. Igualar las variables despejadas. Ahora, ya solo existe una ecuación de primer grado con una incógnita, por tanto, se despeja su valor.

$$\frac{9-5y}{3}=\frac{1+y}{-9}$$
$$-81+45y=3+3y$$
$$42y=84$$
$$y=\frac{84}{42}=2$$

3. La variable que ya tiene su valor determinado, en el paso 2, se sustituye en una de las variables despejadas en el paso 1, por ejemplo, en la x que se despejó de la primera ecuación.

$$x=\frac{9-5(2)}{3}$$
$$x=\frac{-1}{3}$$

Determinantes

Antes de abordar el algoritmo como en los casos anteriores, será preciso definir algunos conceptos:

El determinante de una matriz de orden 2x2 de valores reales, es un valor numérico que se determina de acuerdo con:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-cb$$

En el sistema de ecuaciones de 2x2:

$$a_1x+b_1y=c_1$$
$$a_2x+b_2y=c_2$$

Se tendrán asociados tres determinantes: el determinante del sistema, a quien se denotará Δ_s, el determinante para despejar el valor de la incógnita "x" Δ_x y el determinante para despejar el valor de la incógnita "y" Δ_y:

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1$$

La solución al sistema de ecuaciones se determina con los siguientes cocientes:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_s} \quad y \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta_s}$$

Ejemplo:

$$Ec. 1 \qquad 3x + 5y = 9$$

$$Ec. 2 \qquad -9x - y = 1$$

Se calculan los determinantes asociados a los sistemas de ecuaciones:

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -9 & -1 \end{vmatrix} = (3)(-1) - (-9)(5) = -3 + 45 = 42$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (9)(-1) - (1)(5) = -9 - 5 = -14$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ -9 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (-9)(9) = 3 + 81 = 84$$

Finalmente, se determina la solución al sistema:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_s} = \frac{-14}{42} = \frac{-1}{3} \qquad y \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta_s} = \frac{84}{42} = 2$$

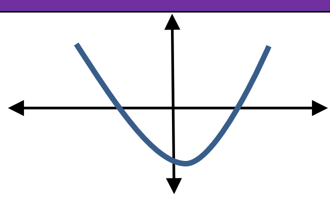
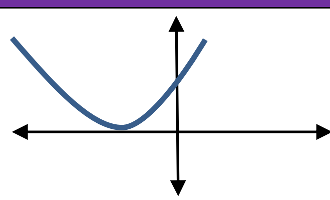
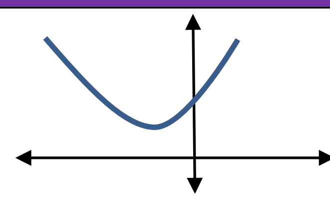
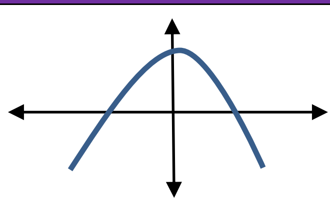
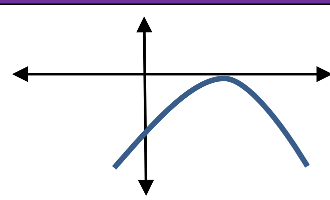
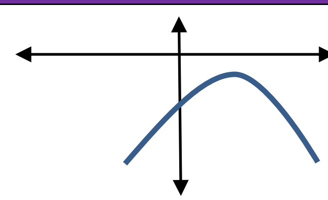
- Ecuaciones cuadráticas

Una ecuación cuadrática o de segundo grado en su expresión genérica se representa mediante:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$$

Gráficamente, en el plano cartesiano, representa a una parábola que puede abrir hacia arriba ∪, si el signo del coeficiente $\boldsymbol{a > 0}$ (es positivo) o puede abrir hacía abajo ∩ si el signo del coeficiente $\boldsymbol{a < 0}$ (es negativo).

Una parábola puede intersectar al eje de las “x” en uno, en dos o en ningún punto:

Intersección en dos puntos	Intersección en un punto	No existe intersección
$\boldsymbol{a > 0}$	$\boldsymbol{a > 0}$	$\boldsymbol{a > 0}$
		
$\boldsymbol{a < 0}$	$\boldsymbol{a < 0}$	$\boldsymbol{a < 0}$
		

Gráficamente es visible la relación que tienen la existencia del número de soluciones de la ecuación cuadrática y las intersecciones con el eje de las “x”, en el caso en que no toca a este eje, sí tiene soluciones; pero estas pertenecen al conjunto de los números complejos.

La ecuación cuadrática, $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, se puede resolver de diferente forma, dependiendo de cuál de los coeficientes no está presente o de manera genérica, cuando los tres coeficientes están presentes.

- Caso 1) $\boldsymbol{c = 0}$

$$\boldsymbol{4x^2 - 16x = 0}$$

En este caso, se puede proceder factorizando la expresión de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{4x(x - 4) = 0}$$

Note que se tiene un producto de dos expresiones igualado a cero, esto implica que, uno de los dos factores debe ser cero, entonces hay dos soluciones posibles:

$\boldsymbol{(4)(x) = 0}$ y, por tanto, $\boldsymbol{x = 0}$

Con factor derecho del producto, se tendría:

$\boldsymbol{x - 4 = 0}$ y, por tanto, $\boldsymbol{x = 4}$

Finalmente, las dos soluciones posibles son:

$\boldsymbol{x_1 = 0}$ y, $\boldsymbol{x_2 = 4}$

- Caso 2) $\boldsymbol{b = 0}$

$$\boldsymbol{-3x^2 + 75 = 0}$$

En este caso, se realiza el despeje algebraico correspondiente:

$$-3x^2 = -75$$

$$x^2 = \frac{-75}{-3} = 25$$

$$x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

Finalmente, las dos soluciones posibles son:

$x_1 = 5$ y, $x_2 = -5$

- Caso 3) $a, b, c \neq 0$

Es justamente este caso el que requiere la fórmula general para su solución:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo:

$$-2x^2 + 5x + 3 = 0$$

En este caso:

$$a = -2, \quad b = 5 \quad y \quad C = 3$$

Aplicando la fórmula para determinar las dos soluciones posibles y haciendo las operaciones correspondientes, se tiene:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(-2)(3)}}{2(-2)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{-4}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 7}{-4}$$

Se determina la primera solución con el signo positivo de la raíz y la segunda solución con el signo negativo de la raíz:

$$x_1 = \frac{-1}{2} \quad \text{y,} \quad x_2 = 3$$

Aprovechando este último caso en la solución de ecuaciones cuadráticas, es importante subrayar que el vértice es el punto que pertenece a la parábola y es aquel donde alcanza su valor máximo o mínimo, según sea el caso; pero siempre se puede determinar a través del uso de las siguientes formulas, derivadas de la fórmula general, de esta manera:

$$V_X = \frac{-b}{2a} \quad \text{y,} \quad V_y = \frac{4ac-b^2}{4a}$$

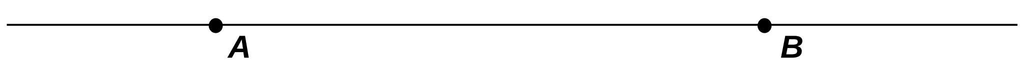
1.3. Principios del análisis geométrico

1.3.1 Resolución de ejercicios con:

a) Líneas, ángulos, áreas y perímetros

Un punto es lo que tiene posición, pero no dimensión. Se denota por medio de una letra mayúscula escrita cerca de él.

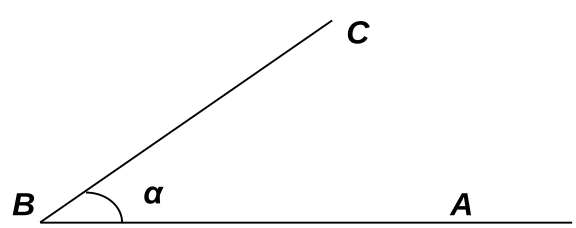
Una recta es un conjunto de puntos que de manera conjunta tienen una sola dimensión. También se le puede definir como el conjunto de puntos que no tiene partes curvas. La recta se denota designando dos puntos sobre ella con letras mayúsculas.



Los puntos que se encuentran todos en el mismo plano, se dice que son coplanares.

Un ángulo es la unión de dos segmentos de recta que coinciden en un punto extremo.

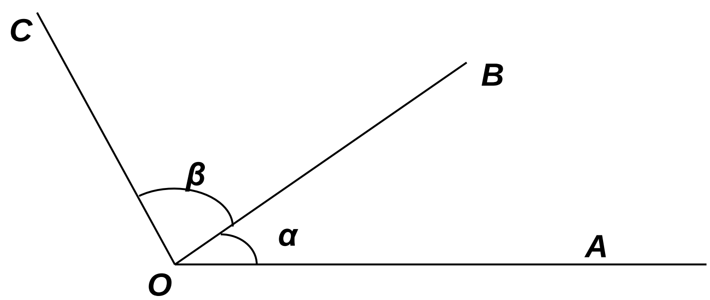
Ejemplo: En la siguiente figura, se muestra el ángulo α que está determinado por los segmentos de recta $\overline{BC}$ y $\overline{BA}$.



Los ángulos generalmente se miden en términos de unidad grado (°). A cada ángulo le corresponde un valor real entre 0° y 360° que es la medida de un giro completo.

Se dice que dos ángulos son ángulos adyacentes si, y solo si, tienen el mismo vértice, un lado en común y los otros dos lados están contenidos en los semiplanos cerrados opuestos determinados por la recta que contiene el lado común.

Ejemplo: En la figura siguiente, los ángulos α y β son ángulos adyacentes, el vértice O es común y comparten el segmento de recta $\overline{\boldsymbol{OB}}$**;** de igual forma, los segmentos de recta $\overline{\boldsymbol{OC}}$ **y** $\overline{\boldsymbol{OA}}$ se encuentran opuestos al segmento común.

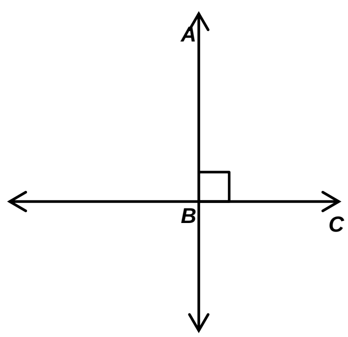


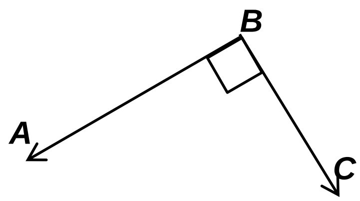
Un ángulo es un ángulo recto si, y solo si, tiene medida de 90°.

En geometría se utiliza la palabra congruente para definir lo que tiene el mismo tamaño y la misma forma. Dos ángulos son congruentes si, y solo si, tienen la misma medida.

Dos rectas son perpendiculares si, y solo si, se intersectan para formar un ángulo recto.

Ejemplos:



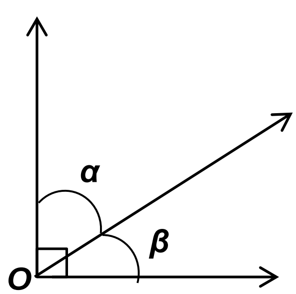


Se dice que dos ángulos son ángulos complementarios si, y solo si, la suma de las medidas de sus ángulos es igual a 90°.

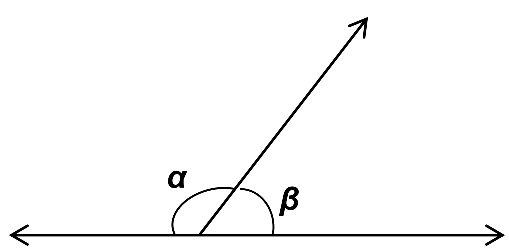
Se dice que dos ángulos son ángulos suplementarios si, y solo si, la suma de las medidas de sus ángulos es igual a 180°.

Ejemplos:

a) Ángulos complementarios



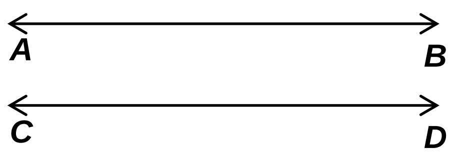
b) Ángulos suplementarios

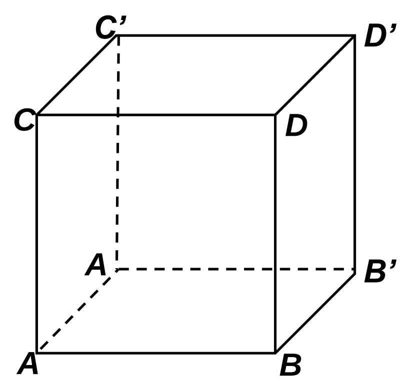


Dos rectas son paralelas si, y solo si, son coplanares y no se intersectan.

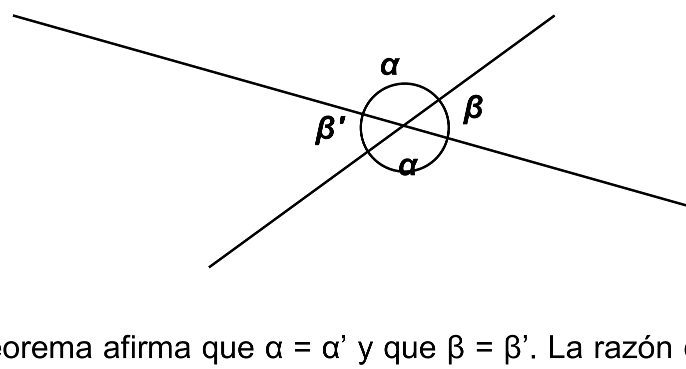
Así mismo, dos planos son paralelos si, y solo si, su intersección es el conjunto nulo.

Ejemplos: A continuación se muestra que la recta $\overline{AB}$ y la recta $\overline{CD}$ son paralelas, de igual manera el plano ABCD y el plano A'B'C'D' son paralelos.





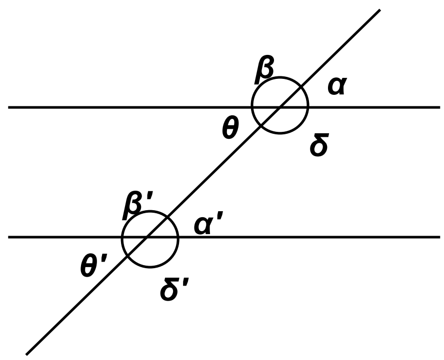
Teorema 1: Si dos rectas se intersectan entre sí, los ángulos opuestos por el vértice son iguales.



En este dibujo el teorema afirma que α = α' y que β = β'. La razón de la veracidad de este teorema radica en que α y β son ángulos suplementarios y los ángulos α' y β' también son suplementarios (suman 180°).

Teorema 2: Si dos rectas paralelas son cortadas por una recta transversal entonces se cumplen las siguientes postulados:

1) Los ángulos correspondientes son congruentes.
2) Los ángulos internos del mismo lado son suplementarios.
3) Los ángulos alternos internos son congruentes.



A partir de este dibujo se explicará cada uno de los postulados:

1. Los ángulos correspondientes se refiere a α con α', a **β** con **β'**, a **θ** con **θ'** y a **δ** con **δ'**. Es claro que al ser rectas paralelas el ángulo que se forma con la transversal para estos casos queda idéntico.

2. Los ángulos internos del mismo lado se refiere a **α** con **β**, a **β** con **θ**, a **θ** con **δ** y a **δ** con **α**. La justificación es muy evidente, puesto que la suma de cada pareja es de 180°. Ocurre exactamente lo mismo para el caso de **α'**, **β'**, **θ'** y **δ'**.

3. Los ángulos alternos internos se refiere a **β'** con **δ** y a **θ** con **α'**, estos son iguales, respectivamente. La razón por la que se cumple este postulado es porque **β'** es igual a **δ'** por ser ángulos opuestos y, al aplicar el postulado 2, **δ'** es igual a **δ.** Por transitividad el postulado es verdadero.

Una vez que se han abordado las rectas y los ángulos, pasaremos a otro tema igual de importante que éstos, el triángulo.

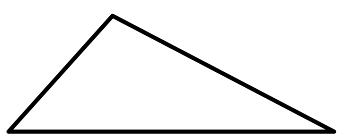
b) Triángulos, polígonos y circunferencias

Se define como triángulo a la figura plana que consta de tres lados y tres ángulos interiores. Estos se clasifican principalmente en tres tipos: Escaleno, Isósceles y Equilátero.

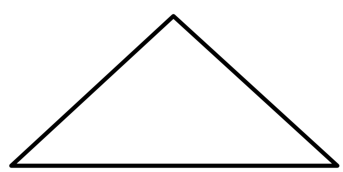
- Un triángulo es **escaleno** si, y solo si, no tiene dos lados que sean iguales.
- Un triángulo es **isósceles** si, y solo si, tiene dos lados iguales.
- Un triángulo es **equilátero** si, y solo si, tiene tres lados iguales.

Ejemplos:

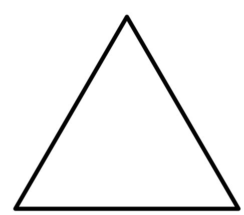
a) Escaleno



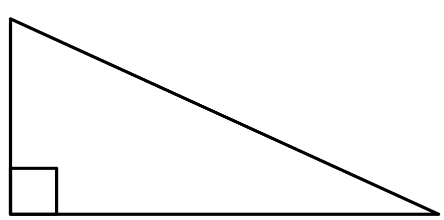
b) Isósceles



c) Equilátero



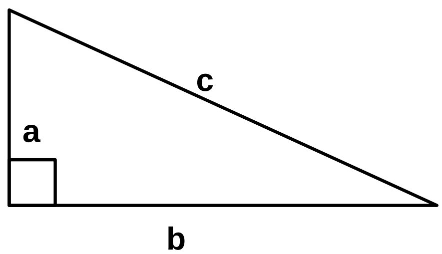
Se dice que un triángulo es un triángulo rectángulo si, y solo si, tiene un ángulo recto.



Propiedades de los triángulos:

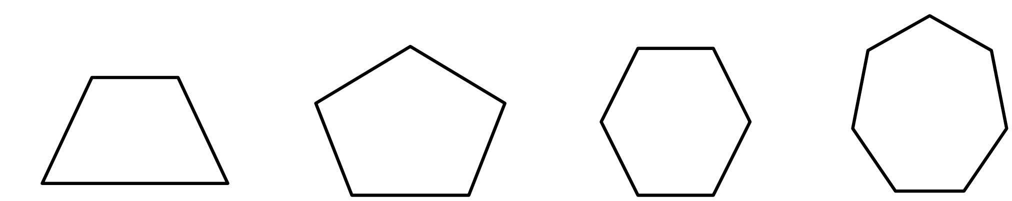
1) La suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es de 180°
2) En un triángulo escaleno todos los ángulos son diferentes.
3) En un triángulo isósceles dos de los ángulos son iguales.
4) En un triángulo equilátero los tres ángulos miden 60°.

Teorema de Pitágoras: En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos $\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$.



Según la Real Academia de la Lengua Española, un polígono es una porción del plano limitada por líneas rectas.

Ejemplos:



De acuerdo a esta definición, el polígono debe tener asociados los ángulos internos determinados por las líneas rectas que se unen y forman un vértice.

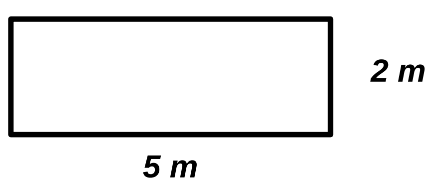
A la circunferencia también se le conoce como un polígono con un número infinito de lados.

Un polígono es un polígono regular si, y solo si, todos sus lados y sus ángulos son iguales. De otra manera, se le denomina polígono irregular.

Como ejemplos de polígonos regulares podemos citar al triángulo equilátero y al cuadrado.

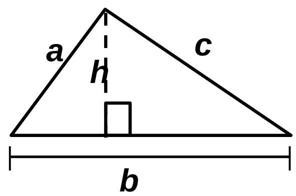
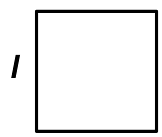
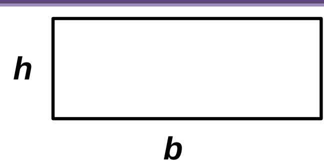
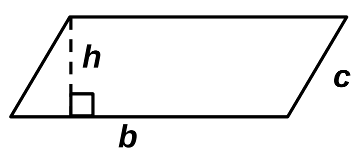
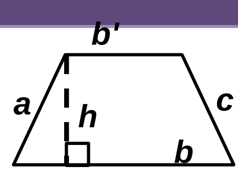
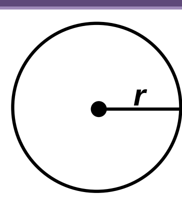
Se denomina perímetro a la medida del contorno de una figura o superficie. La unidad de medida para un perímetro será la longitudinal.

Ejemplo:



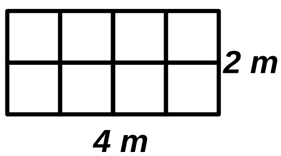
$$\boldsymbol{P = 2 + 2 + 5 + 5 = 14\ m}$$

Fórmulas de algunos perímetros

<table>
<tr><th>TRIÁNGULO</th><th>FÓRMULA</th></tr>
<tr><td>
</td><td>$$p = a + b + c$$</td></tr>
<tr><th>CUADRADO</th><th>FÓRMULA</th></tr>
<tr><td>
</td><td>$$p = 4l$$</td></tr>
<tr><th>RECTÁNGULO</th><th>FÓRMULA</th></tr>
<tr><td>
</td><td>$$p = 2b + 2h$$</td></tr>
<tr><th>PARALELOGRAMO</th><th>FÓRMULA</th></tr>
<tr><td>
</td><td>$$p = 2b + 2c$$</td></tr>
<tr><th>TRAPECIO</th><th>FÓRMULA</th></tr>
<tr><td>
</td><td>$$p = a + b + c + b'$$</td></tr>
<tr><th>CIRCUNFERENCIA</th><th>FÓRMULA</th></tr>
<tr><td>
</td><td>$$a = \pi \times 2r$$</td></tr>
</table>

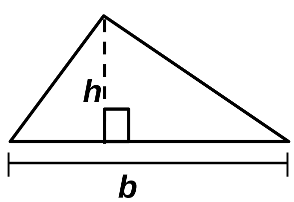
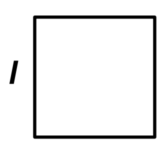
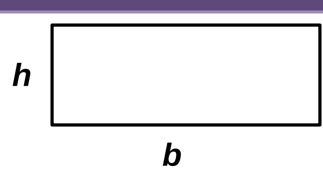
Se denomina área o superficie de una figura plana a la medida de esa superficie. La unidad de medida para un área o superficie será el cuadrado de la unidad de medida longitudinal.

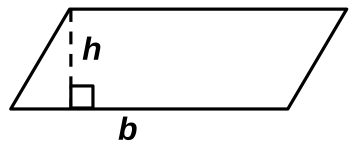
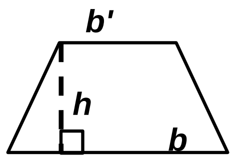
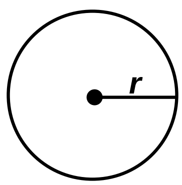
Ejemplo:



$$a = 8\,m^2$$

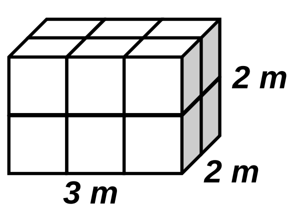
Algunas fórmulas de áreas

TRIÁNGULO	FÓRMULA
	$a = \frac{b \times h}{2}$
CUADRADO	**FÓRMULA**
	$a = l^2$
RECTÁNGULO	**FÓRMULA**
	$a = b \times h$

PARALELOGRAMO	FÓRMULA
	$a = b \times h$
TRAPECIO	FÓRMULA
	$a = \frac{(b' + b) \times h}{2}$
CIRCUNFERENCIA	FÓRMULA
	$a = \pi \times r^2$

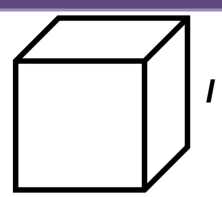
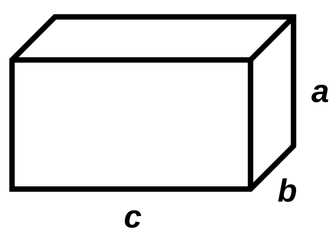
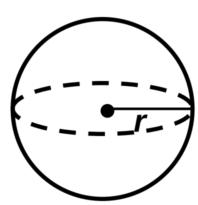
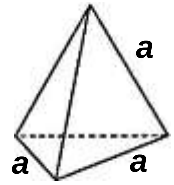
Se denomina volumen de un sólido al número de unidades de la medida de espacio en el sólido. La unidad de medida para el espacio será el cubo de la unidad de medida longitudinal.

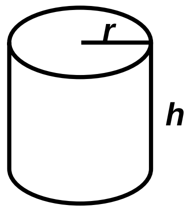
Ejemplo:



$$v = 12\ m^3$$

Algunas fórmulas de volúmenes

EXAEDRO REGULAR O CUBO	FÓRMULA
	$v = l^3$
PARALELOGRAMO RECTANGULAR	**FÓRMULA**
	$v = a \times b \times c$
ESFERA	**FÓRMULA**
	$v = \frac{4\pi}{3} \times r^2$
TETRAEDRO	**FÓRMULA**
	$v = 0.1178a^3$

CONO CIRCULAR RECTO	**FÓRMULA**
	$v = h \times (\pi \times r^2)$

RESUMEN

En esta unidad se abordaron los fundamentos para hacer un análisis matemático, entre éstos destacan la definición de algunos conceptos básicos y la descripción de algunos procedimientos aritméticos.

En primera instancia se definió al conjunto como aquella colección o reunión de elementos, que en el caso de la aritmética se representan con letras mayúsculas y a los elementos que lo conforman con letras minúsculas.

Siendo los números un elemento importante no solo en los conjuntos sino en la aritmética en general, se habló sobre las propiedades de los mismos, encontrando así los conjuntos de los números naturales (N), los enteros (Z), los racionales (Q), los irracionales (I) y los reales (R).

De igual manera, se estudiaron los elementos para hacer un análisis algebraico, entendiendo que las variables son letras que representan cantidades desconocidas en una expresión algebraica, dichas variables se representan siempre con las últimas letras del abecedario. Las expresiones algebraicas pueden ser de un solo término, en cuyo caso se denominan monomios, o bien, de dos términos, llamados polinomios, con los cuales pueden hacerse operaciones tales como sumas, restas y multiplicaciones.
Así mismo se abordó el estudio de las ecuaciones de primer y segundo grado, así como su ubicación en un plano cartesiano.

Se incorporó también el estudio de las rectas y los ángulos, y los distintos teoremas para la resolución de las ecuaciones que implican el uso de ángulos y rectas.

En esta unidad también se abordó la clasificación de los triángulos y las propiedades de los mismos, para posteriormente examinar algunos elementos de resolución de perímetros y áreas, proporcionando un par de formularios que serán de utilidad para realizar dichos cálculos en diferentes figuras.

Como se puede apreciar, todos los elementos estudiados en esta unidad son de utilidad para la resolución de problemas aritméticos básicos que apoyen el uso del razonamiento lógico y matemático en la resolución de problemas cotidianos y, por ende, en la toma de decisiones.

BIBLIOGRAFÍA

SUGERIDA

Baldor, A. (1980). *Álgebra*. Madrid: Códice.

Baldor, A. (1991). *Geometría plana y del espacio con una introducción a la trigonometría*. México: Cultural.

Budnick, F. (2007). *Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales*. México: McGrawHill.

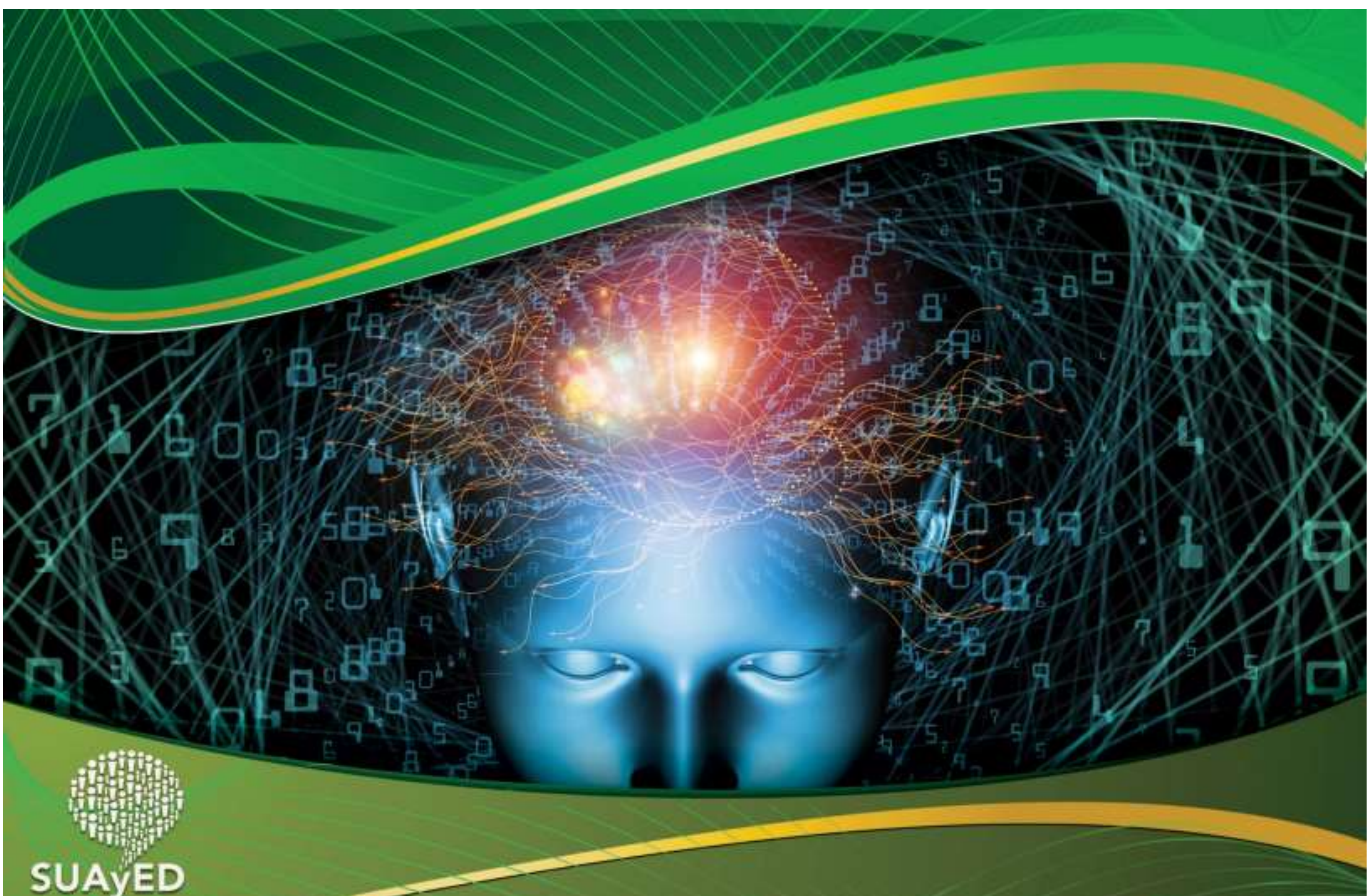
Cárdenas, H. y otros (1986). *Álgebra superior*. México: Trillas.

Hemmerling, E. M. (1971). *Geometría elemental*. México: Centro Regional de Ayuda Técnica (AID).

Zubieta, G. (1992). *Taller de lógica matemática (Análisis lógico)*. México: McGrawHill.

Unidad 2.

Introducción a las evaluaciones de habilidades cuantitativas



OBJETIVO PARTICULAR

Al término de esta unidad, el alumno identificará la estructura de los ejercicios de *problem solving* y *suficiencia de datos.*

TEMARIO DETALLADO

(4 horas)

2. Introducción a las evaluaciones de habilidades cuantitativas

2.1. Estructura y funcionamiento de las evaluaciones de habilidades cuantitativas
2.1.1. Estructura de los ejercicios *Problem Solving*
2.1.2. Estructura de los ejercicios *Data Sufficiency*

INTRODUCCIÓN

Como se mencionó en la introducción del curso, en esta asignatura se pretende cambiar el paradigma de razonamiento del alumno, en este sentido, lo más importante es identificar y resolver dos tipos de problemas que se presentan en esta sección y que son clasificados como problem solving y los data sufficiency.

Es de suma importancia considerar que para resolver los problemas del segundo tipo, será indispensable que el alumno tenga siempre a la mano la siguiente tabla:

Solución del problema	Justificación
A	La declaración (1) por sí sola es suficiente, pero la declaración (2) por sí sola no es suficiente.
B	La declaración (2) por sí sola es suficiente, pero la declaración (1) por sí sola no es suficiente.
C	Ambas declaraciones juntas son suficientes, pero ninguna declaración por sí sola es suficiente.
D	Cada declaración por sí sola es suficiente.
E	Ambas declaraciones no son suficientes.

2.1. Estructura de las evaluaciones de habilidades cuantitativas

Nota importante

El alumno debe estar consciente de que en estos dos tipos de problemas siempre se consideran números reales, que son los que se estudiaron en el capítulo 1 (no números complejos). De igual manera, NO debe considerar como información certera los dibujos que acompañan a los problemas, estos son meramente representativos y no necesariamente fidedignos.

2.1.1 Estructura de los ejercicios *problem solving*

Definitivamente en este nivel de estudios, el alumno cuenta con un amplio manejo de los problemas de opción múltiple, sin embargo, los denominados **Solución de problemas** se diferencian de los anteriores por contener respuestas que consideran los posibles errores en el estudiante, de esta manera no es tan sencillo determinar la respuesta correcta. A continuación se muestra un sencillo ejemplo de los posibles razonamientos en un problema de aritmética.

Ejemplo:

En un grupo de 70 estudiantes de la FCA que cursan la asignatura de Estadística I, 40% reprobó el primer examen parcial, 20% reprobó el segundo examen parcial y 10% reprobó ambos exámenes ¿cuál es la probabilidad de que un alumno de este grupo, elegido al azar haya reprobado el primer examen parcial; pero no el segundo?

- **A.** 4/7
- **B.** 3/7
- **C.** 2/5
- **D.** 3/10
- **E.** 1/10

Solución:

Primero se presentarán algunas formas de razonamiento ERRÓNEO que se presenta en los alumnos al tratar de resolver un problema como éste:

Caso 1. A primera vista, si no se tiene la más remota idea de cómo determinar la probabilidad, el alumno podría hacer un cociente inmediatamente de 40/70 puesto que se menciona 40% de 70 alumnos y podría contestar que la respuesta correcta es **A**.

Caso 2. Siguiendo un razonamiento completamente ilógico pero posible, podría ser que sumara 10% con 20% de los datos correspondientes y los dividiera entre 70, entonces elegiría la opción **B**.

Caso 3. Si se tienen más nociones de probabilidad, primero convertirá seguramente a número de alumnos el porcentaje de los que reprobaron el primer examen y lo dividiría entre el total: 28/70, que al simplificarse queda como 2/5 y corresponde a la respuesta **C**.

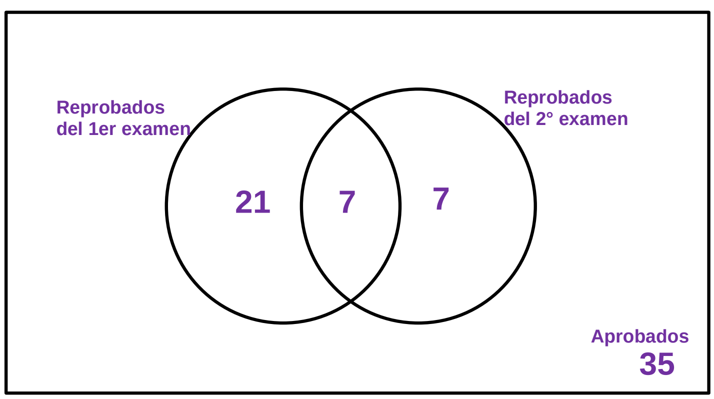
No obstante, el razonamiento correcto considera:

1. La probabilidad es un número entre 0 y 1.
2. Si trabaja con conjuntos, debe saber que el número de elementos en la unión de dos conjuntos, no es la suma de los elementos de cada uno, puesto que hay que restar una vez los elementos en la intersección.

Por tanto, se puede comenzar convirtiendo a números de alumnos, los porcentajes que se dan como información en el problema:

$$(\mathbf{0.4})(\mathbf{70}) = \mathbf{28}$$
$$(\mathbf{0.2})(\mathbf{70}) = \mathbf{14}$$
$$(\mathbf{0.1})(\mathbf{70}) = \mathbf{7}$$

Si el universo son los 70 alumnos, puede pensarse en el siguiente diagrama de Venn:



Recuerde que los alumnos que reprobaron ambos exámenes fueron 10%, es decir, 7 alumnos; pero estos se deben restar de aquellos que reprobaron el 1er examen y de los que reprobaron el 2° examen, por tanto, ya en el diagrama:

Es fácil ver que son solamente 21 los alumnos que reprobaron el primer examen; pero no el segundo.

De esta manera, son 21 de 70 alumnos la probabilidad buscada y como:

$$\frac{21}{70} = \frac{3}{10}$$

La respuesta correcta es **D**.

2.1.2 Estructura de los ejercicios *data sufficiency*

Los problemas de la categoría **suficiencia de datos** se caracterizan por constar de un enunciado que presenta un problema que requiere mayor información para poder resolverse y de dos enunciados adicionales enumerados con los incisos (1) y (2). Es completamente necesario que se examine con detenimiento la pregunta y cada una de las dos declaraciones que se le proporcionan y solo de esta manera se podrá elegir la respuesta adecuada, consistente en elegir una de las siguientes opciones:

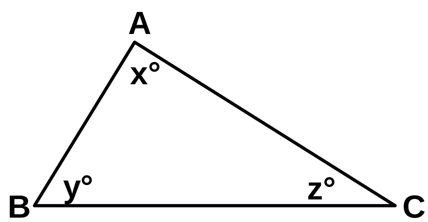
Solución del problema	Justificación
A	La declaración (1) por sí sola es suficiente, pero la declaración (2) por sí sola no es suficiente.
B	La declaración (2) por sí sola es suficiente, pero la declaración (1) por sí sola no es suficiente.
C	Ambas declaraciones juntas son suficientes, pero ninguna declaración por sí sola es suficiente.
D	Cada declaración por sí sola es suficiente
E	Ambas declaraciones no son suficientes

Es justamente este tipo de problemas los que desconoce por completo el alumno y, generalmente, cuestan mucho más trabajo de analizar y responder correctamente.

Se recomienda al alumno imprimir esta tabla y tenerla siempre a la mano para resolver los problemas de esta categoría.

Ejemplo:
En el triángulo ABC determine el valor del ángulo “x” en grados.

(1) $\overline{\mathbf{AC}} = \overline{\mathbf{BC}}$
(2) *y=40*



Solución:

1) Analice primero la información del enunciado (1) **sin** considerar la información del enunciado (2):

$$\overline{\mathbf{AC}} = \overline{\mathbf{BC}}$$

Con esta información se sabe que el triángulo es isósceles; pero no aporta más información y existen una infinidad de medidas de ángulos para los triángulos isósceles, por tanto **no se puede solucionar el problema solo con este enunciado.**

2) Como siguiente paso, se analiza la oración (2) **sin** considerar la información del enunciado (1):

$$\mathbf{y = 40}$$

Con esta información se sabe la medida de uno de los ángulos del triángulo; pero se desconoce qué tipo de triángulo es, podría ser escaleno o isósceles, por tanto **no se puede solucionar el problema solo con este enunciado.**

3) Ahora se analizará si se puede resolver el problema conjuntando los enunciados (1) y (2):

$$\mathbf{\overline{AC} = \overline{BC}}$$

$$\mathbf{y = 40}$$

Conjuntando la información se sabe que la figura es un triángulo isósceles y que el ángulo diferente tiene una medida de 40° y el ángulo "**x**" es igual al ángulo "**z**"; además, recordando que la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es de **180°** se tiene:

$$\mathbf{40 + 2x = 180}$$

$$\mathbf{2x = 180 - 40}$$

$$\mathbf{x = \frac{140}{2}}$$

$$\mathbf{x = 70}$$

La respuesta correcta a este problema es: **C. Ambas declaraciones juntas son suficientes, pero ninguna declaración por sí sola es suficiente.**

Observación: Este tema, en particular, se considera uno de los más difíciles de manejar por presentar al estudiante una nueva manera de razonamiento en las matemáticas.

RESUMEN

Los ejercicios de solución de problemas (*problem solving*) contienen respuestas que consideran los errores que comete o puede cometer la persona que soluciona el ejercicio, de ahí que no resulta tan sencillo determinar la respuesta correcta.

Por otro lado, los ejercicios de Suficiencia de datos (*data sufficiency)* consisten en un enunciado que contiene un problema que necesita de mayor información para ser resuelto y de dos enunciados adicionales (1) y (2) que sirven de apoyo para la resolución. La recomendación en este caso es estudiar con detenimiento la pregunta del problema y los dos enunciados para poder resolver adecuadamente el ejercicio.

Al respecto, existen una serie de justificaciones para cada tipo de problema con que podemos encontrarnos y que serán de utilidad para su resolución:

- Problema A: La declaración (1) por sí sola es suficiente, pero la declaración (2) por sí sola no es suficiente.
- Problema B: La declaración (2) por sí sola es suficiente, pero la declaración (1) por sí sola no es suficiente.
- Problema C: Ambas declaraciones juntas son suficientes, pero ninguna declaración por sí sola es suficiente.
- Problema D: Cada declaración por sí sola es suficiente.
- Problema E: Ambas declaraciones no son suficientes.

BIBLIOGRAFÍA

SUGERIDA

The official guide for GMAT Review (12th ed.) (2009). Hoboken, New Jersey: Wiley Publishing Inc.

Unidad 3.

Solución de problemas y suficiencia de datos

OBJETIVO PARTICULAR

Al término de esta unidad, el alumno analizará y resolverá problemas por medio de la lógica matemática.

TEMARIO DETALLADO

(12 horas)

3. Solución de problemas y suficiencia de datos

3.1	Análisis, comprensión y resolución de ejercicios *problem solving*
3.2	Análisis, comprensión y resolución de ejercicios de suficiencia de datos (*data sufficiency)*

INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se presentó de manera precisa en qué consisten los dos tipos de problemas que considera el GMAT en la parte cuantitativa. En esta sección se presentarán más ejemplos detallados para que tú como alumno te familiarices aún más con estos tipos de problemas y hagas un intento por resolver los problemas que se anexan.

En ese sentido, es importante conocer el proceso mediante el cual se puede resolver un problema, ya que la resolución de una problemática debe ser ordenada y sistematizada, en esta unidad se desglosará dicho proceso a través de ejemplos, para que sea más sencillo para ti comprender esta temática.

Cabe mencionar que es fundamental que se analice, ejemplifique y se tenga práctica en la resolución de problemas, ya que ello propiciará una mejor toma de decisiones profesionales.

3.1 Análisis, comprensión y resolución de ejercicios *problem solving*

A continuación se presentarán ejemplos adicionales de los problemas de solución prototipo de los que se incluyen en la parte cuantitativa del examen GMAT.

Ejemplo 1

El precio de un refrigerador es de $10,350.00 ¿Cuánto costaba hace un año, si aumentó 11.7%?

A. $ 9,139.05
B. $ 10,230.30
C. $ 5,219.36
D. $ 9,265.90
E. $ 11,721.40

Solución:

Note usted que el precio base, o el que corresponde al 100% sería el que tenía el año pasado y por tanto se debe considerar el nuevo precio como equivalente al 111.7%. Utilizando una sencilla regla de tres:

$$\begin{array}{cc} \mathbf{111.7\%} & \mathbf{10350} \\ \mathbf{100\%} & \mathbf{x} \end{array}$$

Y el resultado es $\mathbf{x} = \mathbf{9265.89}$, por tanto, la solución corresponde al inciso (d).

Sin embargo, es completamente común que el alumno interprete el precio actual como base, es decir, el 100% y realice una resta a 100 del 11.7, de esta manera el planteamiento es el siguiente:

$$\begin{array}{cc} \mathbf{100\%} & \mathbf{10350} \\ \mathbf{88.3\%} & \mathbf{x} \end{array}$$

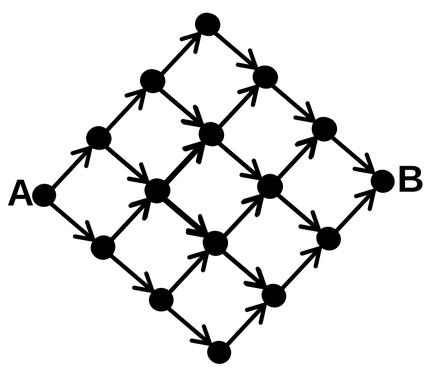
Y el resultado es $\mathbf{x} = \mathbf{9139.05}$ que es INCORRECTO y así aparece en el inciso (a).

Ejemplo 2

¿De cuántas formas distintas se puede llegar del punto A al punto B?

(Se debe respetar el sentido de las flechas).

A. 10
B. 12
C. 16
D. 20
E. 24



Solución*:*

Para poder resolver este ejercicio, se debe conocer previamente el triángulo de Pascal o, simplemente, ver el problema del punto A al punto B paulatinamente, es decir, trace una línea recta que pase por los dos puntos más cercanos al punto A, a cada uno de ellos se puede llegar de una sola forma. Trace una recta paralela a la anterior, esta corresponde a tres puntos: al que está hasta arriba se puede llegar de una sola forma, al que está en medio de dos formas distintas y al que está abajo solo de una forma. Trace otra recta paralela a la anterior, encontrará cuatro puntos, al de abajo y al de arriba se puede llegar de una sola forma; sin embargo, a los que están en el centro se pueden llegar de dos formas, por la ruta superior se llega de una sola forma y a la de abajo por dos formas, por tanto se tienen 1+2= 3 formas distintas de llegar a cada punto del centro. Siguiendo este razonamiento, se llega a la solución: **20 formas distintas**. Cualquier otra manera de contabilizar las rutas posibles, propiciaría un posible error.

3.2. Análisis, comprensión y resolución de ejercicios de suficiencia de datos (*data sufficiency*)

Para comprender los ejemplos que se presentan a continuación, tenga a la mano la tabla de posibles respuestas a cada problema (que se estudió en la unidad dos) y recuerde este algoritmo:

1. Se tratará de resolver el problema con el enunciado (1) sin tomar en consideración la información del enunciado (2) y, aunque se encuentre la solución, llevar a cabo el paso 2.
2. Se tratará de resolver el problema con el enunciado (2) sin tomar en consideración la información del enunciado (1)
3. Si ya pudo resolver el problema, entonces:
    a. Con ambos enunciados por separado, la respuesta correcta es D
    b. Con el enunciado (1), pero no con el (2), la respuesta correcta es A
    c. Con el enunciado (2), pero no con el (1), la respuesta correcta es B
4. Si NO ha podido resolver el problema, entonces una la información de ambos enunciados y:
    a. Si pudo resolver el problema, la respuesta correcta es C
    b. Si NO pudo resolver el problema, la repuesta correcta es E

Ejemplo 1

Luisa compró un vestido que tenía descuentos extraordinarios y pagó por él $280.00 ¿Cuál era el precio original?

(1) El vestido tenía 50% más 20% de descuento.
(2) Luisa pagó por su vestido sólo 40% de su precio original.

Solución

1) Se aconseja al alumno iniciar recabando la información que tiene en el enunciado general, en este caso lo que pagó por el vestido ya con el descuento, es decir, $280.00

2) Como siguiente paso, se analiza la oración *(1) El vestido tenía 50% más 20% de descuento*. Con esta información se trata de determinar el precio original, entonces:

Sea $\mathbf{P = precio\ original\ del\ vestido}$

Si el vestido tenía el 50% de descuento, entonces se tenía un precio inicial:

$$\mathbf{P_1 = P - 0.5P = 0.5P}$$

Si el vestido tenía 20% de descuento adicional, entonces se tenía un precio inicial:

$$\mathbf{P_2 = P_1 - 0.2P_1 = 0.8P_1 = 0.8(0.5P) = 0.4P}$$

Con el precio final que se pagó se tiene:

$$\mathbf{280 = 0.4P}$$

$$\mathbf{\frac{280}{0.4} = P}$$

$$\mathbf{700 = P}$$

Por lo tanto, con el enunciado (1) se puede resolver el problema; pero falta analizar el enunciado (2), por eso **no se debe contestar aún la respuesta** con base en la tabla.

3) Ahora se analiza el enunciado *(2) Luisa pagó por su vestido sólo 40% de su precio original*. **sin considerar la información del enunciado** (1), entonces:

Si Luisa pagó por el vestido el 40% del precio original:

$$\mathbf{280 = 0.4P}$$

$$\mathbf{\frac{280}{0.4} = P}$$

$$\mathbf{700 = P}$$

Por lo tanto, con el enunciado (2) TAMBIÉN se puede resolver el problema.

La respuesta correcta a este problema es: **D, cada declaración por sí sola es suficiente.**

Ejemplo 2

Una compañía fabrica dos tipos de muebles el A y el B. ¿cuántos muebles deben vender de cada tipo para obtener utilidades totales de $130,000.00?

(1) Las utilidades netas que genera la venta de cada mueble es de $250.00 y $350.00 para los del tipo A y B, respectivamente.

(2) El fabricante ha determinado que se pueden vender 20% más de los muebles A que de los del tipo B.

Solución

1) La información que tiene el enunciado general, es que se quieren obtener utilidades totales de $130,000.00 y que hay dos tipos de muebles, entonces sean:

$$\mathbf{x = \text{número de muebles del tipo A a vender}}$$
$$\mathbf{y = \text{número de muebles del tipo B a vender}}$$

2) Como siguiente paso, se analiza la oración *(1) Las utilidades netas que genera la venta de cada mueble es de $250.00 y $350.00 para los del tipo A y B, respectivamente*. Con esta información se define el modelo:

$$\mathbf{250x + 350y = 130,000}$$

Verifique usted que esta ecuación lineal es una recta y, por tanto, tiene una infinidad de valores que satisfacen la igualdad.

Por lo tanto, con el enunciado (1) NO se puede solucionar el problema; pero falta analizar el enunciado (2).

3) Ahora se analiza el enunciado *(2) El fabricante ha determinado que se puede vender 20% más de los muebles A que de los del tipo B*. **Sin considerar la información del enunciado** (1), entonces se construye el modelo:

$$\mathbf{x = y + 0.2y}$$

y operando, queda:

$$\mathbf{x - 1.2y = 0}$$

Por lo tanto, con el enunciado (2) **no** se puede resolver el problema, porque nuevamente se encontró la ecuación de una recta, en este caso pasa por el origen y, también tiene una infinidad de soluciones.

4) Analice ahora la información de los enunciados (1) y (2) conjuntamente:

$$\mathbf{250x + 350y = 130,000}$$
$$\mathbf{x - 1.2y = 0}$$

Observe que éste es un sistema de ecuaciones lineales de 2x2 y que sí tiene solución:

$$\mathbf{x} = \mathbf{240} \quad \text{y} \quad \mathbf{y} = \mathbf{200}$$

La respuesta correcta a este problema es: **C. Ambas declaraciones juntas son suficientes, pero ninguna declaración por sí sola es suficiente.**

RESUMEN

En esta unidad se desglosaron los procesos de resolución de problemas con los dos modelos matemáticos que se abordaron en la unidad anterior: *problem solving* y *data sufficiency*, ello con la finalidad de expresar más claramente cómo se utilizan dichos modelos en la resolución de problemas.

Al tener estos dos modelos matemáticos para la resolución de problemas se tienen varias opciones para poder enfrentar una problemática de manera sistematizada y ordenada, lo cual llevará necesariamente a una manera más sencilla de encontrar una solución. De ahí la importancia de abordar de manera práctica estas temáticas.

BIBLIOGRAFÍA

SUGERIDA

The oficial guide for GMAT Review (12th ed.) (2009). Hoboken, New Jersey: Wiley Publishing Inc.

Unidad 4.
Álgebra y tópicos especiales de matemáticas

OBJETIVO PARTICULAR

Al término de la unidad, el alumno desarrollará habilidades de comprensión, análisis y razonamiento matemático para la resolución de problemas de la vida real.

TEMARIO DETALLADO

(16 horas)

4. Álgebra y tópicos especiales de matemáticas
4.1. Construcción de modelos algebraicos
4.1.1. Introducción al modelado
4.1.2. Convirtiendo texto en expresiones y ecuaciones
4.1.3. Representación gráfica de ecuaciones lineales
4.2. Análisis cuantitativo
4.2.1. Definición del problema
4.2.2. Desarrollo del modelo
4.2.3. Datos de entrada
4.2.4. Solución y análisis de resultados
4.2.5. Implementación

INTRODUCCIÓN

En esta unidad se pretende lograr que como alumno aprendas a construir modelos matemáticos de problemas cotidianos y, con la teoría aprendida en el capítulo 1, también resolver estos problemas.

Se inicirá con problemas muy sencillos y paulatinamente se aumentará la dificultad de los mismos, en cada uno habrá que resolver una problemática, pero definiendo paso a paso el proceso mediante el cual se ejacutará dicha solución.

4.1. Construcción de modelos algebraicos

4.1.1 Introducción al modelado

Se le recomienda al alumno comenzar leyendo con atención toda la información contenida en los enunciados del problema, posteriormente, determinar qué le están preguntando, eso es crucial para determinar el número de variables involucradas.

4.1.2 Convirtiendo texto en expresiones y ecuaciones

Ejemplo 1
Julio le dijo a Luis adivina cuántas canicas tengo, y te doy la cuarta parte menos dos canicas o, lo que es igual, la sexta parte más una canica.

- **Modelo**

La incógnita por determinar es el número de canicas que tiene Julio, esa será la variable del problema:

$$\mathbf{x = n\acute{u}mero\ de\ canicas\ que\ tiene\ Julio}$$

Con la demás información se construye la siguiente igualdad:

$$\mathbf{\frac{x}{4} - 2 = \frac{x}{6} + 1}$$

Ese es el modelo matemático correspondiente, ahora despeje el valor de la incógnita:

$$\mathbf{\frac{x}{4} - 2 = \frac{x}{6} + 1}$$
$$\mathbf{\frac{x-8}{4} = \frac{x+6}{6}}$$
$$\mathbf{6(x-8) = 4(x+6)}$$
$$\mathbf{6x - 48 = 4x + 24}$$
$$\mathbf{6x - 4x = 48 + 24}$$
$$\mathbf{2x = 72}$$
$$\mathbf{x = 36}$$

Se concluye entonces que Julio tiene 36 canicas.

Ejemplo 2

Paola y su hermana juntaron su dinero para ir al cine, ambas juntaron $200.00 pero la diferencia entre la dieciseisava parte del dinero de Paola menos la décima parte del dinero de su hermana es $6.00 ¿Cuánto tenía originalmente cada una?

- **Modelo**

En este problema se tienen que obtener dos incógnitas, una para cada cantidad de dinero de Paola y su hermana:

$$\mathbf{x = dinero\ de\ Paola}$$
$$\mathbf{y = dinero\ de\ la\ hermana\ de\ Paola}$$

Con estas variables se pueden construir el modelo:

$$\mathbf{x + y = 200}$$
$$\mathbf{\frac{1}{16}x - \frac{1}{10}y = 6}$$

Que es un sistema de ecuaciones lineales de 2x2, por tanto se puede resolver con cualquiera de los métodos aprendidos en el capítulo 1 y se obtienen los siguientes valores:

$$\mathbf{x = 160}$$
$$\mathbf{y = 40}$$

Ejemplo 3
Si el número de turistas que hace un recorrido en el Turibus de la Ciudad de México es exactamente 30, se les cobra $270.00 por persona. Si el número de pasajeros excede a las 30 personas, se cobrará $5.00 menos a cada pasajero adicional. ¿Cuál es el número de turistas que debe llevar un Turibus para maximizar los ingresos?

- **Modelo**

Considere que una función de ingresos dependerá del número de pasajeros, puesto que se multiplica el costo del pasaje por el número de pasajeros. Solo que en este caso hay dos tipos de pasajeros:

Para los primeros 30:

$$\mathbf{30 \times \$270 = \$8100}$$

Para los pasajeros adicionales, que no se sabe cuántos llevar para obtener el máximo ingreso:

$$\mathbf{x = número\ de\ pasajeros\ adicionales\ a\ los\ primeros\ 30}$$

Entonces:

$$\mathbf{x \times \$(270 - 5x) = 270x - 5x^2}$$

Ahora se suman para obtener la función de ingresos:

$$\mathbf{I(x) = -5x^2 + 270x + 8100}$$

Con la teoría vista en el capítulo 1, se sabe que el máximo de una cuadrática se encuentra en el vértice, en particular en la abscisa (la fórmula está en ese capítulo), por tanto:

$$\mathbf{V_x = \frac{-b}{2a} = \frac{-270}{(2)(-5)} = \frac{-270}{-10} = 27}$$

Pero recuerde que x representaba el número de pasajeros adicionales a los 30 que abordaron primero el Turibus, por tanto, la respuesta al problema es:

Se requieren 57 pasajeros en total para obtener el mayor ingreso.

4.1.3 Representación gráfica de ecuaciones lineales

Una ecuación lineal, es la expresión algebraica de una recta en el plano cartesiano, entonces existe una sola representación de cada una si se determinan los valores de dos puntos por los que pasa. A continuación se presentará una forma muy sencilla de encontrar estos puntos.

La ecuación de la recta tiene cualquiera de las siguientes formas:

$$\mathbf{y = mx + d \quad o \quad ax + by = c}$$

En el caso de la izquierda, es muy sencillo dar dos valores a la variable $\mathbf{x}$ para obtener los valores correspondientes a la $\mathbf{y}$, que depende del valor de x. Con dos valores $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$ se obtienen los correspondientes valores $\mathbf{y_1}$ y $\mathbf{y_2}$ y, por tanto: ($\mathbf{x_1}$, $\mathbf{y_1}$) y ($\mathbf{x_2}$, $\mathbf{y_2}$).

En el caso de la ecuación del lado derecho, vemos otros subcasos, con base en el valor de “c”.

Si $\mathbf{c \neq 0}$ entonces es una recta que corta a los ejes coordenados y la forma más sencilla de encontrar los dos puntos donde corta es:

$$\mathbf{Si\ x = 0\ entonces\ by = c\ \Rightarrow y = \frac{c}{b}\quad por\ lo\ tanto\ P_1 = \left(0, \frac{c}{b}\right)}$$
$$\mathbf{Si\ y = 0\ entonces\ ax = c\ \Rightarrow x = \frac{c}{a}\quad por\ lo\ tanto\ P_1 = \left(\frac{c}{a}, 0\right)}$$

Si $\mathbf{c = 0}$ entonces es una recta que pasa por el origen (0,0), entonces ya se conoce un punto por el que pasa, falta solamente determinar otro punto y la forma más sencilla de encontrarlo es la siguiente:

Escriba una pareja de coordenadas colocando en la abscisa el factor de “y”, y en la ordenada el factor de “x”; posteriormente, cambie el signo de cualquiera de las dos coordenadas, de esta manera se pueden encontrar dos puntos simétricos adicionales al origen:

$$\mathbf{(-b, a)\quad y\quad (b, -a)}$$

Ejemplo 1

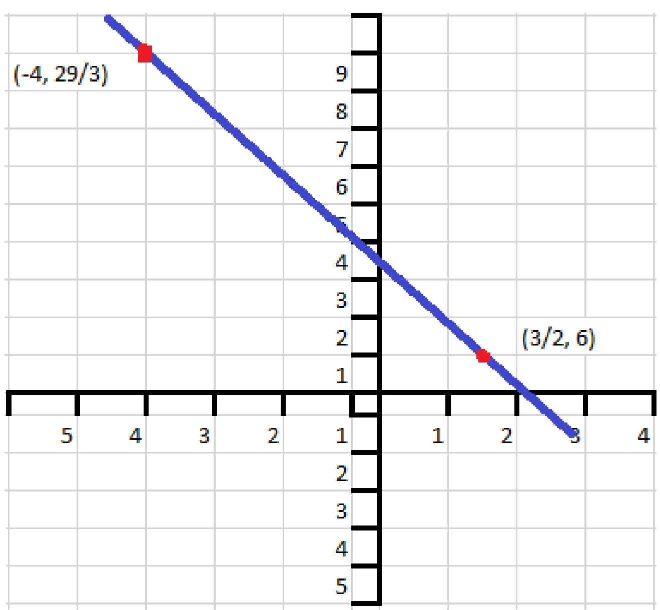
$$y = \frac{-2}{3}x + 7$$

Se asignan los siguientes valores de x:

- **Sustitución:**

$y = \frac{-2}{3}\left(\frac{3}{2}\right) + 7$	y	$y = -\frac{2}{3}(-4) + 7$
$y = \frac{-6}{6} + 7$		$y = \frac{8}{3} + 7$
$y = -1 + 7$		$y = \frac{29}{3}$
$y = 6$		

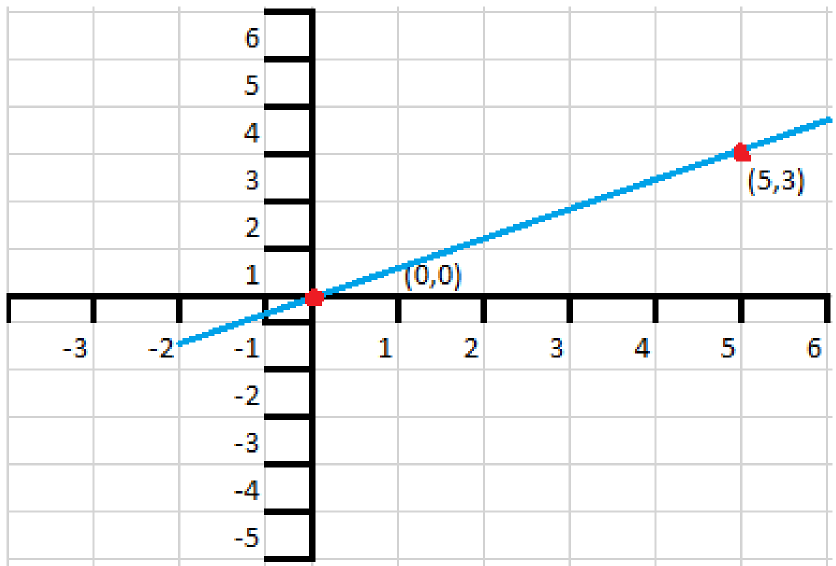
Por tanto, se obtuvieron los puntos $\left(\frac{3}{2}, 6\right)$ y $\left(-4, \frac{29}{3}\right)$ con los que ya se dibuja la recta:



Ejemplo 2

3x – 5y = 0

Recuerde que esta recta pasa por el origen y la forma en que se recomendó encontrar el otro punto por el que pasa, se encuentran los puntos $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ $\boldsymbol{y}$ $(\mathbf{5},\mathbf{3})$ con los que ya se dibuja la recta:



Ejemplo 3

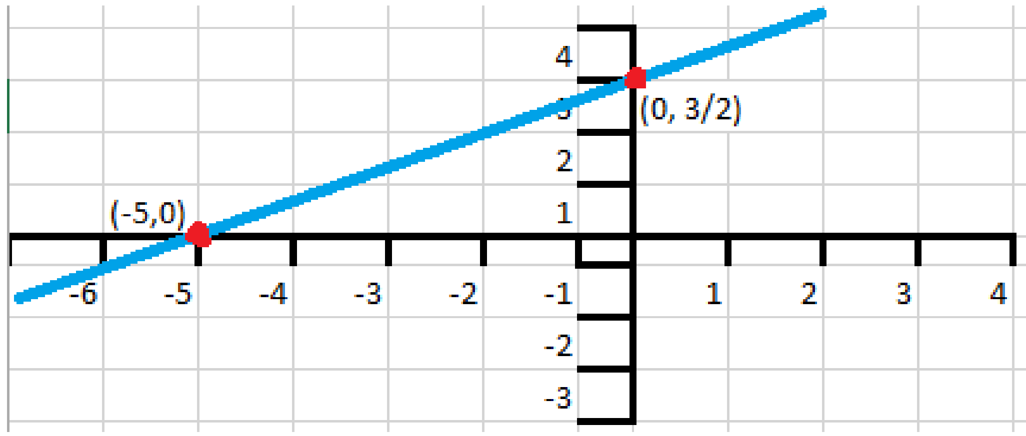
- 2x + 4y = 10

Recta que corta a los dos ejes coordenados, entonces se determinan los puntos con el razonamiento:

Si x = 0 ⟹ y = $\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$ ⟹ (0, $\frac{5}{2}$)

Si x = 0 ⟹ x = $\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{-2}} = \mathbf{-5}$ ⟹ (-5, 0)

Con los que ya se dibuja la recta:



Ejemplo 4

Un sistema de ecuaciones de 2x2 es precisamente una pareja de rectas:

$$3x + 2y = 0$$
$$-5x + y = 7$$

Siguiendo un razonamiento análogo al ejemplo 3, pero para ambas rectas, se tiene:

L_1 = 3x + 2y = 10

Si x = 0 ⟹ y = -5 ⟹ (o,-5)

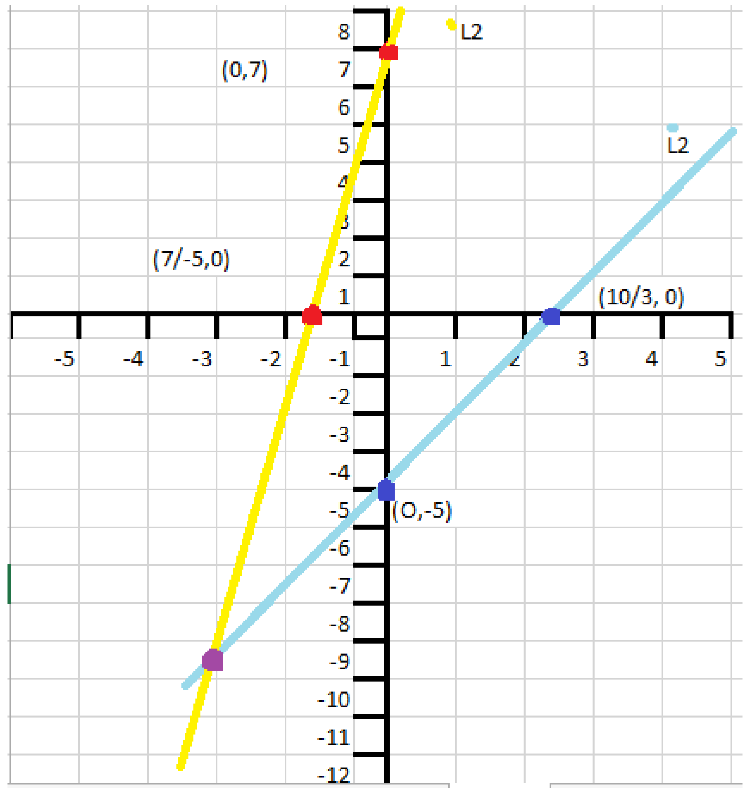
Si y = 0 ⟹ x = $\frac{10}{3}$ ⟹ $(\frac{10}{3}, 0)$

L_2 = -5X + y = 7

Si x = 0 ⟹ y = 7 ⟹ (0,7)

Si y = 0 ⟹ x = $\frac{7}{-5}$ ⟹ $(\frac{7}{-5}, 0)$

Y ya se pueden dibujar las rectas:



Ejemplo 5

Otro sistema de ecuaciones de 2x2 para finalizar y reafirmar conocimientos:

$$-2x + 5y = 9$$
$$4x - 3y = -4$$

L_1 = - 2X + 5Y = 9

Si x = 0 → y = $\frac{9}{5}$ → (0, $\frac{9}{5}$)

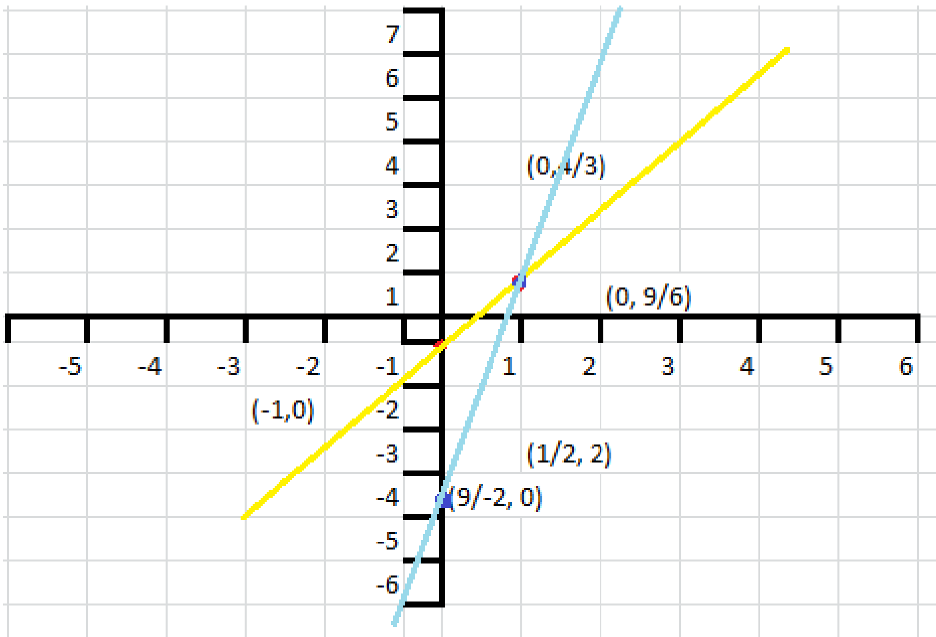
Si y = 0 → x = $\frac{9}{-2}$ → ($\frac{9}{-2}$, $\mathbf{0}$)

L_2 = 4x – 3y = - 4

Si x = 0 → y = $\frac{-4}{-3}$ = $\frac{4}{3}$ → (0, $\frac{4}{3}$)

Si y = 0 → x = $\frac{-4}{4}$ → (-1, 0)

Y ya se pueden dibujar las rectas:



Representación gráfica de ecuaciones cuadráticas

$$y = ax^2 + bx + c$$

Algoritmo

1. Revisar el signo de *a*

$a > 0$ ⟹

$a < 0$ ⟹

2. Determinar la intersección de los ejes coordenados

Si $x = 0$ ⟹ $y = c$ ⟹ (0, c)

Si $y = 0$ $\Longrightarrow$ $ax^2 + bx + c = 0$

- Al resolver la ecuación se obtienen dos valores de x

$(x_1,0)$ y $(x_2,0)$

3. Determine las coordenadas del vértice

$$(V_x,V_y) = \left[\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right]$$

Ejemplo 1

$y = -2x^2 + 5x + 3$

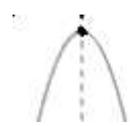
a = 2

b= 5

c= 3

1. Revisar el signo de *a*

***a* = -2 < 0** $\Longrightarrow$



2. Determinar la intersección con los ejes coordenados

Si $x = 0$ $\Longrightarrow$ $y = -2(0)^2 + 5(0) + 3$

$y = 3$

(0,3)

Si $y = 0$ $\Longrightarrow$ $0 = -2x^2 + 5x + 3$

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(-2)(3)}}{2(-2)}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{-4}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-5 \pm 7}{-4}$$

$$x_1 = \frac{-5+7}{-4} \qquad x_1 = -\frac{1}{2} \qquad \left(-{}^{1}\!/_{2}, 0\right)$$

$$x_2 = \frac{-5-7}{-4} \qquad x_2 = 3 \qquad (3, 0)$$

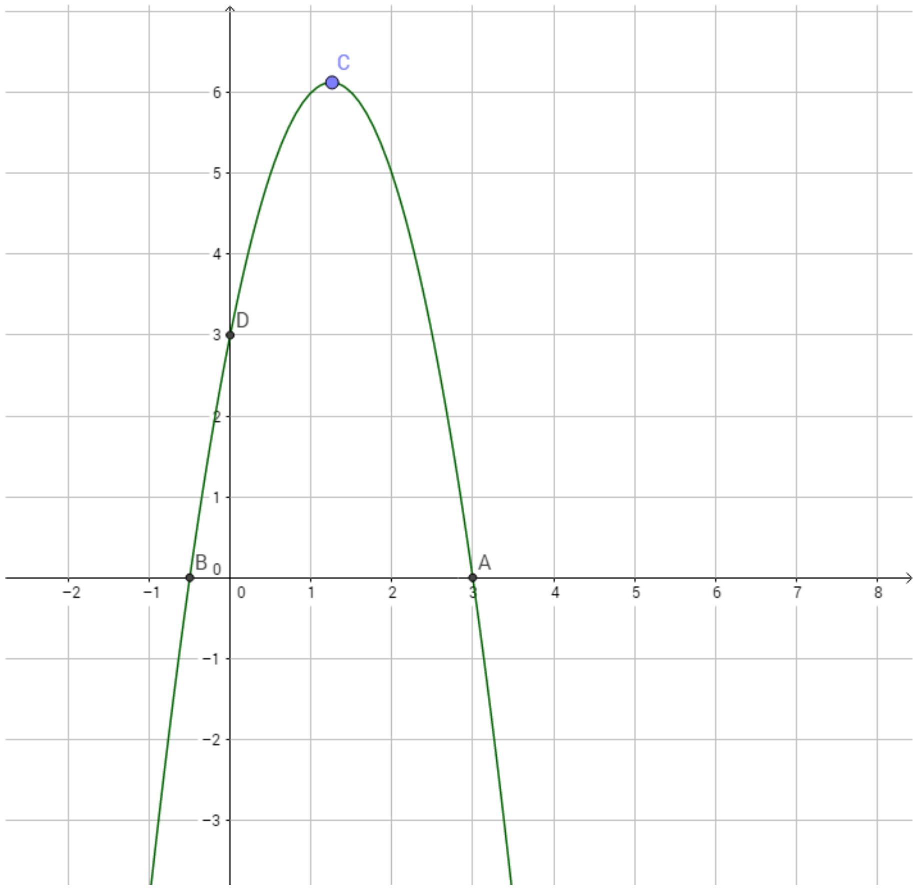
3. El vértice

$$V_x = \frac{-b}{2a} \qquad V_x = \frac{-5}{2(-2)} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}$$

$$V_y = \frac{4ac - b^2}{4a} \qquad V_y = \frac{4(-2)(3) - 5^2}{4(-2)} = \frac{-24 - 25}{-8} = \frac{-49}{-8} = \frac{49}{8}$$

$$\mathrm{Vx}, \mathrm{Vy} = \left(\frac{5}{4}, \frac{49}{8}\right) = (1.26, 6.12)$$

Gráfica 1



Ejemplo 2

$y = 3x^2 - 9x$

a= 3

b= -9

c= 0

1. Revisar el signo de *a*

a= 3 > 0 ⟹ 

2. Determinar la intersección con los ejes coordenados

Si x=0 ⟹ y = $3(0)^2 - 9(0)$

y= 0

(0,0)

Si y= 0 ⟹ 0= $3x^2 - 9x$

Forma 1 (factorización)

3x (x-3)=0

3x = 0 ⟹ x=0 (0,0)

x-3=0 ⟹ x=3 (3,0)

Forma 2 (fórmula general)

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-(-9) \pm \sqrt{9^2 - 4(3)(0)}}{2(3)}$$

$$x_1, x_2 = \frac{9 \pm \sqrt{81}}{6}$$

$$x_1, x_2 = \frac{9 \pm 9}{6}$$

$$x_1 = \frac{9+9}{6} \qquad x_1 = \frac{18}{6} = 3 \qquad (3, 0)$$

$$x_2 = \frac{9-9}{6} \qquad x_2 = \frac{0}{6} = 0 \qquad (0, 0)$$

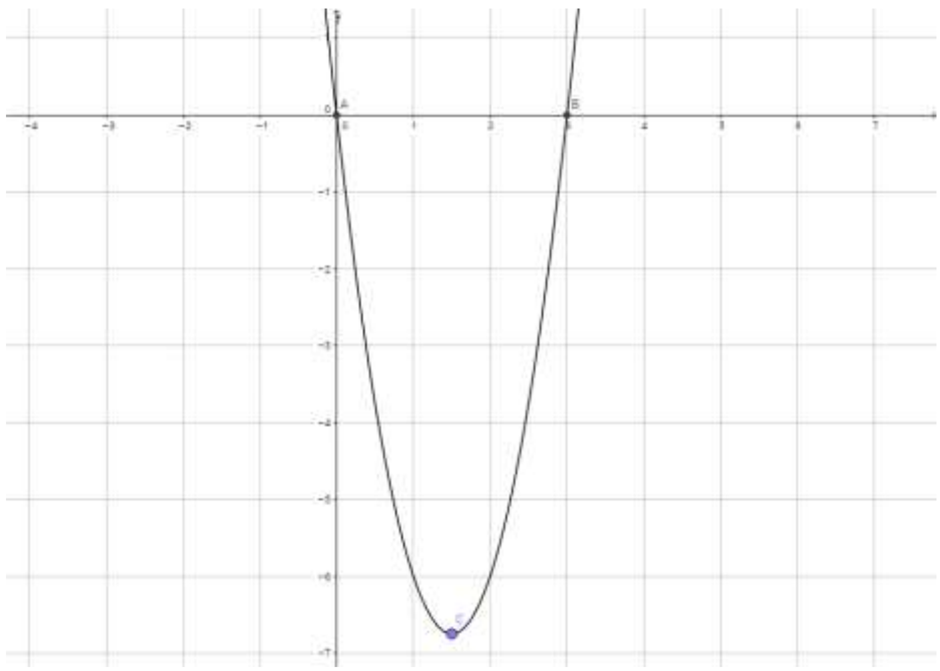
3. El vértice

$$V_x = \frac{-b}{2a} \qquad V_x = \frac{-(-9)}{2(3)} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$V_y = \frac{4ac - b^2}{4a} \qquad V_y = \frac{4(3)(0) - (9)^2}{4(3)} = \frac{0 - 81}{12} = \frac{-81}{12} = \frac{-27}{4}$$

$$\mathbf{Vx, Vy} = \left(\frac{3}{2}, \frac{-27}{4}\right) = (1.5, -6.75)$$

Gráfica 2



Ejemplo 3

y = -3x² +12

a= -3

b= 0

c= 12

1. Revisar el signo de *a*

a= - 3 < 0 $\Longrightarrow$ 

2. Determinar la intersección con los ejes coordenados

Si x=0 $\Longrightarrow$ $y = -3(0)^2 + 12$

y= 12

(0,12)

Si y= 0 $\Longrightarrow$ $0= -3x^2 +12$

Forma 1

$\boldsymbol{0= -3x^2 +12}$

$-12= -3x^2$

$$\frac{-12}{-3} = x^2$$

$4 = x^2$

$$\pm\sqrt{4} = x$$

$$+\sqrt{4} = x_1 \qquad x_1 = 2 \qquad (2,0)$$

$$-\sqrt{4} = x_1 \qquad x_1 = -2 \qquad (-2,0)$$

Forma 2 (fórmula general)

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-(-0) \pm \sqrt{0^2 - 4(-3)(12)}}{2(-3)}$$

$$x_1, x_2 = \frac{\pm\sqrt{144}}{-6}$$

$$x_1, x_2 = \frac{\pm 12}{-6}$$

$$x_1 = \frac{+12}{-6} \qquad x_1 = -2 \qquad (-2, 0)$$

$$x_2 = \frac{-12}{-6} \qquad x_2 = 2 \qquad (2, 0)$$

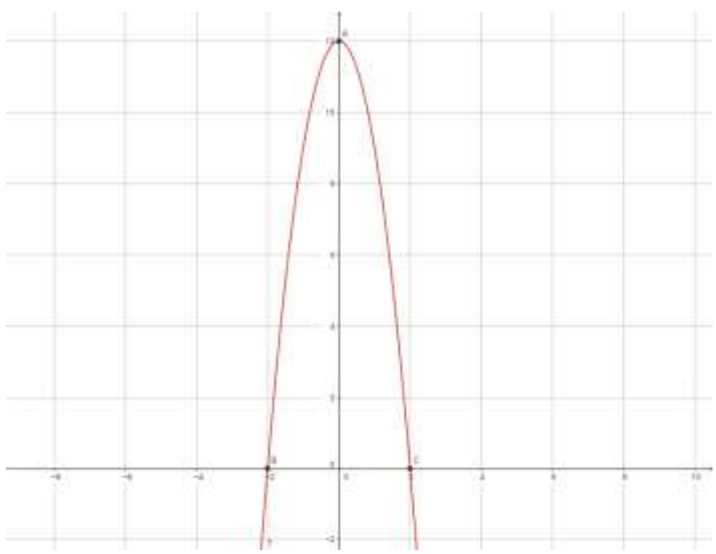
3. El vértice

$$V_x = \frac{-b}{2a} \qquad V_x = \frac{-(0)}{2(-3)} = \frac{0}{-6} = 0$$

$$V_y = \frac{4ac - b^2}{4a} \qquad V_y = \frac{4(-3)(12) - (0)^2}{4(-3)} = \frac{-144 - 0}{-12} = \frac{-144}{-12} = 12$$

$$(\mathrm{Vx}, \mathrm{Vy}) = (0, 12)$$

Gráfica 3



4.2. Análisis cuantitativo

4.2.1 Definición del problema

Como ya hemos visto en todos los temas previos, la definición de un problema es cualquier problemática que se presenta en la realidad y tiene solución.

4.2.2 Desarrollo del modelo

Un modelo se puede considerar a una fotografía o un dibujo, sin embargo, en matemáticas, nos referimos a un modelo que involucre variables, que representan las cantidades inciertas por determinar y que darían la solución al problema abordado y constantes que son cantidades numéricas involucradas con la problemática que ya se sabe su valor.

4.2.3 Datos de entrada

Lo que se consideran los datos de entrada son justamente las constantes definidas en el inciso (c).

4.2.4 Solución y análisis de resultados

Al determinar un modelo matemático (de tipo lineal, cuadrático, de programación lineal, etc.) se procede a resolverlo a través de las metodologías necesarias y, en muchas ocasiones, de software especializado.

Es preciso que, una vez encontrada la solución al problema, ésta sea validada con la realidad, pues si la solución no tiene relación con la realidad, eso implicaría que el modelo utilizado está errado o existen valores equívocos o, incluso, faltan datos o ecuaciones. Por ejemplo, suponga que está resolviendo un problema de producción y que al interpretar la solución, encuentra que de los productos tipo 3 debe producir -115, de inmediato puede afirmar que existe un error, puesto que en la vida real NO se pueden producir cantidades negativas de productos.

4.2.5 Implementación

Una vez que se tiene la certeza de que la solución encontrada es la correcta, simplemente se debe poner en práctica.

RESUMEN

En esta unidad se ejemplificaron los procesos de resolución de problemas con los dos modelos matemáticos que se abordaron en la unidad anterior: *problem solving* y *data sufficiency*, ello con la finalidad de que dichos procesos sean más claros para ti.

Recordemos que al tener estos dos modelos matemáticos para la resolución de problemas se tienen varias opciones para poder enfrentar una problemática de manera sistematizada y ordenada, lo cual llevará necesariamente a una manera más sencilla de encontrar una solución. De ahí la importancia de abordar de manera práctica estas temáticas.

BIBLIOGRAFÍA

SUGERIDA

Baldor, A. (1980). *Álgebra*. Madrid: Códice.

Baldor, A. (1991). *Geometría plana y del espacio con una introducción a la trigonometría.* México: Cultural.

Budnick, F. (2007). *Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales*. México: McGrawHill.

Cárdenas, H. y otros (1986). *Álgebra superior*. México:Trillas.

Hemmerling, E. M. (1971). *Geometría elemental*. México: Centro Regional de Ayuda Técnica (AID).

Zubieta, G. (1992). *Taller de lógica matemática* (*Análisis lógico*). México: McGrawHill.

Unidad 5.

Métodos cuantitativos aplicados a los negocios y la toma de decisiones

OBJETIVO PARTICULAR

Al término de la unidad, el alumno aprenderá a interpretar resultados de modelos matemáticos para sustentar la toma de decisiones.

TEMARIO DETALLADO

(12 horas)

5. Métodos cuantitativos aplicados a los negocios y la toma de decisiones

5.1. Aplicaciones de modelos matemáticos en la solución de problemas y en la toma de decisiones

INTRODUCCIÓN

Los principios del método cuantitativo son los mismos que los del método científico. A través de diversos estudios se asignan sus orígenes a partir del siglo XVIII. El desarrollo como *investigación de operaciones* (IO) se dio en el siglo XX, justamente en el transcurso de la Segunda Guerra Mundial, cuando los llamados Aliados (Reino Unido, Unión Soviética, Estados Unidos, Francia, etc.), congregaron a un grupo multidisciplinario de científicos para determinar tácticas de guerra que les permitieran vencer al bloque opositor (liderado por Alemania, Japón e Italia). Como se conoce, fueron los denominados aliados quienes ganaron la Segunda Guerra Mundial,. A las tácticas de guerra desarrolladas en este periodo se les conoció como investigación de operaciones (militares).

Al término de la guerra, en los países que quedaron devastados, se siguió utilizando para la reconstrucción de los mismos; pero, por ejemplo, en los Estados Unidos de Norteamérica se siguieron desarrollando algoritmos muy importantes que fueron integrándose en las organizaciones para su óptimo desarrollo en problemas de tipo logístico, el desarrollo de patrones de vuelo, planeación de maniobras navales, etc.

En la actualidad, el desarrollo de esta disciplina ha sido tan importante que su ámbito de aplicación abarca casi todas las disciplinas.

5.1. Aplicaciones de modelos matemáticos a la solución de problemas y en la toma de decisiones

A continuación se presentarán de manera breve las definiciones clave dentro de la *investigación de operaciones*, pero después se presentarán de manera más puntual los conceptos, modelos, algoritmos algebraicos y software de apoyo, que son herramientas indispensables en la *programación lineal.*

La *investigación de operaciones* es la aplicación del método científico para la solución de un problema específico, por un grupo multidisciplinario de personas, con un enfoque de sistemas.

Metodología

Se debe precisar que en la definición, la aplicación del método científico no es literal, evidentemente se deben adaptar cada uno de los pasos involucrados en la metodología. El siguiente cuadro presenta dicha adaptación.

Método científico	Metodología de la IO
Observación	Análisis del problema
Elaboración de hipótesis	Elaboración de un modelo (generalmente matemático)
Experimentación	Resolver el modelo
Comprobación	Comparar la solución con la realidad
Conclusión	Implantar la solución o modificar el modelo

Clasificación de problemas en Investigación de Operaciones

Existen diversas maneras de clasificar los tipos de problemas que pueden abordarse en IO, una de ellas es con base en la naturaleza de sus variables (puede variar):

Investigación de Operaciones

Determinísticos

- Programación Lineal
- Programación No Lineal
- Programación Entera y Binaria
- Teoría de Redes

Híbridos

- Programación dinámica
- Teoría de Inventarios
- Simulación
- Heurísticos

Estocásticos

- Teoría de Colas
- Cadenas de Markov
- Teoría de Juegos

Programación lineal

En esta sección se profundizará en la teoría y aplicación de los problemas de programación lineal, que son los más aplicados en diversas áreas.

Un problema de programación lineal (PPL) está conformado por una función objetivo (FO) de tipo lineal, a maximizar o minimizar en presencia de un conjunto de restricciones lineales de la forma $\leq, \geq \boldsymbol{o} =$.

$$
\begin{array}{l}
\boldsymbol{Maximizar\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n} \\
\boldsymbol{Sujeto\ a} \\
\begin{array}{ccc}
\boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n} & \leq & \boldsymbol{b_1} \\
\boldsymbol{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n} & \leq & \boldsymbol{b_2} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\boldsymbol{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n} & \leq & \boldsymbol{b_m} \\
\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n} & \geq & \boldsymbol{0}
\end{array}
\end{array}
$$

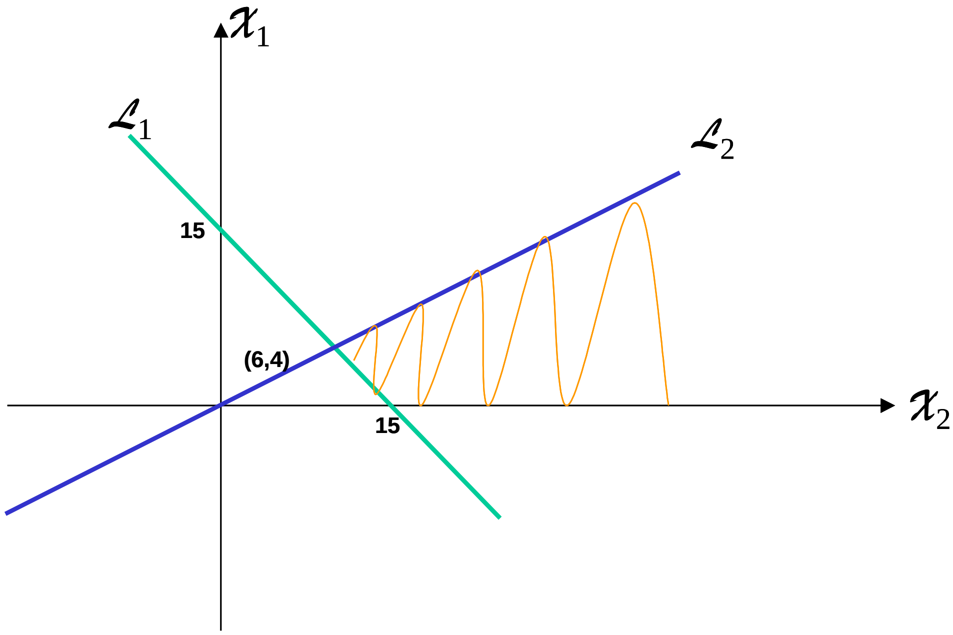
Un punto factible o solución factible es una *N-ada*[1] $\boldsymbol{x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0,\ n \geq 2}$, de valores reales tales que satisfacen la totalidad de restricciones.

Una región factible, es el conjunto de soluciones factibles.

Para observar gráficamente lo que representaría una región factible, se utilizará un problema de programación lineal (PPL) en dos variables, como el siguiente:

$$
\begin{array}{l}
\boldsymbol{Min\ z = 8x_1 + 6x_2} \\
\boldsymbol{Sujeto\ a} \\
\qquad \boldsymbol{x_1 + x_2 \geq 15} \\
\qquad \boldsymbol{-4x_1 + 6x_2 \leq 0} \\
\qquad\qquad\qquad \boldsymbol{x_1, x_2 \geq 0}
\end{array}
$$

[1] Se refiere a *N* número de elementos



A continuación, se deben dibujar en el plano cartesiano las distintas regiones que están acotando cada una de las restricciones lineales:

Nota que, por ejemplo, el punto de coordenadas (17,1) está en la región factible y satisface a la totalidad de restricciones del PPL, lo mismo ocurre con (17,2), (18,1), (19,1), (19,2), etc. Por tanto, existen una infinidad de parejas de números que satisfacen a las restricciones del PPL y los métodos para resolver este tipo de problemas encuentran la solución que maximice o minimice a la FO, según sea el caso.

Modelación de problemas de programación lineal

Los ejemplos que se presentan en esta sección son ficticios; pero muestran con claridad situaciones de la vida cotidiana que pueden modelarse matemáticamente a través de un PPL.

Lo más importante en el modelado de un problema de programación lineal (PPL):

1. Determinar si se quiere maximizar o minimizar, en algunos casos es muy sencillo (ganancias o costos, respectivamente)
2. Determinar las variables de decisión involucradas y su naturaleza:
   a. Continuas
   b. Enteras
   c. Binarias
3. Ubicar las restricciones y determinar si son $\geq$, $\leq$ o =.

Problema 1. La dieta

Una actriz de televisión está preocupada por su peso y el costo de la comida diaria. Para bajar de peso ella requiere consumir un máximo de 2000 kcal., pero, para mantenerse nutrida requiere un mínimo de 400 mg de vitaminas diversas, 325 mg de proteínas y 125 mg de calcio; los demás nutrientes los tomará en cápsulas.

La actriz ha elegido alimentos que le gustaría incluir en su dieta, que son baratos y nutritivos.

Alimento	Porción	Kcal	Vitaminas (mg)	Proteínas (mg)	Calcio (mg)	Costo ($)
Huevo	1 pieza	30	15	35	25	2.00
Frutas	1 plato	40	25	10	----	50.00
Pollo en mole	Pierna con muslo	75	20	50	15	75.00
Cerdo en verdolagas	Dos trozos	100	25	65	10	95.00
Leche	1 taza	25	20	15	14	10.00
Pan o tortilla	2 piezas	43	15	----	20	5.00

Al analizar la tabla, la actriz se percató de que podría satisfacer su problema consumiendo únicamente cerdo con verdolagas, por lo que decidió considerar que diariamente puede comer como máximo: cuatro porciones de huevo, dos de fruta, dos de pollo, dos de cerdo, tres de leche y cuatro de pan o tortilla.

Solución

Primero, se debe definir lo que va a significar cada una de las variables de decisión, en este caso la cantidad de porción que se va a incluir en la dieta diaria, de manera que el costo sea mínimo y se satisfagan los requerimientos de nutrientes con los que indican las cantidades máximas a consumir. El modelo completo es:

$$x_i = Cantidad\ de\ porción\ del\ alimento\ "i"\ a\ incluir\ en\ la\ dieta\ diaria$$
$$i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$Minimizar\ z = 2x_1 + 50x_2 + 75x_3 + 95x_4 + 10x_5 + 5x_6$$

Sujeto a

$$30x_1 + 40x_2 + 75x_3 + 100x_4 + 25x_5 + 43x_6 \leq 2000\ Kcal$$
$$15x_1 + 25x_2 + 20x_3 + 25x_4 + 20x_5 + 15x_6 \geq 400\ mg\ vitaminas$$
$$35x_1 + 10x_2 + 50x_3 + 65x_4 + 15x_5 \geq 325\ mg\ proteinas$$
$$25x_1 + 15x_3 + 10x_4 + 14x_5 + 20x_6 \geq 125\ mg\ calcio$$
$$0 \leq x_1 \leq 4$$
$$0 \leq x_2 \leq 2$$
$$0 \leq x_3 \leq 2$$
$$0 \leq x_4 \leq 2$$
$$0 \leq x_5 \leq 3$$
$$0 \leq x_6 \leq 4$$

Problema 2. De producción

Una compañía de zapatos mantiene en su producción tres líneas; zapatillas, calzado para caballero y de niña. Las utilidades netas que proporciona cada par de zapatos son de $35, $25 y $19, respectivamente, y se requiere para la fabricación de una hora con 30 minutos, 45 minutos y 30 minutos de corte, respectivamente; una hora y 30 minutos, media hora y una hora de costura, respectivamente; finalmente, 15 minutos de revisión para cada par de zapatos.

Si la próxima semana se tiene un pedido de 50 pares de zapatillas y 25 pares de zapatos de niña; pero, según un estudio de mercado, no se venderán más de 125 pares de caballero. Establece el modelo de PL que determina la producción ideal, considerando que sólo se dispondrá de 45 horas de corte, 40 horas de costura y 30 horas para revisión.

Solución

$$\boldsymbol{x_i = N\acute{u}mero\ de\ pares\ de\ zapatos\ del\ tipo\ "i"\ a\ fabricar\ en\ la\ semana,}$$
$$\boldsymbol{i = 1\ (zapatillas), 2\ (caballero), 3\ (ni\tilde{n}a)}$$

$$\boldsymbol{Maximizar\ \ z = 35x_1 + 25x_2 + 19x_3}$$

Sujeto a

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{30x_1 + 45x_2 + 30x_3 \leq 45 \times 60 = 2700\,\mathbf{min}\ de\ corte} \\
\boldsymbol{90x_1 + 30x_2 + 60x_3 \leq 40 \times 60 = 2400\,\mathbf{min}\ de\ costura} \\
\boldsymbol{15x_1 + 15x_2 + 15x_3 \leq 30 \times 60 = 1800\,\mathbf{min}\ de\ revisi\acute{o}n} \\
\boldsymbol{50 \leq x_1} \\
\boldsymbol{0 \leq x_2 \leq 125} \\
\boldsymbol{25 \leq x_3} \\
\boldsymbol{x_1, x_2, x_3\ enteros}
\end{gathered}$$

Problema 3. De contratación de personal

Restaurantes Ramoncita abrirá un restaurante en la colonia Copilco, su gerente quiere determinar cuántas meseras deberá contratar para que atiendan a los comensales en los distintos horarios. Este restaurante trabaja las 24 horas del día, las meseras trabajarán ocho horas consecutivas y se requieren como mínimo distintos números para la demanda en horarios de cuatro horas.

Horario	Número mínimo de meseras
0 - 4	3
4 – 8	4
8 – 12	8
12 – 16	10
16 – 20	9
20 - 24	6

Solución

$x_i = Número\ de\ meseras\ a\ contratar\ para\ que\ inicien\ sus\ labores\ en\ el\ horario\ "i",$

$i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$$Minimizar\ z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

Sujeto a

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\geq 4\ meseras\ en\ el\ horario\ 2 \\
x_2 + x_3 &\geq 8\ meseras\ en\ el\ horario\ 3 \\
x_3 + x_4 &\geq 10\ meseras\ en\ el\ horario\ 4 \\
x_4 + x_5 &\geq 9\ meseras\ en\ el\ horario\ 5 \\
x_5 + x_6 &\geq 6\ meseras\ en\ el\ horario\ 6 \\
x_1 + x_6 &\geq 3\ meseras\ en\ el\ horario\ 1
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0\ y\ enteros$$

Problema 4. De transporte

Después de un huracán en el Pacífico mexicano, se dañaron severamente tres localidades del estado de Guerrero. El Gobierno Federal decidió enviar provisiones y medicamentos desde las capitales de cuatro estados de la República Mexicana, debido al costo de transporte aéreo por tonelada. A continuación se presentan los costos en miles de pesos por tonelada transportada:

	LOCALIDADES DE GUERRERO			
CAPITAL PROVEEDORA	**1**	**2**	**3**	**OFERTA (T)**
D. F.	3	2.5	4.5	**80**
Guadalajara	5	6	2.5	**30**
Monterrey	7	6.5	3	**80**
Toluca	9	8	4.5	**35**
DEMANDA (T)	**90**	**70**	**65**	

Solución

$$x_{ij} = Número\ de\ toneladas\ de\ suministros\ a\ transportar\ de\ la\ capital\ i\ a\ la\ localidad\ "j",$$

$$\boldsymbol{i = 1, 2, 3, 4 \qquad j = 1, 2, 3}$$

$$\boldsymbol{Minimizar\ z = 3x_{11} + 2.5x_{12} + 4.5x_{13} + 5x_{21} + 6x_{22} + 2.5x_{23} + 7x_{31} + 6.5x_{32} + 3x_{33} + 9x_{41} + 8x_{42} + 4.5x_{43}}$$

Sujeto a

$$\boldsymbol{x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 80\ Ton\ disponibles\ en\ el\ DF}$$

$$\boldsymbol{x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 30\ Ton\ disponibles\ en\ Guad}$$

$$\boldsymbol{x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 80\ Ton\ disponibles\ en\ Mty}$$

$$\boldsymbol{x_{41} + x_{42} + x_{43} \leq 35\ Ton\ disponibles\ en\ Tol}$$

$$\boldsymbol{x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \geq 90\ Ton\ necesarias\ en\ loc.1}$$

$$\boldsymbol{x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \geq 70\ Ton\ necesarias\ en\ loc.2}$$

$$\boldsymbol{x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \geq 65\ Ton\ necesarias\ en\ loc.3}$$

$$\boldsymbol{x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{41}, x_{42}, x_{43} \geq 0}$$

Problema 5. De asignación

En un Juzgado de Distrito se quieren asignar cuatro jueces a cuatro listas de causas de los tribunales. El responsable de esta tarea estimó el número de días que requeriría cada juez para completar cada listado, con base en su experiencia y la composición de equipos de caso en cada lista, así como su experiencia para culminar los diferentes casos:

	GRUPO DE CAUSAS			
JUEZ	**1**	**2**	**3**	**4**
1	20	18	22	24
2	18	21	26	20
3	22	26	27	25
4	25	24	22	24

Solución:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si el juez } i \text{ se asigna al grupo de causas } j \\ 0, & \text{si el juez } i \text{ NO se asigna al grupo de causas } j \end{cases}$$

$$i = 1,2,3,4 \qquad j = 1,2,3,4$$

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } z &= 20x_{11} + 18x_{12} + 22x_{13} + 24x_{14} + 18x_{21} + 21x_{22} + 26x_{23} + 20x_{24} \\ &+ 22x_{31} + 26x_{32} + 27x_{33} + 25x_{34} + 25x_{41} + 24x_{42} + 22x_{43} + 24x_{44} \end{aligned}$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} &= 1 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 1 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 1 \end{aligned}$$

Cabe resaltar que las primeras cuatro restricciones solo están restringiendo el hecho de que a cada juez le debe tocar solamente un grupo de causas; pero si el modelo queda así, podría suceder que el mismo grupo de causas se asignara a todos los jueces; por tanto, las últimas cuatro restricciones indican que también se debe cumplir que cada grupo de causas se le asignen a un solo juez.

Método simplex simple

El propósito de aprender en qué consiste el método simplex simple es que se tenga claridad en la manera de operar el software de apoyo Lindo, que se utilizará, y la interpretación de las soluciones que se obtienen.

Una variable de holgura (vh) es aquella que representa la cantidad no-negativa necesaria en el lado izquierdo de una restricción lineal y que, al ser sumada de este lado en una restricción del tipo $\leq$ permite que la desigualdad sea una igualdad.

Cada restricción tiene asociada una distinta variable de holgura, por ello se tendrán tantas variables de holgura como número de restricciones distintas a la no-negatividad existan en el PPL.

La notación que se usará será $\mathbf{s_i}$ **con i igual al número de restricción.**

Este algoritmo solo puede aplicarse a problemas cuya totalidad de restricciones (exceptuando la no-negatividad) son del tipo $\leq$.

Algoritmo simplex simple (caso de maximización)

1. Sumar las variables de holgura (vh) a todas las restricciones del tipo $\leq$.
2. Sumar las variables de holgura multiplicadas por cero en la función objetivo (FO).
3. Igualar a cero la FO.
4. Introducir los coeficientes de los puntos (1) y (3) a la matriz simplex (figura 1).
5. Iterar hasta encontrar la solución óptima el siguiente subprograma:

6. Elegir el valor más negativo del renglón de la FO, la variable que se encuentra sobre él es la que entrará a la base; los candidatos a ser elemento pivote son los números estrictamente positivos en esta columna.
7. Hacer los cocientes de los valores que se encuentran en el lado derecho (LD) de la matriz sobre los valores positivos de la columna elegida. Elegir el denominador del cociente más pequeño; el denominador de éste cociente, es el número al que denominaremos pivote y la variable en la base que está en este renglón sale de la base.
8. Multiplicar el renglón pivote por el inverso multiplicativo del número pivote.
9. Al renglón que se acaba de determinar (en el paso 3) multiplicarlo por cada uno de los inversos aditivos de los números que se encuentran arriba y abajo del pivote y realizar las sumas a los renglones correspondientes, de tal forma que se obtengan ceros arriba y abajo del pivote que ahora es el número uno.
10. Verificar si en el renglón de la FO quedan aún valores negativos, si aún los hay, repetir (I),(II),(III) y (IV); si no, entonces ya se terminó, los valores óptimos de las variables que están en la base y de la FO “Z” se encuentran en el mismo renglón en la columna del lado derecho, LD; las variables que no están en la base valen cero.

Figura 1. Matriz simplex

Base		X1	X2	…	S1	S2	…	LD
	Z	C1	C2	…	0	0	…	0
B	S1	a11	a12	…	1	0	…	b1
a	S2	a21	a22	…	0	1	…	b2
s	…	…	…	…	…	…	…	…
e	Sn	an1	an2	…	0	0		bn
	z							

Este algoritmo se muestra solo para el caso de maximización por la existencia del siguiente teorema, que resuelve la situación para el caso de minimización.

Teorema

Un PPL con FO de minimización es equivalente a una de maximización mediante:

$$\boldsymbol{Minimizar\ z = Maximizar\ (-z)}$$

Y a la inversa

$$\boldsymbol{Maximizar\ z = Minimizar\ (-z)}$$

Ejemplo

$$\boldsymbol{Maximizar\ z = 2x_1 + 3x_2}$$

Sujeto a

$$\boldsymbol{-x_1 + 5x_2 \leq 15}$$

$$\boldsymbol{4x_1 - 2x_2 \leq 12}$$

$$\boldsymbol{x_1, x_2 \geq 0}$$

En la matriz simplex queda:

	X1	X2	S1	S2	LD	
Z	-2	-3	0	0	0	
S1	-1	5	1	0	15	***(1/5)**
S2	4	-2	0	1	12	
z	-13/5	0	3/5	0	9	
X2	-1/5	1	1/5	0	3	***(3)*(2)**
S2	18/5	0	2/5	1	18	***(5/18)**
z	0	0	8/9	13/18	22	
X2	0	1	2/9	1/18	4	
X1	1	0	1/9	5/18	5	***(13/5)*(1/5)**

En este ejemplo, el valor negativo más alto es -3, por tanto, la variable x2 entrará a la base; solo hay un candidato a elemento pivote, el número 5, por tanto, la variable s1 sale de la base, el elemento pivote cumple el mismo papel del método de eliminación gaussiana. Se repitió este proceso hasta obtener la solución que da como resultado:

$$x_1 = 5, x_2 = 4 \;\; y \quad z = 22$$

Ejemplo de aplicación a un problema de producción

Una empresa textil, tiene como objetivo para la próxima semana, trabajar en la confección de tres tipos de vestido A, B y C, de los cuales obtendrá utilidades netas de $65.00, $55.00 y $45.00, respectivamente. En la siguiente tabla se muestran los tiempos requeridos (minutos) para la elaboración de cada tipo de vestido:

Tipo de vestido	**Tiempo requerido en minutos para su confección**		
	Corte	**Costura**	**Planchado**
A	35	60	20
B	45	80	20
C	30	60	10

Si para la realización de estas tareas se cuenta con 30 horas de corte, 45 horas de costura y 13 horas con 20 minutos para planchar. Determine el modelo de PPL, resuelva el problema e interprete los resultados.

Modelo:

$$x_i = \text{Número de vestidos del tipo } i \text{ a fabricar en la semana}, i = 1\ (A), 2\ (B), 3\ (C)$$

$$Maximizar\ z = 65x_1 + 55x_2 + 45x_3$$

Sujeto a

$$30x_1 + 45x_2 + 30x_3 \leq 1800 \min de\ corte$$

$$60x_1 + 80x_2 + 60x_3 \leq 2700 \min de\ costura$$

$$20x_1 + 20x_2 + 10x_3 \leq 800 \min de\ planchado$$

$$x_1, x_2, x_3\ enteros$$

Solución utilizando el método simplex simple:

	X1	X2	X3	S1	S2	S3	LD	
Z	-65	-55	-45	0	0	0	0	
S1	35	45	30	1	0	0	1800	
S2	60	80	60	0	1	0	2700	
S3	20	20	10	0	0	1	800	*(1/20)
z	0	10	-25/2	0	0	13/4	2600	
S1	0	10	25/2	1	0	-7/4	400	
S2	0	20	30	0	1	-3	300	*(1/30)
X1	1	1	1/2	0	0	1/20	40	*(65)*(-35)*(-60)
z	0	55/3	0	1	5/12	2	2725	
S1	0	5/3	0	0	-5/12	-1/2	275	
X3	0	2/3	1	0	1/30	-1/10	10	
X1	1	2/3	0	0	-1/60	1/10	35	

$$x_1 = 35, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 10, \quad s_1 = 275, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = 0$$
$$z = 2725$$

Interpretación:

Se tienen que confeccionar para la próxima semana 35 vestidos del tipo A y 10 vestidos del tipo C; pero no será necesario confeccionar vestidos del tipo B. De igual manera, se contará con 275 minutos de holgura para el proceso de corte, en los demás procesos los tiempos se cubrirán por completo. Con esta producción se obtendrán utilidades netas por $2,725.00 en la semana próxima.

Portafolios de inversión

En el área económico administrativa, es de vital importancia la construcción de modelos matemáticos que permitan al tomador de decisiones, elegir las mejores opciones de inversión, las que redítúen las mayores utilidades, a esto se le llama portafolios de inversión.

Con las herramientas aprendidas al momento y con el uso de un software adecuado, será enriquecedor aprender los modelos de portafolios de inversión de la Programación lineal, que pueden utilizarse, y la manera en que se interpretan.

Ejemplo

Suponga que en una Secretaría de Estado se tiene que invertir en proyectos de desarrollo, se cuenta con 5 proyectos para los cuales se requieren distintos flujos de efectivo a lo largo de cinco años. Suponga que los límites de presupuesto exterior para el inicio de los dos primeros periodos son conocidos e iguales a \$4’400,000.00 y \$4’000,000.00

Se desea elegir los niveles de inversión en cada uno de los proyectos de manera que generen la cantidad mayor posible de utilidades, considerando una tasa de cambio de 20% por periodo. A continuación se presenta una tabla con los flujos netos de efectivo correspondientes a cada proyecto, en miles de pesos:

INICIO DEL	**PROYECTO**				
PERIODO	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	-1000	-1200	-2000	-2500	-3000
1	-2000	-2400	-2100	-1300	900
2	2000	2500	3000	2000	1400
3	2900	3567	3000	2000	1600
4	0	0	1308	2000	1800
5	0	0	0	2296	955

Con la información presentada será necesario, primero, evaluar si cada uno de los proyectos son redituables; segundo, como hay restricciones de capital en los dos primeros años, no se puede invertir en todos los proyectos. A continuación, se definirá el indicador que permite valorar la ganancia de un proyecto multiperiódico.

El *valor presente neto* (VPN), es el valor monetario que resulta de restar la suma de los flujos descontados a la inversión inicial.

$$\boldsymbol{VPN = \frac{FNE_0}{\left(1+\frac{i}{p}\right)^0} + \frac{FNE_1}{\left(1+\frac{i}{p}\right)^1} + \cdots + \frac{FNE_n}{\left(1+\frac{i}{p}\right)^n}}$$

Considerando los datos iniciales, se puede calcular para cada proyecto su *valor presente neto* y saber si todos son redituables o no.

A partir del ejemplo mencionado, se muestran a continuación los cálculos correspondientes:

$$\boldsymbol{VPN_1 = \frac{-1000}{(1+0.20)^0} - \frac{2000}{(1+0.20)^1} + \frac{2000}{(1+0.20)^2} + \frac{2900}{(1+0.20)^3}}$$

$$\boldsymbol{= -1000 - 1666.66666 + 1388.88888 + 1678.24074 = 400.5}$$

$$\boldsymbol{VPN_2 = \frac{-1200}{(1+0.20)^0} - \frac{2400}{(1+0.20)^1} + \frac{2500}{(1+0.20)^2} + \frac{3567}{(1+0.20)^3}}$$

$$\boldsymbol{= -1200 - 2000 + 1736.11111 + 2064.23611 = 600.3}$$

$$VPN_3 = \frac{-2000}{(1+0.20)^0} - \frac{2100}{(1+0.20)^1} + \frac{3000}{(1+0.20)^2} + \frac{3000}{(1+0.20)^3} + \frac{1308}{(1+0.20)^4}$$

$$= -2000 \ - 1750 \ + \ 2083.33333 \ + \ 1736.11111 \ + \ 630.78703$$

$$= 700.2$$

$$VPN_4 = \frac{-2500}{(1+0.20)^0} - \frac{1300}{(1+0.20)^1} + \frac{2000}{(1+0.20)^2} + \frac{2000}{(1+0.20)^3} + \frac{2000}{(1+0.20)^4} + \frac{2296}{(1+0.20)^5}$$

$$= -2500 - \ 1083.33333 \ + \ 1388.88888 \ + \ 1157.40740 \ + \ 964.50617$$

$$= 850.2$$

$$VPN_5 = \frac{-3000}{(1+0.20)^0} + \frac{900}{(1+0.20)^1} + \frac{1400}{(1+0.20)^2} + \frac{1600}{(1+0.20)^3} + \frac{1800}{(1+0.20)^4} + \frac{955}{(1+0.20)^5}$$

$$= -3000 + 750 + 972.22222 + 925.92592 + 868.05555 + 383.79308$$

$$= 900$$

En esta información se aprecia con claridad que todos y cada uno de los proyectos son redituables. A continuación se completa la tabla inicial con la evaluación respectiva de cada uno:

INICIO DEL	PROYECTO				
PERIODO	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	-1000	-1200	-2000	-2500	-3000
1	-2000	-2400	-2100	-1300	900
2	2000	2500	3000	2000	1400
3	2900	3567	3000	2000	1600
4	0	0	1308	2000	1800
5	0	0	0	2296	955
VPN	**400.5**	**600.3**	**700.2**	**850.2**	**900**

Recuerda que la idea es maximizar la ganancia de la inversión total y que ésta se representa con el VPN de cada proyecto. Para resolver este problema se hará uso del modelo clásico de portafolios de inversión para *problemas de programación lineal*, para el que se pueden considerar dos casos:

- **Modelo binario.** Si al invertir en un proyecto deben respetarse la totalidad de los flujos de efectivo.
- **Modelo continuo.** Si es posible invertir parte de la inversión total y obtener una ganancia proporcional a la inversión.

Modelo binario

La variable de decisión queda definida mediante:

$$x_i = \begin{cases} 1, & si\ \ se\ invierte\ la\ totalidad\ requerida\ en\ el\ proyecto\ \ \ i \\ 0, & si\ no\ se\ invierte\ la\ totalidad\ requerida\ en\ el\ proyecto\ i \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$Maximizar\ z = VPN_1 x_1 + VPN_2 x_2 + \cdots + VPN_n x_n$$

Sujeto a

$$FNE(0)_1 x_1 + FNE(0)_2 x_2 + \cdots + FNE(0)_n x_n \le b_0\ (capital\ disponible\ en\ el\ periodo\ 0)$$
$$FNE(1)_1 x_1 + FNE(1)_2 x_2 + \cdots + FNE(1)_n x_n \le b_1\ (capital\ disponible\ en\ el\ periodo\ 1)$$
$$\dots$$
$$FNE(m)_1 x_1 + FNE(m)_2 x_2 + \cdots + FNE(m)_n x_n \le b_m\ (capital\ disponible\ en\ el\ periodo\ m)$$

Para el ejemplo que se está analizando:

$$x_i = \begin{cases} 1, & si\ \ se\ invierte\ la\ totalidad\ requerida\ en\ el\ proyecto\ \ \ i \\ 0, & si\ no\ se\ invierte\ la\ totalidad\ requerida\ en\ el\ proyecto\ i \end{cases}$$

$$i = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$Maximizar\ z = 400.5x_1 + 600.3x_2 + 700.2x_3 + 850.2x_4 + 900x_5$$

Sujeto a

$$1000x_1 + 1200x_2 + 2000x_3 + 2500x_4 + 3000x_5 \leq 4400\ (capital\ disponible\ en\ el\ periodo\ 0)$$
$$2000x_1 + 2400x_2 + 2100x_3 + 1300x_4 - 900x_5 \leq 4000\ (capital\ disponible\ en\ el\ periodo\ 1)$$

Cabe destacar que los flujos netos de efectivo cambian de signo porque las restricciones de capital son cantidades positivas y solo existen en los primeros dos años.

Modelo continuo

En este caso, no es necesario invertir la cantidad total requerida; pero la utilidad será proporcional a la inversión, entonces se definen las variables de decisión como:

$$x_i = Fracción\ del\ total\ a\ invertir\ en\ el\ proyecto\ i, i = 1, 2, \ldots, n$$

$$Maximizar\ z = VPN_1x_1 + VPN_2x_2 + \cdots + VPN_nx_n$$

Sujeto a

$$FNE(0)_1x_1 + FNE(0)_2x_2 + \cdots + FNE(0)_nx_n \leq b_0\ (capital\ disponible\ en\ el\ periodo\ 0)$$
$$FNE(1)_1x_1 + FNE(1)_2x_2 + \cdots + FNE(1)_nx_n \leq b_1\ (capital\ disponible\ en\ el\ periodo\ 1)$$
$$\ldots$$
$$FNE(m)_1x_1 + FNE(m)_2x_2 + \cdots + FNE(m)_nx_n \leq b_m\ (capital\ disponible\ en\ el\ periodo\ m)$$
$$0 \leq x_1, x_2, \ldots, x_n \leq 1$$

En necesario destacar que las variables deben acotarse a los requerimientos totales para cada proyecto, por eso, lo más que pueden invertir es la totalidad que equivale a 1.

Con la información presentada:

$$x_i = Fracción\ del\ total\ a\ invertir\ en\ el\ proyecto\ i, i = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$Maximizar\ z = 400.5x_1 + 600.3x_2 + 700.2x_3 + 850.2x_4 + 900x_5$$

Sujeto a

$$1000x_1 + 1200x_2 + 2000x_3 + 2500x_4 + 3000x_5 \leq 4400\ (capital\ disponible\ en\ el\ priodo\ 0)$$
$$2000x_1 + 2400x_2 + 2100x_3 + 1300x_4 - 900x_5 \leq 4000\ (capital\ disponible\ en\ el\ priodo\ 1)$$

$$0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \leq 1$$

Uso de Lindo 6.1

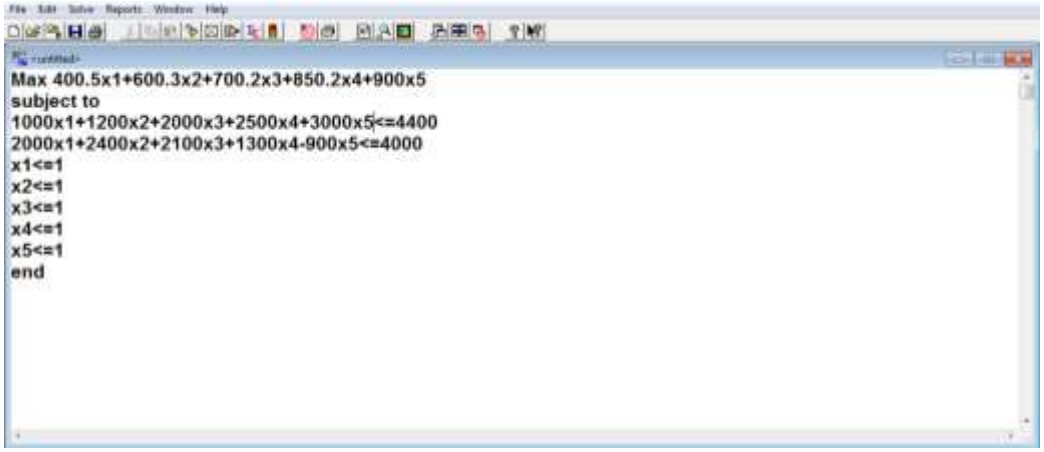
Este software se eligió por la facilidad que tiene en su uso, es muy práctico y tiene una capacidad para resolver problemas de programación lineal y entera hasta con 500 variables.

Primero, se debe instalar el software, de la página oficial www.lindo.com de este sitio de internet se puede bajar una versión legal de prueba por 40 días, que te permitirá realizar los ejercicios señalados en esta sección.

A continuación, tomando como base los modelos realizados en la sección anterior para portafolios de inversión, se iniciará el aprendizaje del uso del software.

Modelo continuo de portafolios de inversión

La información que se debe escribir en Lindo para el modelo continuo es de la siguiente manera:


```
Max 400.5x1+600.3x2+700.2x3+850.2x4+900x5
subject to
1000x1+1200x2+2000x3+2500x4+3000x5<=4400
2000x1+2400x2+2100x3+1300x4-900x5<=4000
x1<=1
x2<=1
x3<=1
x4<=1
x5<=1
end
```

Se le da *click* al botón *solve* y el paquete muestra la siguiente pantalla:


```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      8

     OBJECTIVE FUNCTION VALUE

     1)     1682.785

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
     X1         0.221739          0.000000
     X2         1.000000          0.000000
     X3         0.000000         17.778248
     X4         1.000000          0.000000
     X5         0.159420          0.000000


     ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      2)        0.000000          0.313109
      3)        0.000000          0.043696
      4)        0.778261          0.000000
      5)        0.000000        119.699997
      6)        1.000000          0.000000
      7)        0.000000         10.623913
      8)        0.840580          0.000000

 NO. ITERATIONS=       8
```

Lo que se interpreta de la siguiente manera:

Las variables $x_2 = 1\ y\ x_4 = 1$, por tanto, se deberá invertir la totalidad de flujos de efectivo necesarios para los proyectos 2 y 4; por tanto, se obtendrá el total de sus VPN dentro del valor de la FO.

La variable $x_1 = 0.221$, se debe invertir esta proporción de dinero en los flujos requeridos para el proyecto 1; por tanto, se obtendrá el valor proporcional de VPN del proyecto 1 dentro del valor total de la FO.

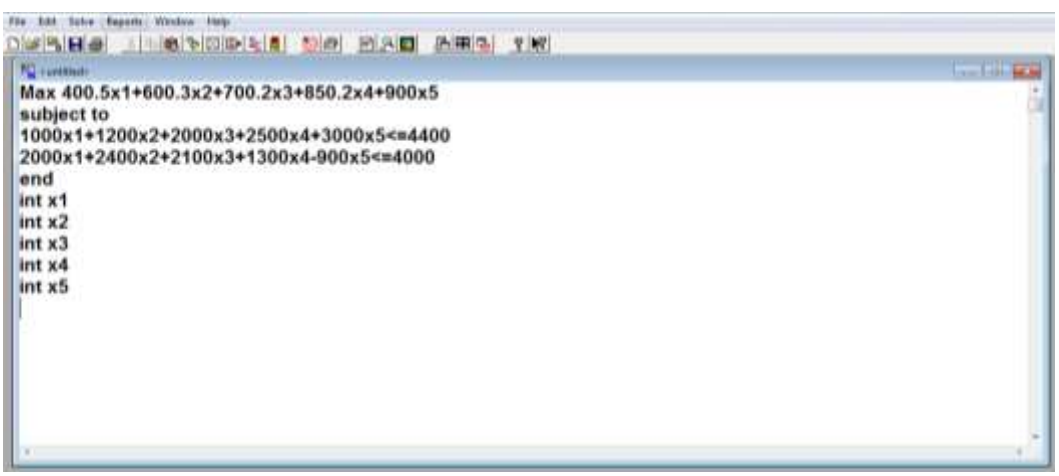
La variable $x_5 = 0.159$, se debe invertir esta proporción de dinero en los flujos requeridos para el proyecto 5; por tanto, se obtendrá el valor proporcional de VPN del proyecto 5 dentro del valor total de la FO.

La variable $x_3 = 0$, por eso NO se debe invertir en el proyecto 3 y, por tanto, su valor de VPN es cero dentro del valor total de la FO.

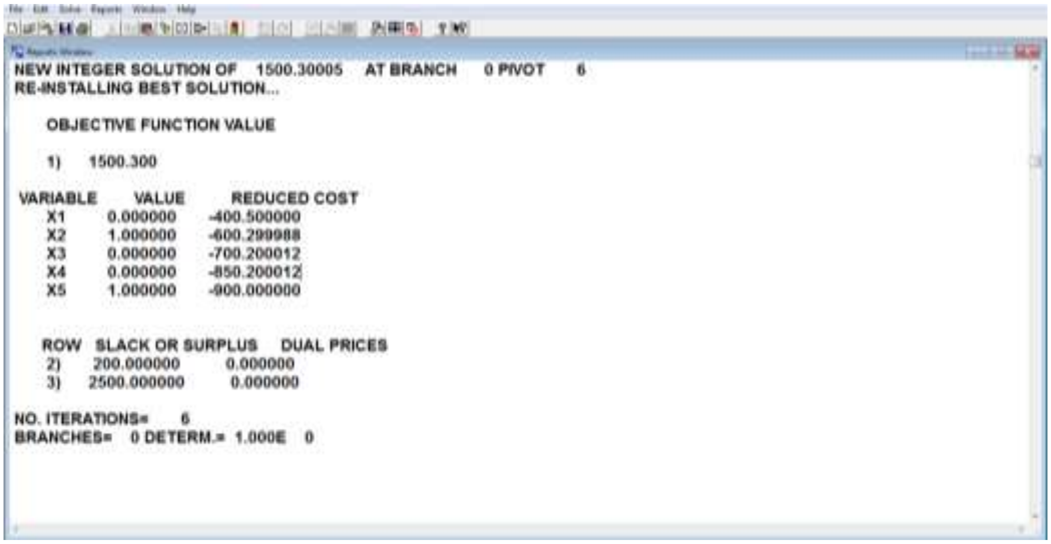
Finalmente, el valor de $z = 1682.785$, es el máximo valor posible de la suma de los VPN de los proyectos en que se invertirá e indica que la inversión será redituable.

Modelo binario de portafolios de inversión

La información que se debe escribir en LINDO para el modelo binario cambiará con el anterior puesto que se debe especificar que cada variable es binaria, eso es posible escribiendo al final las variables con la palabra "int" antes de cada variable de decisión, como se muestra enseguida:



Y la solución queda, en este caso:



```
NEW INTEGER SOLUTION OF    1500.30005    AT BRANCH     0 PIVOT     6
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

     OBJECTIVE FUNCTION VALUE

     1)      1500.300

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       X1         0.000000        -400.500000
       X2         1.000000        -600.299988
       X3         0.000000        -700.200012
       X4         0.000000        -850.200012
       X5         1.000000        -900.000000

      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)       200.000000          0.000000
       3)      2500.000000          0.000000

NO. ITERATIONS=       6
BRANCHES=    0 DETERM.=  1.000E    0
```

Lo que se interpreta de la siguiente manera:

En las variables $\boldsymbol{x_2 = 1 \; y \; x_5 = 1}$, por tanto, se deberá invertir la totalidad de flujos de efectivo necesarios para los proyectos 2 y 5, y, por tanto, se obtendrá el total de sus VPN dentro del valor de la FO.

En las variables $\boldsymbol{x_1 = 0, x_3 = 0 \; y \; x_4 = 0,}$ por eso NO se debe invertir en los proyectos 1, 3 y 4 y, por tanto, su valor de VPN es cero dentro del valor total de la FO.

Finalmente, el valor de $\boldsymbol{z = 1500.3,}$ que es en realidad la suma de los VPN que corresponden a los dos proyectos en que se invertirá y cuya inversión será redituable.

Modelos de PPL con variables enteras

La información que se debe escribir en Lindo para el modelo entero cambiará con el binario, en el que debe escribirse ahora, antes de cada variable de decisión, la palabra “gin”; con esta indicación la solución proporcionará valores enteros para las variables en que se especifique esta característica.

RESUMEN

En esta unidad se abordó la *investigación de operaciones* como una herramienta para la toma de decisiones, entendiéndola como una aplicación del método científico para poder solucionar problemas específicos.

Se trabajó con los *problemas de programación lineal*, en los cuales el modelado consiste en determinar primero lo que se quiere hacer, si minimizar o maximizar; posteriormente, deben determinarse las variables de decisión que se ven involucradas en el problema, para finalmente ubicar las restricciones y determinar su estatus, es decir, si son mayor que, menor que o igual.

Se estudió el *método simplex simple*, haciendo énfasis en su algoritmo; asimismo se abordó el modelo de portafolios de inversión, enfocándonos en el caso del modelo binario y el modelo continuo del mismo a través de un software llamado *Lindo* que facilita el uso del modelo.

Estos modelos son opciones en la resolución de problemas y, por tanto, en la toma de decisiones en el ámbito cotidiano y profesional.

BIBLIOGRAFÍA

SUGERIDA

Budnick, F. (2007). *Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales*. México: McGrawHill.

Hillier, L. (2010*). Introducción a la investigación de operaciones* (9ª ed.). México: McGrawHill.

Taha, A. (2010) *Investigación de operaciones* (9ª ed.). México: Pearson.

Villalobos, J. L. (2011). *Matemáticas financieras* (4ª ed.). México: Pearson Hall Hispanoamérica.

Facultad de Contaduría y Administración
Sistema Universidad Abierta y Educación a Distancia