UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

AUTOR: M. F. ALBERTO DE LA ROSA ELIZALDE

MATEMÁTICAS V (MATEMATICAS DISCRETAS)		Clave: 1566
Plan: 2005		Créditos: 8
Licenciatura: Informática		Semestre: 5°
Área: Matemáticas		Asesoría: 4 h.
Requisitos: Ninguno		Por semana: 4 h.
Tipo de asignatura:	Obligatoria (x)	Optativa ( )

Objetivo general de asignatura

Al finalizar el curso, el alumno aplicará la teoría de las matemáticas discretas en la interpretación y resolución de problemas algorítmicos, gráficas, inducción y recursión.

Temario oficial (64 horas sugeridas)

1. Inducción 8 h.
2. Computabilidad y Lenguajes Formales 10 h.
3. Relaciones y Funciones 14 h.
4. Análisis de Algoritmos 12 h.
5. Análisis en Grafos 10 h.
6. Prácticas en el laboratorio de informática 10 h

Introducción

El objetivo de las siguientes notas de Matemáticas V es lograr que el estudiante conozca de una manera cercana los conocimientos más importantes, como son los conceptos de matemáticas discretas; y de esta manera poder elaborar software más eficiente y, por otro lado, además de poder considerarlos como la base de apoyo para otras materias, que por sus características es necesario saber algunos conceptos y procedimientos para optimizar las labores cotidianas.

Se ha tratado de exponer todos los temas de la asignatura de una manera clara y sencilla, utilizando un lenguaje simple para que el estudiante encuentre interés en el campo de las matemáticas discretas.

En el primer tema se introducirá al alumno en conceptos básicos de gráficas, caminos, árboles y la relación existente entre las gráficas y las matrices.

En el segundo tema se verá el concepto de conjunto y sus operaciones, así como el uso de los índices y subíndices, parejas ordenadas, y en el los últimos subtemas métodos de demostración.

En el tercer tema se verá el concepto de función y su invertibilidad, la utilización de sucesiones; de igual modo los conceptos de definiciones de recursividad y de relaciones recursivas y, por último, composición de relaciones y cerradura.

En el cuarto tema se verá el concepto de árbol, algoritmos para su recorrido, la notación polaca y árboles pesados.

En el quinto tema se explicará el concepto de algoritmo para gráficas, así como las modificaciones más adecuadas para obtener otra información acerca de la gráfica a partir de un mismo algoritmo.

TEMA 1. INDUCCIÓN

Objetivo particular

El alumno identificará los conceptos de gráficas, caminos, árboles y matrices para explicar la relación existente de éstas últimas con las gráficas.

Temario detallado

1.1 Gráficas

1.2 Caminos y Árboles Especiales

1.3 Matrices para Gráficas

Introducción

En el presente tema se muestran los conceptos de gráfica, caminos y árboles y los elementos que los componen. Así como la manera de representar una gráfica de manera matricial.

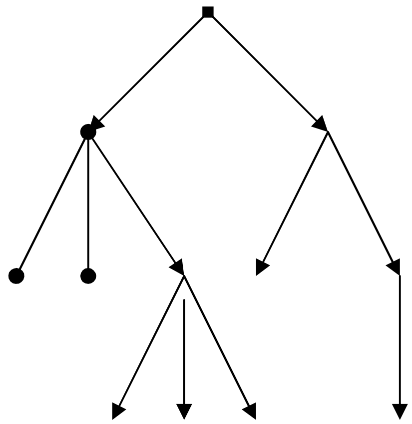
Gráficas

Una gráfica son objetos y líneas. Los objetos están representados por puntos, los puntos se llaman vértices y las líneas que los unen aristas.

Una gráfica se encuentra definida por $F=F(V,A)$, donde V es el conjunto de todos los vértices de la gráfica y A es el conjunto de todas las aristas.

Cuando se tienen dos aristas diferentes que unen los mismos vértices se dice que son dos aristas paralelas, cuando una arista inicia y termina en un mismo vértice se le llama bucle.

Ejemplo de una gráfica, lo tenemos en seguida:



Podemos tener vértices aislados en una gráfica el cual se manifiesta al no estar unido a ninguna arista.

Otro concepto importante es el grado de un vértice el cual se obtiene sumando el número de aristas que se unen en dicho vértice.

Existen gráficas cerradas y abiertas, una gráfica cerrada es aquella que independiente de su recorrido, al final el punto donde termina coincide con el punto donde inicia, es decir termina donde inicia.

Una gráfica abierta es aquella que independiente del recorrido que ésta tenga, al final el punto donde termina no coincide con el punto de inicio, es decir termina en un punto diferente al punto inicial.

Existe la gráfica trivial, que es aquella que se encuentra representada por un solo vértice.

Ejemplo.

Una Gráfica trivial se encuentra representada por:

El vértice anterior es representativo de una gráfica trivial.

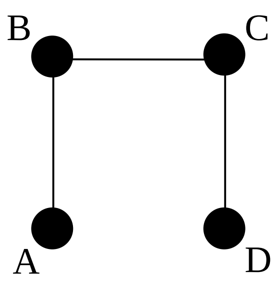
1.1 Caminos y Árboles especiales

Una secuencia alterna de vértices y aristas en una gráfica con un inicio y un destino se llama camino.

Cada camino tiene una longitud la cual se encuentra representada por el número de aristas, que lo forman.

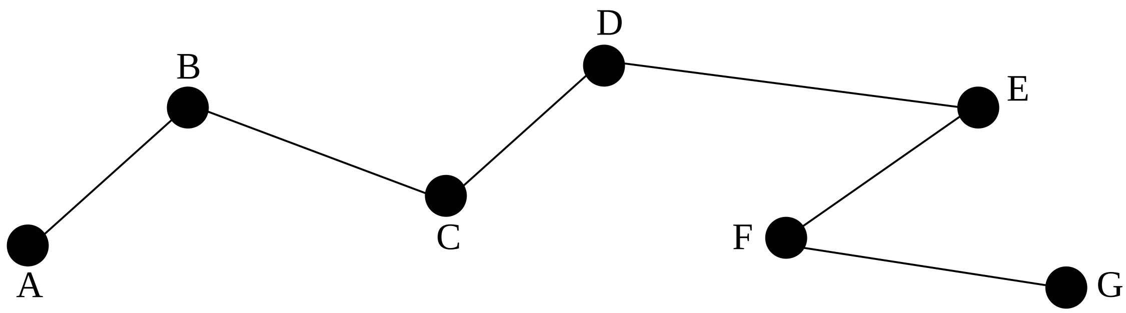
Cuando en una gráfica se tiene un camino y este tiene todos sus vértices diferentes, entonces al camino se le llamará camino simple.

Ejemplo 1. Supóngase que en la siguiente gráfica se recorre la gráfica iniciando en el vértice A y terminando en el vértice D.



Con lo cual tenemos un camino simple.

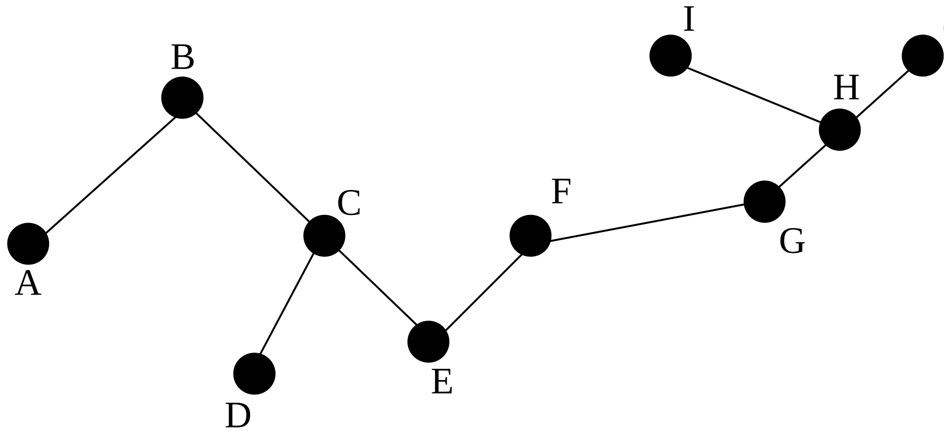
Ejemplo 2. Supóngase que en la siguiente gráfica se recorre la gráfica iniciando en el vértice A y terminando en el vértice G.



Con lo cual tenemos un camino simple.

Cuando en una gráfica se tiene un camino y éste tiene todas las aristas diferentes entonces tenemos un camino al cual se le llama recorrido.

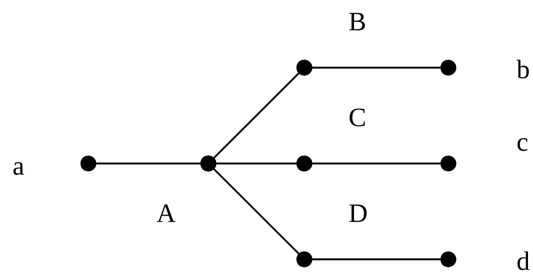
Ejemplo 1. Supóngase que, en la siguiente gráfica se recorre la gráfica iniciando en el vértice A, B, C, E, F, G, H y hasta el vértice J.



Con lo cual tenemos un recorrido.

Para que un camino sea un ciclo, el camino deberá ser cerrado es decir que el vértice de inicio sea igual al vértice final.

Árboles especiales



Las propiedades de los árboles son:

- Existe un único camino entre dos vértices cualesquiera en un árbol.
- El número de vértices es mayor en uno al número de aristas en un árbol.
- Un árbol con dos o más vértices tiene al menos dos hojas.

Un grafo dirigido es un conjunto de puntos marcados V con un conjunto de flechas entre los puntos, de manera que a lo más existe una flecha desde un punto a otro punto.

Un grafo no dirigido F=F(V,A) es un conjunto de puntos marcados V con un conjunto de líneas A (ya explicadas anteriormente) entre los puntos.

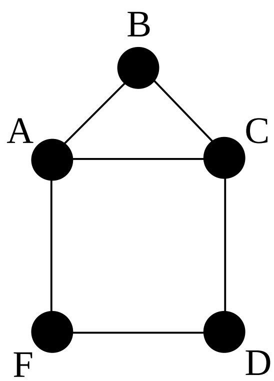
1.2 Matrices para gráficas

Una matriz para una grafica es aquella en la cual se colocan valores que representan vértices y/o aristas de una grafica y de esta manera poder aplicar algunos algoritmos que colaboren para la solución de distintos problemas.

Matriz de adyacencia: Es una matriz donde sus renglones es igual al número de vértices de la gráfica y de igual manera el número de columnas es igual al número de vértices[1].

$$\begin{cases} 1\_si\_a_{ij} - forma\_una : arista \\ 0 - en\_caso\_contrario \end{cases}$$

Ejemplo 1.

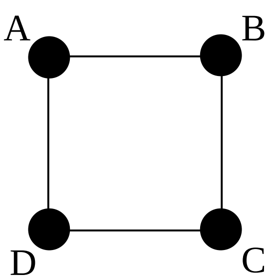


La matriz asociada a la gráfica anterior es:

[1] Seymour Lipschutz y Marc Lipson, *Matemática discreta*, Schaum, Madrid, McGraw Hill, 2004.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} A & B & C & D & F \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ F \end{matrix} & \begin{bmatrix} O & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ejemplo 2.



La matriz asociada a la gráfica anterior es:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

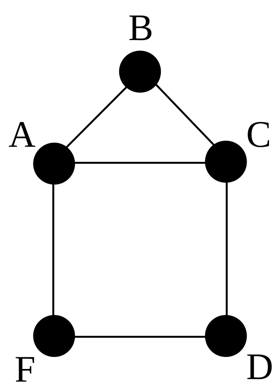
Matriz de incidencia: Es una matriz donde sus renglones es igual al número de vértices de la gráfica y el número de aristas es igual al número de columnas[2].

---

[2] S. Lipschtz, op. cit. p.

$$\begin{cases} 1\_si\_el\_vertice\_v_i\_incide\_en\_la\_arista\_v_i \\ 0 - en\_caso\_contrario \end{cases}$$

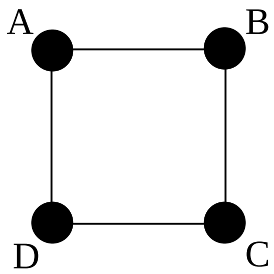
Ejemplo 1.



La matriz asociada a la gráfica anterior es:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} AB & BC & AC & CD & DF & FA \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ejemplo 2.



La matriz asociada a la gráfica anterior es:

$$
\begin{array}{c}
\\ A \\ B \\ C \\ D
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} AB & BC & CD & DA \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Conclusión

En la vida real la utilización de gráficas es muy importante, pues con la ayuda de ellas se facilita la comprensión de muchas cosas como por ejemplo las ventas, utilidades, etc., pero también existen otras representaciones como las actividades que realiza determinada área en una empresa la cual debe realizarse en el menor tiempo posible y para ello se requiere la representación matricial de la gráfica y así de esta manera aplicar los algoritmos necesarios que permitan obtener el recorrido con un menor tiempo o también a un menor costo. Por lo antes comentado podremos mencionar que la utilización de gráficas que representen nuestras actividades reales, pues dichas gráficas se puedan relacionar matricialmente, es algo muy conveniente para la solución de problemas de suma importancia, de la vida real.

Bibliografía del tema 1

Abellanas, M y D. Lodares, Análisis de algoritmos y teoría de grafos, México, Macrobit, 1991, 189 pp.

Kolman, Bernard, Robert C Busby, y Sharon Ross, Estructura de matemáticas discretas para la computación, 3ª ed., México, Prentice Hall, 1995, 524 pp.

LIU, C. L. Elementos de matemáticas discretas, México, McGraw-Hill, 1995, 432 pp.

Ross, Kennet A. Matemáticas discretas, México, Prentice Hill, 1990, 367 pp.

Bibliografía Complementaria

Tremblay, Jean-Paul, Manohar, R., Matemáticas discretas, México Cecsa, , 1996, 597 pp.

Johnsonbaugh Richard, Matemáticas discretas, Iberoamericana, México, Iberoamericana ,1988, 506 pp.

Lipschutz, Seymour, Lipson Marc, Matemática discreta, Schaum, Madrid, McGraw Hill, 2004, 420 pp.

Actividades de aprendizaje

A.1.1. Investiga en tres áreas diferentes de la FCA, cómo está formada la red de computadoras de cada área y obtén su matriz de incidencia.

A.1.2. Investiga en tres áreas diferentes de la FCA (diferentes a las del punto A.1.1) cómo está formada la red de computadoras de cada área y obtén su matriz de adyacencia.

A.1.3. Resolver los ejercicios pares de las páginas 167 y 175 del libro Lipschutz, Seymour, Lipson Marc, Matemática discreta, Schaum, 2004, 420 pp.

A.1.4 Con el estudio de la bibliografía específica sugerida, estudiar los conceptos principales y sus aplicaciones a los grafos.

A.1.5 Realiza un compendio de los conceptos vistos en el presente tema.

A.1.6 Proporciona por lo menos 5 situaciones profesionales o empresariales en que los grafos son necesarios.

A1.7 Investiga ejemplos prácticos relacionados con las matrices de incidencia en los libros de referencia y en internet.

A.1.8 Investiga y describe los conceptos básicos de la teoría de grafos.

A.1.9 Realiza un tabla indicando las ventajas y desventajas de una matriz deincidencia.

A.1.10 Realiza un tabla indicando las ventajas y desventajas de una matriz de adyacencia.

A.1.11 Investiga y realiza por lo menos cuatro aplicaciones con matrices de incidencia de acuerdo con los conceptos estudiados; para ello utiliza la bibliografía Sugerida

A.1.12 Investiga y realiza por lo menos cuatro aplicaciones con matrices de adyacencia de acuerdo con los conceptos estudiados; para ello utiliza la bibliografía Sugerida

A.1.13 Investiga otros tipos de gráficas y si existen aplicaciones reales.

A.11.4 Expón las diferencias fundamentales entre las matrices de incidencia y adyacencia utilizando la bibliografía citada.

A.1.15 Consulta y expón las principales aplicaciones de los caminos.

A.1.16 Investiga y crea una tabla especificando las ventajas y desventajas de los caminos utilizando la bibliografía citada.

A.1.17 Investiga los conceptos relacionados con los caminos utilizando las de este tema y la bibliografía citada.

Cuestionario de autoevaluación

1. Da el concepto de gráfica.
2. Explica el concepto de objeto.
3. Define el concepto de punto.
4. Da un ejemplo una gráfica
5. Cuál sería un ejemplo de un objeto
6. Indica un ejemplo de una gráfica con tres puntos y cuatro aristas
7. Define una gráfica cerrada

8. Define una gráfica abierta

9. Da un ejemplo de una gráfica cerrada

10 Da un ejemplo de una gráfica abierta

Examen de autoevaluación

Elige la opción correcta

1. Una línea que une a dos vértices en una gráfica se le llama arista:

a) Verdadero
b) Falso

2. Una gráfica abierta es aquella que termina donde inicia:

a) Verdadero
b) Falso

3. A una secuencia alterna de vértices y aristas en una gráfica con un inicio y un destino se le llama camino:

a) Verdadero
b) Falso

4. Cada gráfica tiene una longitud la que se encuentra representada por el número de aristas, que lo forman:

a) Verdadero
b) Falso

5. Si en un camino todos sus vértices son diferentes al camino se le llamara camino simple:

a) Verdadero
b) Falso

6. Si en un camino todas las aristas son diferentes entonces el camino será un recorrido:

a) Verdadero
b) Falso

7. Para que un camino sea un ciclo, el camino deberá ser cerrado es decir que el vértice de inicio sea igual al vértice final:

a) Verdadero
b) Falso

8. Los árboles son una clase de grafos:

a) Verdadero
b) Falso

9. La matriz de incidencia es la que contiene en sus columnas el índice de sus aristas:

a) Verdadero
b) Falso

10. La matriz de adyacente es la que contiene puros unos en su diagonal principal

a) Verdadero
b) Falso

TEMA 2. COMPUTABILIDAD Y LENGUAJES FORMALES

Objetivo particular

El alumno utilizará el límite de una función a partir de determinadas propiedades para la solución de problemas a través de funciones, para que el empresario tenga un mayor control de sus actividades cotidianas.

Temario detallado

2.1 Conjuntos Especiales

2.2 Operaciones de Conjuntos
2.3 Subíndices e índices
2.4 Parejas Ordenadas, Notación Matricial
2.5 Demostraciones Formales
2.6 Métodos de Demostración

Introducción

En el presente tema se muestra el concepto de 'límite' así como sus propiedades. Además de las diferentes metodologías para resolver los límites y definir si estos tienen límite o no.

Conjuntos especiales

Un conjunto es una colección de elementos con una o varias características en común. Para poder estudiar y hacer operaciones con conjuntos tenemos que considerar dos conjuntos especiales que son muy importantes: el universo y el vacío.

Conjunto Universo

El conjunto universo es el conjunto que contiene a todos los elementos del fenómeno a estudiar y se representa simbólicamente por el siguiente símbolo:

Ω

Ejemplo 1.

Ω= {Todos los futbolistas del mundo}

Ejemplo 2.

Ω= {Todos los autos lujosos del mundo}

Conjunto vacío

El conjunto vacío es aquel en el cual no existe ningún elemento y se representa simbólicamente por los siguientes símbolos:

$\varnothing$, { }

Es común cometer el error en el cual el símbolo

$\varnothing$

Se incluye dentro de las llaves

{ $\varnothing$ }

y esto implica que el símbolo

$\varnothing$

Ya es un elemento en sí y por lo tanto dicho conjunto ya no es vacío

Ejemplo:

A= {Las ballenas voladoras}

Este conjunto sería vacío porque en la vida real no existen ballenas que vuelen.

Ejemplo:

B= {Los autos submarinos}

Este conjunto sería vacío porque en la vida real no existen autos que se sumerjan en el mar como si fueran submarinos.

Ejemplo:

C= {Los tiburones que caminan}

Este conjunto sería vacío porque en la vida real no existen tiburones con la capacidad de andar.

Conjunto potencia

Al grupo conformado por todos los subconjuntos de un determinado conjunto con n elementos se le nombra como conjunto potencia y se representa como 2n

Ejemplo:

Determinar el conjunto potencia del siguiente conjunto:

A= {a, b, c }

Como el conjunto A tiene tres elementos su conjunto potencia tendrá

23= 8 elementos

El conjunto potencia será

{ { a }, { b }, { c }, { a, b }, { a, c }, { b, c }, { a, b, c }, Ø }

Ejemplo:

Determinar el conjunto potencia del siguiente conjunto:

B={ a, 1 }

Como el conjunto A tiene tres elementos, su conjunto potencia tendrá

22= 4 elementos

El conjunto potencia será

{ { a }, { 1 }, { a, 1 }, Ø }

Ejemplo:

Determinar el conjunto potencia del siguiente conjunto:

A= {a, e, x }

Como el conjunto A tiene tres elementos su conjunto potencia tendrá

23= 8 elementos

El conjunto potencia será

{ { a }, { e }, { x }, { a, e }, { a, x }, { e, x }, { a, e, x }, Ø }

Operaciones de conjuntos

Unión de conjuntos

Al conjunto formado por elementos que pertenecen ya sea a un conjunto A o a un conjunto B se le denomina unión del conjunto A con el conjunto B. Y se simboliza de la siguiente manera A U B.

Ejemplo:

1. Dados los conjuntos: A = { 1, 2, 3, 4, 5 }, B = { 0, 2, 4, 5 } y C = { 5, 6 }, encontrar las uniones AUB, AUC y BUC suponiendo que A, B y C forman el universo), los cuales se muestran a continuación:

a) AUB= { 1, 2, 3, 4, 5 } U {0, 2, 4, 5 } = {0, 1, 2, 3, 4, 5 }

Observamos que en el caso anterior el resultado de la unión es igual al conjunto A quitando al cero.

b) AUC= { 1, 2, 3, 4, 5 } U { 5, 6 } = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

Observamos que en el caso anterior el conjunto resultante contiene a cada uno de los elementos de los dos conjuntos A y B sin repetir el número 5.

c) BUC= {0, 2, 4, 5 } U { 5, 6 } = {0, 2, 4, 5, 6 }

Observamos que en el caso anterior el conjunto resultante contiene a cada uno de los elementos de los dos conjuntos B y C sin repetir el número 5.

Intersección de conjunto

Al conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto A y al conjunto B; es decir los elementos comunes de los conjuntos A y B se le llama intersección del conjunto A con el conjunto B. Y se simboliza de la siguiente manera: $A \cap B$.

Ejemplo:

1. Dados los conjuntos: $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$, $B = \{ 0, 2, 4, 5 \}$ y $C = \{ 5, 6 \}$, encontrar las intersecciones $A \cap B$, $A \cap C$ y $B \cap C$ (suponiendo que A,B y C forman el universo), los cuales se muestran a continuación:

a) $A \cap B = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \} \cap \{0, 2, 4, 5 \} = \{ 2, 4, 5 \}$

Observamos que en el caso anterior los elementos comunes 2, 4 y 5 son el resultado de la intersección de ambos conjuntos.

b) $A \cap C = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \} \cap \{ 5, 6 \} = \{ 5 \}$

Observamos que en el caso anterior tiene un elemento común el número 5 que es el resultado que forma la intersección de ambos conjuntos.

c) $B \cap C = \{0, 2, 4, 5\} \cap \{ 5, 6 \} = \{ 5 \}$

Observamos que en el caso anterior tiene un elemento común de donde el resultado es el conjunto formado por el número 5.

Diferencia de conjuntos

Al conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto A y no pertenecen al conjunto B; es decir los elementos que sólo se encuentran en el conjunto A y no son comunes a los conjuntos A y B comunes, a dicho conjunto se llama diferencia del conjunto A con el conjunto B. Y se simboliza de la siguiente manera A - B.

Ejemplo:

1 Dados los conjuntos: A = { 1, 2, 3, 4, 5 }, B = { 0, 2, 4, 5 } y C = { 5, 6 }, encontrar las diferencias A-B, B-A, A-C, C-A, B-C y C-B (suponiendo que A, B y C forman el universo), los cuales se muestran a continuación:

a) A-B= { 1, 2, 3, 4, 5 } - {0, 2, 4, 5 } = {1, 3 }

Observamos que en el caso anterior los elementos que solamente pertenecen al conjunto A y que no están en el conjunto B son los números 1 y 3 que es el resultado que forman la diferencia del presente ejercicio.

b) B-A= {0, 2, 4, 5} - { 1, 2, 3, 4, 5 } = { 0 }

Observamos que en el caso anterior que la diferencia el único elemento que no esta el conjunto A es el cero el cual representa la solución del presente ejercicio.

c) A-C= {1, 2, 3, 4, 5 } - { 5, 6 } = { 1, 2, 3, 4}

Observamos que en el caso anterior tiene varios elementos comunes los cuales son 1, 2, 3, y 4 que es el resultado que forma la diferencia de ambos conjuntos.

d) C-A= {5, 6} - {1, 2, 3, 4, 5} = {6}

Observamos que en el caso anterior tiene un elemento común el cual es el número 6 que es el resultado que forma la diferencia de ambos conjuntos.

e) B-C= {0, 2, 4, 5} - {5, 6} = {0, 2, 4}

Observamos que en el caso anterior los elementos de la diferencia son los números 0, 2 y 4 que es el resultado que forma la diferencia de ambos conjuntos.

f) C-B= {5, 6} - {0, 2, 4, 5} = {6}

Observamos que en el caso anterior el elemento de la diferencia es el número 6 que es el resultado que forma la diferencia de ambos conjuntos.

Complemento de un conjunto

Al conjunto formado por los elementos del universo que no está en el conjunto A se le llama conjunto complemento de A. Y se simboliza de la siguiente manera A' o Ac.

Ejemplo:

1. Dados los conjuntos: A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {0, 2, 4, 5} y C = { 5, 6 }, encontrar sus complementos (suponiendo que A, B y C forman el universo), los cuales se muestran a continuación:

a) Ac= {1, 2, 3, 4, 5}c = {0, 6 }

Observamos que en el caso anterior los elementos que solamente pertenecen al complemento del conjunto A son los números que faltan para formar el universo, los cuales son el 0 y el 6.

b) Bc= {0, 2, 4, 5}c = { 1, 3, 6 }

Observamos que en el caso anterior los elementos que solamente pertenecen al complemento del conjunto A son los números que faltan para formar el universo, los cuales son el 1, 3, y el 6.

c) Cc= {5, 6 }c = { 0, 1, 2, 3, 4}

Observamos que en el caso anterior los elementos que solamente pertenecen al complemento del conjunto A son los números que faltan para formar el universo, los cuales son el 0,1, 2, 3 y el 4.

Inducción matemática

Hoy en día existen muchos procesos en los cuales se requiere medir el número de veces que se llevará a cabo dicho proceso, como por ejemplo la búsqueda binaria de un dato en una base de datos, las suma de los primeros números naturales entre otros.

Para dichos procesos se requiere de fórmulas matemáticas que nos digan el número de veces que en promedio o también como máximo se llevará a cabo dicho proceso.

Una vez que se tiene dicha fórmula se requiere de una metodología para probar que dicha fórmula es de absoluta confiabilidad.

Para ello se cuenta con el método de inducción matemática, que nos permite verificar que la fórmula es confiable para su uso cotidiano.

Principio de inducción matemática[3]

El principio de la inducción matemática consiste básicamente en tres pasos fundamentales los cuales se definen a continuación:

Paso 1

Se da como verdadero que la fórmula se cumple para un valor igual a 1

[3] Richard Jonhsonbaugh, *Matemáticas Discretas*, Ciudad, Iberoamericana, 1988, p. 506.

Es decir que para n=1 es válido f(n)=f(1)

Paso 2

Se da como verdadero que la fórmula se cumple para un valor igual a K

Es decir que para n=K es válido f(n)=f(K)

Paso 3

Se le sume el término enésimo más uno a la fórmula, es decir el término que sigue del elemento n, y después se obtiene una fórmula en términos de n+1

Ejemplo 1 de inducción matemática

Supóngase que se desea demostrar que la suma de los primeros números naturales está dada por la siguiente fórmula.

$$1+2+3+4+.........+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Aplicando la inducción matemática tenemos que

Paso 1 n=1

$$\frac{1(1+1)}{2}=\frac{1(2)}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Paso 2 n=k

$$\frac{k(k+1)}{2}$$

Lo suponemos válido para n=k

Paso 3

En este paso le sumamos el término n+1 es decir un valor más al que le sigue a n

$$1+2+3+4+..........+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$$

La fórmula $\frac{n(n+1)}{2}$ debemos reexpresarla en términos de n+1, es decir en lugar de n debe aparecer n+1.

Para ello debemos desarrollar $\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$

$$\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2(n+1)}{2}=\frac{n^2+n+2(n+1)}{2}\frac{n^2+n+2n+2}{2}=\frac{n^2+3n+2}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}=$$
$$\frac{(n+1)\left[(n+1)+1\right]}{2}$$

Que es la fórmula en términos de n+1.

Ejemplo 2 de inducción matemática

Supóngase que se desea demostrar que la suma de los primeros números pares naturales está dada por la siguiente fórmula

$$2+4+6+..........+2n=n(n+1)$$

Aplicando la inducción matemática tenemos que

Paso 1 n=1

$$1(1+1)=1(2)=2$$

Paso 2 n=k

$k(k+1)$

Lo suponemos válido para n=k

Paso 3

En este paso le sumamos el término n+1 es decir un valor más al que le sigue a n

$$2+4+6+..........+2n+2(n+1)=n(n+1)+2(n+1)$$

La fórmula $n(n+1)$ debemos reexpresarla en términos de n+1, es decir en lugar de n debe aparecer n+1.

Para ello debemos desarrollar $n(n+1)+2(n+1)$

$$n(n+1)+2(n+1)=n^2+n+2n+2=n^2+3n+2=(n+1)(n+2)=(n+1)[(n+1)+1]$$

Que es la fórmula en términos de n+1.

2.3. Subíndices e índices[4]

Un índice es un valor que se utiliza para diferenciar a elementos de una misma especie pero que a su vez son diferentes entre sí.

Un subíndice, al igual que un índice, es un valor que se utiliza también para diferenciar a elementos de una misma especie pero con diferentes características, como por ejemplo los elefantes son diferentes a los demás animales pero dentro de los elefantes existen los asiáticos y los africanos.

---

[4] Kenneth Ross, y Charles Wright, *Matemáticas Discretas*, 2a ed., Ciudad, Prentice Hall, 1990, p. 673.

Ejemplo

El directorio telefónico: su índice podría ser por ejemplo las personas que aparecen alfabéticamente por su apellido paterno.

Y el subíndice sería el apellido materno.

Y de esta manera localizar el teléfono de alguna persona en particular.

La notación con subíndices es muy utilizada por su versatilidad, sobre todo cuando se utiliza una gran cantidad de elementos. Un ejemplo de ello es la utilización de polinomios, como por ejemplo:

P(x)=anXn+ an-1Xn-1+..................+ a1X1

Donde an≠0

Los subíndices también son muy utilizados en conjuntos por ejemplo el conjunto An, o también una sucesión de elementos { x1, x2,..........., xn}

Otro ejemplo de índices y subíndices está dado por una agenda telefónica donde el índice se encuentra representado por el apellido paterno y los subíndices por el apellido materno y podría seguir un sus-subíndice representado por el nombre y así sucesivamente.

2.4 Parejas ordenadas, notación matricial

Parejas ordenadas

En las matemáticas algunas ocasiones se tiene la necesidad de utilizar elementos ordenados, los cuales se simbolizan por (x,y), el par ordenado anterior se considera diferente del par ordenado (y,x), considerando que x≠y.

A los pares ordenados en su conjunto se le llama producto cartesiano.

Ejemplo

Supóngase que tenemos la siguiente relación y=x+1 y valores para x de 0, 2,3 y 6

Entonces los valores de y serán 1, 3, 4 y 7 respectivamente

Los valores anteriores forman las siguientes parejas ordenadas

(0,1), (2,3), (3,4) y (6,7)

Notación matricial

Hoy en día es un muy habitual expresar información que proviene de distintas fuentes y con características diferentes y para ello es importante canalizar la información en forma de una matriz.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

2X1+ 1X2 +1X3 =26

1X1+ 2X2 +1X3 =35

1X1+ 1X2 +2X3 =44

La matriz para el sistema de ecuaciones lineales de tres ecuaciones con tres incógnitas del ejercicio anterior, se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2.5. Demostraciones formales

En las matemáticas es importante la necesidad de comprobar la validez de algún concepto matemático y por lo tanto se tiene la necesidad de verificar la veracidad de dicho concepto con una demostración formal.
Se llama demostración formal al razonamiento que nos permite establecer la validez de un teorema.

2.6 Métodos de demostración

Los métodos de demostración son metodologías utilizadas para verificar la validez de un concepto matemático. Como también para verificar la validez de un teorema, lema o corolario.

Y ya validados, poder utilizarlos de una manera confiable.

Dentro de los métodos de demostración podemos mencionar, al método de demostración directa y el método de demostración indirecta.

Método de demostración directa

La demostración directa se basa en una serie de hipótesis las cuales nos llevan a una conclusión, es decir, que dichas hipótesis implican razonar en forma muy concluyente la veracidad de la hipótesis.

.

Por ejemplo, podríamos demostrar que los números naturales pertenecen a los números reales, que pi es un número irracional, y para ello utilizar la demostración directa.

Método de demostración indirecta

El método de demostración indirecta es utilizado para la demostración, cuando se parte de una proposición contra positiva, es decir que se inicia proponiendo algo contrario, de lo que se desea probar.

Como por ejemplo se desea probar que todos los números 2n, con n en los números naturales es par, se parte diciendo con la demostración indirecta de que 2n no es par.

Bibliografía del tema 2

Abellanas, M y D. Lodares, Análisis de algoritmos y teoría de grafos, México, Macrobit, 1991, 189 pp.

Kolman, Bernard, Robert C Busby, y Sharon Ross, Estructura de matemáticas discretas para la computación, 3ª ed., México, Prentice Hall, 1995, 524 pp.

LIU, C. L. Elementos de matemáticas discretas, México, McGraw-Hill, 1995, 432 pp.

Ross, Kennet A. Matemáticas discretas, México, Prentice Hill, 1990, 367 pp.

Bibliografía Complementaria

Tremblay, Jean-Paul, Manohar, R., Matemáticas discretas, México Cecsa, , 1996, 597 pp.

Johnsonbaugh Richard, Matemáticas discretas, Iberoamericana, México, Iberoamericana ,1988, 506 pp.

Lipschutz, Seymour, Lipson Marc, Matemática discreta, Schaum, Madrid, McGraw Hill, 2004, 420 pp.

Actividades de aprendizaje

A.2.1. Resuelve los ejercicios pares de las páginas 37 y 40 del libro Johnsonbaugh Richard, *Matemáticas discretas*, citados en la bibliografía

A.2.2. Investiga en tres áreas diferentes de la FCA cómo está formada la red de computadoras de cada área y clasifícalas en diferentes conjuntos.

A.2.3. Investiga en tres áreas diferentes de la FCA cómo está formada la red de computadoras de cada área y obtén una relación existente en cuanto a las operaciones de conjuntos.

A.2.4. Resuelve los ejercicios pares de las páginas 47 y 49 del libro Lipschutz, Seymour, Lipson Marc, *Matemática discreta*.

A.2.5 Realiza un compendio de los conceptos vistos en el presente tema y elabora tus propias definiciones.

A.2.6 Proporciona por lo menos 5 situaciones profesionales o empresariales en donde se utilice la inducción matemática.

A.2.7 Investiga ejemplos prácticos relacionados con el tema de parejas ordenadas, proporcionando las fuentes de referencia.

A.2.8 Investiga y realiza por lo menos cuatro aplicaciones con índices de acuerdo con los conceptos estudiados; para ello utilice la bibliografía sugerida.
A.2.9 Investiga otros tipos de índices y si existen aplicaciones reales.

A.2.10 Expón las diferencias fundamentales entre los índices y subíndices utilizando la bibliografía citada.

A.2.11 Consulta y expón las principales aplicaciones del método de demostración directa.

A.2.12 Investiga y crea una tabla con las ventajas y desventajas de la inducción matemática.

Cuestionario de autoevaluación

1. Define el concepto de conjunto especial.
2. Qué es la unión de conjuntos
3. Explica la intersección de conjuntos.
4. Da un ejemplo de un conjunto.
5. Da un ejemplo de un conjunto especial.
6. Da un ejemplo de un índice.
7. Explica el concepto de índice.
8. Explica el concepto de subíndice.
9. Define el concepto de pareja ordenada.
10. Define la inducción matemática.

Examen de autoevaluación

Elige la opción correcta

1. Sean A={1,2,3,4,5} y B={1,a,b,c,5} dos conjuntos, indica cual es la unión de dichos conjuntos:

a) {1,2,3,4,5,a,b,c}

b) {1,5,a,b,c}

c) {1,2,3,4,5}

d) {1,5,a,b,c}

e) {2,3,4}

2. Sean A={1,2,3,4,5} y B={1,a,b,c,5} dos conjuntos, indica cuál es la intersección de dichos conjuntos:

a) {1,2,3,4,5,a,b,c}

b) {1,5,a,b,c}

c) {1,2,3,4,5}

d) {1,5}

e) {2,3,4}

3. Sean A={1,2,3,4,5} y B={1,a,b,c,5} dos conjuntos, indique cuál es la diferencia de dichos conjuntos:

a) {1,2,3,4,5,a,b,c}

b) {1,5,a,b,c}

c) {1,2,3,4,5}

d) {1,5,a,b,c}

e) {2,3,4}

4. Suponiendo que se tiene la suma de los primeros n números naturales, y si su fórmula es n(n+1)/2, cuál es la fórmula que se obtendrá al demostrarlo por inducción matemática:

a) n(n+2)/2

b) (n+1)(n+3)/2

c) (n+1)(n+2)/2

d) (n+1)(n+3)/3

e) (n+1)(n+1)/2

Indica si las siguientes aseveraciones son falsas o verdaderas.

5. El siguiente conjunto A={ 6} es uno especial:

   a) Verdadero

   b) Falso

6. El siguiente conjunto B={ 6,9}es uno especial:

   a) Verdadero

   b) Falso

7. En un conjunto habitacional donde cada edificio tiene una letra, el número de cada departamento es un subíndice:

   a) Verdadero

   b) Falso

8. En una agenda telefónica si el número de estado es el índice entonces el número telefónico es un subíndice:

   a) Verdadero

   b) Falso

9. Una característica de los pares ordenados es que al conjunto de todos los pares ordenados se le denomina producto cartesiano:

a) Verdadero

b) Falso

10. Se llama demostración válida a la demostración formal con una sucesión válida de proposiciones, sin importar lo que se concluya:

a) Verdadero

b) Falso

TEMA 3. Relaciones y Funciones

Objetivo particular

El alumno identificará cuándo se debe utilizar los conceptos de relación y función y sus propiedades para la solución de un problema. Aplicará las herramientas como la recursividad, la notación o grande y sabrá cuándo una función es invertible y cuándo hay una cerradura.

Temario detallado

3.1. Funciones

3.2. Funciones invertibles

3.3. Sucesiones y notación o-grande

3.4. Definiciones recursivas

3.5. Relaciones recursivas

3.6. Definiciones generales de recursion

3.7. Relaciones de equivalencia

3.8. Relaciones generales

3.9. Composición de relaciones

3.10. Cerradura

Introducción

En el presente tema se muestra el concepto de relación y funciones así como sus propiedades. También los diferentes conceptos como recursión, invertibilidad y cerradura, muy importantes en las matemáticas.

3.1 Funciones

Una función es uno de los conceptos más importantes dentro de las matemáticas. Para definir su concepto es importante considerar que cualquier fórmula matemática que se exprese (considerando para nuestro estudio dos variables x, y) como una variable dependiente (y) de la cual sus valores dependen de una fórmula que se encuentra expresada en términos de una variable independiente llamada comúnmente (x), dicha relación debe cumplir con una condición muy importante, la cual manifiesta que a partir de un solo valor de la variable independiente, debe obtenerse un solo valor para la variable dependiente.

A los valores que puede tomar la variable independiente se le llama dominio, y los valores que toma la variable dependiente se le nombra contradominio.

Ejemplo:
Considérese la función $f(x)=2x^3+1$

Si el dominio está dado por: {-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}, indica cuál es su contradominio.

El contradominio es {-127, -53, -15, -1, 1, 3, 17, 55, 129}

Ejemplo: $f(x)=x^2+2x+1$

Considérese la función

Si el dominio esta dado por: { -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}, indica cuál es su contradominio

El contra dominio es {4, 1, 0, 1, 4, 9, 16, 25}

Principales tipos de funciones

Función lineal

La función lineal se encuentra representada por la siguiente expresión matemática:

$Ax + By + C = 0$ con el supuesto de que $A \neq 0$ y $B \neq 0$, y considerando que A, B, C son constantes.

Ejemplo:

$Y = + 8x+4$

En la expresión matemática anterior podemos observar que el coeficiente correspondiente al término en x es igual a ocho y el término en y es igual a uno por lo tanto son diferentes de cero y por lo tanto una función lineal.

Función cuadrática

La función cuadrática se encuentra representada por la siguiente expresión matemática:

$Ax^2 + Bx + C = 0$ con el supuesto de que $A \neq 0$, y considerando que A, B, C son constantes.

En la expresión anterior es muy importante que el coeficiente A tenga un valor diferente a cero, pues de no ser así, se reduciría una línea recta,

Ejemplo:

$Y = x^2 + 7x+12$

En la expresión matemática anterior podemos observar que el coeficiente correspondiente al término en x^2 L es igual a uno y por lo tanto diferente de cero y por lo tanto una función cuadrática.

Función polinomial

Una función que se pueda expresar matemáticamente de la siguiente manera:

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + . . . + a_1x + a_0$ (Considerando que los valores de $a_{n,}$ a_{n-1},.... a_0 son valores constantes y el término a_n debe ser diferente de cero, es decir $a_n \neq 0$. El valor de n es un número entero positivo el cual representa el grado de la función polinomial).

Ejemplo:

$$Y = 2x^4 + 7x+8$$

En la expresión matemática anterior podemos observar que el coeficiente correspondiente al término en x^4 es igual a dos y por lo tanto diferente de cero y por lo tanto la función representa una función polinómica de cuarto grado.

Función exponencial

Es una función que se puede expresar matemáticamente de la siguiente manera:

$f(x) = c^x$ (Considerando que el valor de c debe tener las siguientes características $c \neq 1$ y $c > 0$. El valor de c también representa la base y esta función es considerada como el antilogaritmo de un logaritmo, en este caso de base c).

Ejemplo:

$$Y = 4^x$$

En la expresión matemática anterior podemos observar que la base es igual a cuatro, y que la base cumple con ser diferente de uno y positiva. Y por lo tanto representa una función exponencial con base cuatro.

Función logarítmica y su representación geométrica

La función logarítmica se representa de la siguiente manera:

Si $c > 0$ y $c \neq 0$, entonces:

$$Y = \log_c x \quad \text{si y sólo si} \quad x = c^y \ ; \ \text{y} \quad x > 0$$

Ejemplo:

$$Y = \log_8 x$$

En la expresión matemática anterior podemos observar que la base es igual a ocho, que la función logarítmica cumple con la condición de que $x > 0$ y que se puede expresar en términos de x como $x=8^x$.

3.2 Funciones invertibles

El concepto de función invertible quiere decir que una función tiene inversa. A la función inversa se le denotará por $f(x)^{-1}$, para que una función tenga inversa debe cumplirse el que el producto de la inversa por la izquierda por la función original sea igual a la función identidad, es decir $f(x)^{-1}f(x)=I(x)$ ($I(x)$ función identidad), y por otro lado debe cumplirse el que el producto de la inversa por la derecha por la función original sea igual a la función identidad es decir $f(x)\ f(x)^{-1}f=I(x)$, si se cumplen con estas dos condiciones entonces la función $f(x)$ tiene su función inversa y se denota por $f(x)^{-1}$.

Además de lo anterior hay otra manera de observar que una función tiene inversa y esto se realiza verificando si la función es inyectiva, suprayectiva y biyectiva.

Cualquier función que cumpla con tener las características anteriores es una función que tiene función inversa.

A continuación se definen los conceptos de inyectividad, suprayectividad y biyectividad.

Para que una función sea **inyectiva** debe cumplir: que para cada valor del rango, le corresponde un único valor de la imagen y viceversa, es decir que para cada único valor de la imagen le corresponde un único valor del rango. A esto se le conoce con el nombre también de funciones uno a uno, que al final de cuentas es lo mismo que ser una función inyectiva.

Ejemplo.

$Y=x+1$

Aquí es fácil ver que para cada valor de x se obtiene un valor de y sin ningún problema, además también podemos ver si es inyectiva, si podemos despejar la función en función de y; es decir si la podemos escribir de la siguiente manera:

Despejándola, tenemos

$$Y=x+1$$

El uno está sumando, pasa restando

$$X=y-1$$

De aquí es fácil también ver que para cada valor de y se obtiene un valor de x sin ningún problema.

Para que una función sea **suprayectiva** debe cumplir: que para todos los valores del rango, la función debe estar definida, y viceversa; es decir que debe cumplir que para todos los valores de la imagen, la función debe estar definida.

Ejemplo.

$Y=x+1$

Aquí es fácil ver que si el rango de la función es (-1,10) para cada valor de x dentro del rango no hay ningún problema y de igual manera para la imagen está definida si su imagen está dada por (0,11) se obtiene un valor de y sin ningún problema.

Para que una función sea biyectiva debe cumplir: que sea inyectiva y suprayectiva, de otra manera basta y sobra con que una función no sea inyectiva, suprayectiva o ambas para que no sea biyectiva.

Ejemplo.

$Y=x^3+1$

Aquí es fácil ver que es uno a uno y que si el rango de la función es (-8,6) para cada valor de x dentro del rango no hay ningún problema y de igual manera para la imagen está definida si su imagen está dada por (-512,216) se obtiene un valor de y sin ningún problema.

3.3 Sucesiones y notación o_grande

Sucesiones

Una familia importante de funciones es por ejemplo la que consta de las funciones que tienen como dominio el conjunto de los números naturales, estas funciones se llaman sucesiones.

Ejemplo

f(n)=1/n   con nЄИ (И números naturales)

Ejemplo

f(n)=n(n+1)/2   con nЄИ (И números naturales)

Notación o_grande

La notación o_grande es utilizada para describir una tendencia que se acerca a un determinado número de pasos que se realizan n veces, y que se utilizan constantemente sobre todo en el área de computación.

Para ejemplificar esto, supongamos que tenemos una función f(n), para que esta función sea una o_grande necesitamos acotar a la función f(n), y de esta manera obtendríamos nuestra o grande O(n).

Ejemplo

Quisiéramos saber a qué tiende la suma de valores 1/n para ello no tendríamos que hacerlo indefinidamente, tal vez bastaría hacerlo desde que n toma un valor de uno hasta un valor de cien.

3.4 Definiciones recursivas

Recursión[5] es "la forma en la cual una función se recalcula utilizando el resultado anterior de la misma función específica y de esta manera llegar a un resultado final".

La **recursividad**[6] es también "una técnica muy importante dentro de la programación que permite que una función se llame a sí misma".

Un ejemplo clásico de la recursividad tanto en el ámbito matemático y de la programación es el caso de la función factorial.

---

[5] Disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Recursividad, recuperado 20/10/08

[6] Disponible en:

Ejemplo. Calcular la factorial del número cuatro

A continuación tenemos que tomar en cuenta que

Factorial de cero es igual a uno

Factorial de uno es igual a uno

Para x=0 tenemos

$$f(x) = f(0) = 0! = 1$$

Para x=1

$$f(x) = f(1) = 1! = 1f(0) = 1(1) = 1$$

Para x=2

$$f(x) = f(2) = 2! = 2f(1) = 2(1) = 2$$

Para x=3

$$f(x) = f(3) = 3! = 3f(2) = 3(2) = 6$$

Para x=4

$$f(x) = f(4) = 4! = 4f(3) = 4(6) = 24$$

Donde podemos observar que el factorial de cuatro nos da como resultado un valor de 24.

---

http://msdn.microsoft.com/library/spa/default.asp?url=/library/SPA/jscript7/html/recurse.asp, última actualización noviembre 2007; la traducción es mía; recuperado el 20/10/08

Relaciones recursivas[7]

En las matemáticas es frecuente representar una relación a partir de (suma , resta y multiplicación entre otras, por constantes) varias ponderaciones y valores previos de dicha relación. Estas relaciónes normalmente representan una sucesión, a continuación se muestra un ejemplo de relación recursiva:

$$S_n=kS_{n-2} + (k-1)S_{n-1}$$

Considerando que k es un valor constante y n un número entero positivo.

Aquí podríamos preguntarnos qué ocurre para obtener los valores de la relación cuando n es igual a cero y n igual a uno, en estos dos casos anteriores, la sucesión debe tomar valores determinados para dichos valores de la sucesión S_0 y S_1.

Ejemplo: Considérese la siguiente relación recursiva

$$S_n=kS_{n-2} + (k-1)S_{n-1}$$

con k igual a dos y n igual a cuatro, y definíamos los valores de la sucesión para n igual a cero y uno.

Definíamos que para n igual cero $S_0=0$ y para n igual uno $S_1=1$, por lo tanto tenemos que

$$S_n=2S_{n-2} + (1)\ S_{n-1}=2S_{n-2} + S_{n-1}=.$$

Para n=2

[7] Kenneth Ross, Charles Wright, *Matemáticas Discretas*, 2ª ed., México, Prentice Hall, 1990, p. 673.

$S_2=2S_0 + S_1=2(0) + 1= 0 + 1= 1$

Para n=3

$S_3 = 2S_1 + S_2 = 2(1) + (1) = 2 + 1= 3$.

Para n=4

$S_4 =2S_2 + S_3=2(1) + (3) = 2 + 3= 5$.

Considerando que k es un valor constante y n un número entero positivo.
Aquí podríamos preguntarnos qué ocurre para obtener los valores de la relación cuando n es igual a cero y n igual a uno, en estos dos casos anteriores, la sucesión debe tomar valores determinados para dichos valores de la sucesión S_0 y S_1.

3.6. Definiciones generales de recursión

Es importante orientar de una manera específica la aplicación en términos generales de recursión, por mencionar dos casos específicos uno el caso matemático y otro dentro de la programación de un lenguaje en general.

Desde el punto de vista matemático el concepto de recursión implica la obtención de valores sucesivos a partir de los valores anteriores ya calculados, claro cabe destacar al inicio del proceso los primeros valores hay que definirlos para poder iniciar con el cálculo de valores mas alejados, el clásico ejemplo es el del factorial, cuyo ejemplo se encuentra en el punto anterior de definiciones recursivas y podremos ver otro más en el punto de relaciónes recursivas.

El ejemplo clásico de recursión dentro de las matemáticas es la función factorial.

Desde el punto de vista de la programación una utilización de la recursión está dada cuando se requiere utilizar una función que se llame así misma, lo anterior representa un recurso muy importante y poderoso en el mundo de la programación.

Un ejemplo de la recursividad dentro de un lenguaje de programación es uno en el cual una ventana tenga un mismo menú para todos los módulos del programa y se llame a sí misma varias veces.

3.7Relaciónes de equivalencia[8]

Como ya sabemos que en las matemáticas una relación en R^2 es conjunto de parejas ordenadas (x,y) que pertenecen a R^2 y *x,y* pertenecen a R (R números reales).

Entonces una relación de equivalencia es aquella que cumple con las siguientes propiedades, debe ser reflexiva, simétrica y transitiva.

A continuación se definen los conceptos de reflexividad, simetría y transitividad para una relación.

Para que una relación sea reflexiva debe cumplir que si *x,* y pertenecen a los números reales entonces (x,y) pertenece a R^2 (R^2 = RxR producto cartesiano).

Ejemplo

Supóngase que R={ 1, 2, 3, 4 } entonces defínase R^2

Para que cumpla con la propiedad de reflexividad.

---

[8] UTFSM, Departamento de Informática: “Relaciones de equivalencia”, en Funamentos de Informática I, 1 sem. de 2007; disponible en: http://www.inf.utfsm.cl/~liuba/fund/rel_equival.pdf#search='relaciones%20de%20equivalencia, recuperado el 20/10/08. '

R^2 ={ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4) }

Podemos observar que el conjunto de parejas (x,y) formadas a partir de R deben ser todas las combinaciones de los números 1, 2, 3, y 4 entre sí de tal manera que se formen 16 parejas ordenadas para este caso (x,y números reales).

Para que una relación sea simétrica debe cumplir que si *x,* y pertenecen a los números reales y (x,y) pertenece a R^2 entonces (y,x) también pertenece a R^2 (R^2 = RxR producto cartesiano).

Ejemplo

Supóngase que R={ 0, 2, 3, 4 } entonces defínase R^2
Para que cumpla con la propiedad de simetría.

R^2 = { (0,0), (0,2), (0,3), (0,4), (2,0), (2,2), (2,3), (2,4), (3,0), (3,2), (3,3), (3,4), (4,0), (4,2), (4,3), (4,4) }

Podemos observar que para cada pareja (x,y) existentes en R^2 existe su contraparte (y,x) en R^2 para este caso (x,y son números reales).

Para que una relación sea transitiva debe cumplir que si (x,y), (y,z) pertenece a R^2 entonces (x,z) también pertenece a R^2 (R^2 = RxR producto cartesiano, *x,y* y *z* son números reales).

Ejemplo

Supóngase que R={ 0, 2, 3, 5 } entonces defínase R^2
Para que cumpla con la propiedad de transividad.

R^2 = { (0,0), (0,2), (0,3), (0,5), (2,0), (2,2), (2,3), (2,5), (3,0), (3,2), (3,3), (3,5), (5,0), (5,2), (5,3), (5,5) }

Podemos observar que para cada pareja (x,y), (y,z) existentes en R^2 existe la pareja ordenada (x,z) para este caso. Para mostrar esto usaremos un caso particular como las parejas (0,2) y (2,0) esto implica la pareja ordenada (0,0) también este y observando en R^2 del ejercicio vemos que si se encuentra y como esto se cumple para todos entonces esta relación es transitiva.

Y como ya habíamos mencionado anteriormente una relación que es reflexiva, simétrica y transitiva es una relación de equivalencia.

Ejemplo

Supóngase que R={ 0, 2, 3, 6 } entonces defínase R^2
Para que cumpla con ser una relación de equivalencia.

R^2 = { (0,0), (0,2), (0,3), (0,6), (2,0), (2,2), (2,3), (2,6), (3,0), (3,2), (3,3), (3,6), (6,0), (6,2), (6,3), (6,6) }

Podemos observar que para cada pareja (x,y) existente en R^2 existe su contraparte (y,x) en R^2 para este caso (x,y son números reales).
Por lo tanto es reflexiva.

Podemos observar que para cada pareja (x,y) existentes en R^2 existe su contraparte (y,x) en R^2 para este caso (x,y son números reales).
Por lo tanto es simétrica.

Podemos observar que para cada pareja (x,y), (y,z) existentes en R^2 existe la pareja ordenada (x,z) para este caso. Para mostrar esto usaremos un caso

particular como las parejas (0,6) y (6,0) esto implica la pareja ordenada (0,0) también este y observando en R^2 del ejercicio vemos que si se encuentra y como esto se cumple para todos entonces esta relación es transitiva.
Y como esta relación cumple con ser reflexiva, simétrica y transitiva es una relación de equivalencia.

3.8. Relaciones generales

Dentro de las relaciones generales tenemos a las siguientes, relación binaria, relación de equivalencia y relación inversa:

A continuación se definirán los conceptos de relación binaria e inversa, como el concepto de relación de equivalencia ya se mencionó anteriormente ya no se repetirá nuevamente en este punto.

Relación binaria

Una relación que cumple con ser una regla de correspondencia de un conjunto de elementos V a uno de elementos W y este es un subconjunto de VxW, entonces la relación es una relación binaria.

Ejemplo.
Sean V={ 1, 2, 3} y W={ 5,8 }

Entonces la relación binaria será VxW={ (1,5), (1,8), (2,5), (2,8), (3,5), (3,8) }

Como incluye todas las (x,y) posibles la relación anterior es binaria.

Relación inversa

La relación inversa existe cuando se pueden obtener todos las parejas (y,x) considerando el conjunto original de parejas (x,y) correspondientes a la relación original. La relación inversa se denota como $g(x)^{-1}$ suponiendo que la relación original es g(x).

Ejemplo

Sean V={ 2,4, 5} y W={ 0,8 }

Su relación dada por VxW sería

VxW={ (2,0), (2,8), (4,0), (4,8), (5,0), (5,8) }

Y por lo tanto la relación inversa es

$(VxW)^{-1}$={ (0,2), (8,2), (0,4), (8,4), (0,5), (8,5) }

3.9. Composición de relaciones

En un par de relaciones su composición se define como la sustitución de una de ellas en la otra; es decir la composición implica que una de las relaciones se sustituirá en la otra como si fuera la variable independiente y de esta manera obtener una nueva relación.

Por ejemplo supóngase que se tienen las relaciones f(x) y h(x) entonces podemos tener las dos siguientes composiciones f(h(x)) que implica que la relación h(x) se sustituirá por la variable dependiente de la relación f(x), y h(f(x)) que implica que la relación f(x) se sustituirá por la variable dependiente de la relación h(x).

Ejemplo

Sean $f(x)=x^2+2x+4$ y $h(x)=4x+1$

La composición de f(h(x)) es

$f(h(x))=(4x+1)^2+2(4x+1)+4=16x^2+8x+1+8x+2+4=16x^2+16x+7$

La composición de h(f(x)) es

$h(f(x))=4(x^2+2x+4)+1= 4x^2+8x+16+1= 4x^2+8x+17$

Podemos observar que las dos composiciones son diferentes, pero se puede presentar que en algún caso sean iguales.

Ejemplo

Sean $g(x)= x +1$ y $f(x)=x^2+5x+6$

Entonces $g(f(x)) = f(x)+1= x^2+5x+6 +1= x^2+5x+7$

3.10. Cerradura

Una cerradura se tiene cuando una relación se obtiene como resultante de la combinación de otras relaciones. Y además cumplen con ser reflexiva, simétrica y transitiva.

Por ejemplo supóngase que se tienen las siguientes relaciones $f(x)=x+1$ y $h(x)=x+2$ y una cerradura sea

$G(x) = f(x) + h(x) = (X+1) + (X+2) = 2X + 3$

es **reflexiva** puesto que para cada $(x,y) \in XxY$ con $x,y \in X$.

es **simétrica** puesto que para todo $(x,y) \in XxY$ se tiene que $(y,x) \in XxY$ con $x,y \in X$.

es **transitiva** puesto que para todo $(x,y), (y,z) \in XxY$ se tiene que $(x,z) \in XxY$ con $x,y \in X$[9].

[9] Richard Johnsonbaugh, *Matemáticas discretas*, Iberoamericana, México, 1988.

Por lo tanto es una cerradura.

Bibliografía del tema 3

Abellanas, M y D. Lodares, Análisis de algoritmos y teoría de grafos, México, Macrobit, 1991, 189 pp.

Kolman, Bernard, Robert C Busby, y Sharon Ross, Estructura de matemáticas discretas para la computación, 3ª ed., México, Prentice Hall, 1995, 524 pp.

LIU, C. L. Elementos de matemáticas discretas, México, McGraw-Hill, 1995, 432 pp.

Ross, Kennet A. Matemáticas discretas, México, Prentice Hill, 1990, 367 pp.

Bibliografía Complementaria

Tremblay, Jean-Paul, Manohar, R., Matemáticas discretas, México Cecsa, , 1996, 597 pp.

Johnsonbaugh Richard, Matemáticas discretas, Iberoamericana, México, Iberoamericana ,1988, 506 pp.

Lipschutz, Seymour, Lipson Marc, Matemática discreta, Schaum, Madrid, McGraw Hill, 2004, 420 pp.

Actividades de aprendizaje

A.3.1. Realiza un mapa mental de los conceptos más importantes de este tema.

A.3.2. Investiga en Internet al menos cinco páginas electrónicas que contengan ejemplos de aplicación, e indica su dirección.

A.3.3. Resolver los ejercicios impares de la página 103 del libro **Johnsonbaugh Richard**, *Matemáticas discretas*, Iberoamericana, México, 1988, 506 pp.

A.3.4 Realiza un compendio de los conceptos vistos en el presente tema Y da tu propia definición.

A.3.5 Proporciona por lo menos 5 situaciones profesionales o empresariales en donde se emplee una función inversa.

A3.6 Investiga ejemplos prácticos relacionados con las parejas ordenadas en los libros de referencia y en internet.

A.3.7 Investigue y describa los conceptos inyectividad, suprayectividad y biyectividad.

A.3.8 Realiza un tabla indicando las ventajas y desventajas de las diferentes tipos de relaciones.

A.3.9 Realiza un tabla indicando las ventajas y desventajas de una función inversa.

A.3.10 Investiga y realiza por lo menos cuatro aplicaciones con parejas ordenadas de acuerdo con los conceptos estudiados; para ello utilice la bibliografía Sugerida

A.3.11 Investiga y realiza por lo menos cuatro aplicaciones con recursividad de acuerdo con los conceptos estudiados; para ello utiliza la bibliografía sugerida.

A.3.12 Investiga otros tipos de recursividad en la informática y si existen aplicaciones reales.

A.3.13 Expón las diferencias fundamentales entre los recursividad matemática y la informática utilizando la bibliografía citada.

A.3.14 Consulta y expón las principales aplicaciones de las relaciones de equivalencia.

A.3.15 Investiga y Crea una tabla especificando las ventajas y desventajas de las relaciones de equivalencia.

A.3.16 Investiga y crea un tabla con las ventajas y desventajas de la cerradura.

Cuestionario de autoevaluación

1. Define el concepto de función.
2. Define el concepto de dominio.
3. Define el concepto de rango.
4. Da un ejemplo de función cuadrática.
5. Da un ejemplo de una sucesión.

6. Da un ejemplo de recursividad.

7. Define una relación recursiva.

8. Define una relación de equivalencia.

9. De dos ejemplo de relaciones generales.

10 Define la composición de relaciones

Examen de autoevaluación

1. Calcula los valores para f(x)=4x+5 con x=1,0,3:

a) 9,5,17
b) 9,13,17
c) 9,14,17
d) 4,8,17
e) 9,5,18

2. Calcula los valores para f(x)=4x^2+5 con x=1,0,3:

a) 9,5,17
b) 9,13,17
c) 9,14,17
d) 4,8,17
e) 9,5,41

3. A qué es igual la siguiente composición de relaciones f(g(x)) si f(x)=x+5 y g(x)=2x+4 con x=2:

a) 9

b) 11
c) 16
d) 13
e) 18

4. A qué es igual la siguiente composición de relaciones f(g(x)) si f(x)=3x+2 y g(x)=2x+2 con x=1:

a) 8
b) 6
c) 20
d) 12
e) 14

5. El dominio de una función se define como el conjunto de todos los posibles valores de entrada:

a) Verdadero
b) Falso

6. Se puede decir que si una función tiene inversa o es invertible entonces la función inversa anula la acción de la función.

a) Verdadero
b) Falso

7. La notación o_grande es utilizada para describir estimación que representa un número de procesos o pasos que se realizan 3 veces, y que se utilizan de manera constante sobre todo en el área de computación:

a) Verdadero
b) Falso

8. La recursividad es una técnica importante de programación que permite que una función se llame a sí misma:

a) Verdadera
b) Falso

9. El cálculo de números factoriales no es caso de recursividad:

a) Verdadero
b) Falso

10. Una relación para que sea de equivalencia debe cumplir las siguientes propiedades reflexiva y simétrica:

a) Verdadera
b) Falso

TEMA 4. ANÁLISIS DE ALGORITMOS

Objetivo particular

El objetivo del presente tema es el de conocer las propiedades de un árbol y analizar dos tipos importantes como el enraizado y los pesados, así como el uso de la notación polaca y de esta manera poder construir algoritmos eficientemente.

Temario detallado

4.1 Propiedades de los árboles
4.2 Árboles enraizados
4.3 Algoritmos de búsqueda de primera profundidad
4.4 Notación polaca
4.5 Árboles pesados

Introducción

En este tema se muestra el concepto de árbol enraizado y pesado así como sus propiedades. También se muestran los tres tipos diferentes de notaciones entre ellas la polaca, así como un algoritmo que permiten recorrer los árboles de una manera eficiente.

Propiedades de los árboles

Empezaremos mencionando que un árbol es un elemento muy importante en las gráficas, y por ello es importante conocer cuáles son las propiedades de los árboles, las cuales se mencionan a continuación:

Es una gráfica que tiene más de un vértice

Tiene cada par de vértices conectado a un solo camino

Es una gráfica conexa

Es una gráfica que no tiene cíclicos

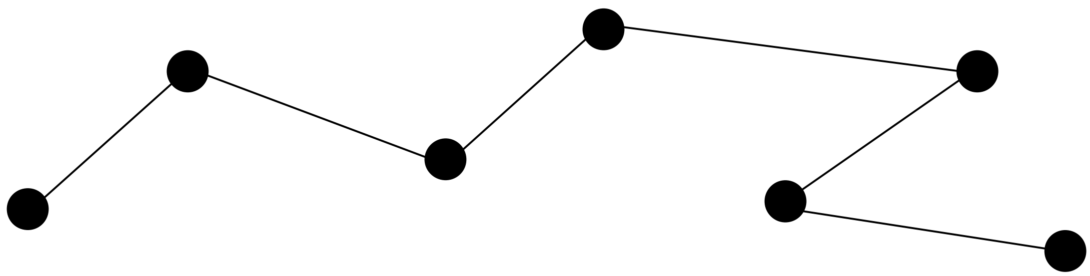


Figura 4.1. Ejemplo de árbol

Podemos ver que la gráfica anterior tiene más de un vértice

Tiene cada par de vértices conectado a un solo camino

Es una gráfica conexa

No tiene ningún cíclico

Por lo tanto cumple con las propiedades y por ello representa un árbol.

4.2 Árboles enraizados

En el ámbito de las gráficas existen árboles en los cuales existe un vértice a partir del cual el árbol tiene su origen en un vértice llamado raíz y a partir del cual parten varias ramificaciones, a este tipo de árbol se le llama árbol enraizado.

Un ejemplo de un árbol enraizado lo tenemos en la siguiente gráfica:

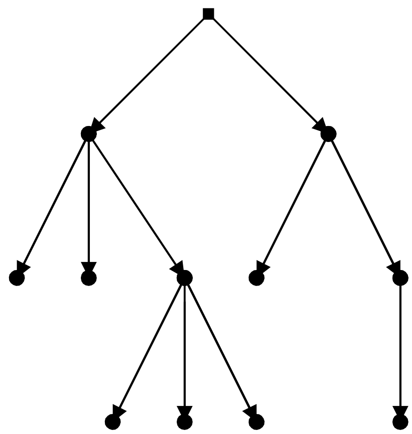


Figura 4.2. Ejemplo de árbol enraizado[10]

Algoritmos de búsqueda de primera profundidad

Iniciaremos diciendo que en este tipo de algoritmos al vértice se le conoce como nodo. Cuando en un árbol se recorren todas sus trayectorias partiendo cada una de ellas del nodo inicial, al proceso descrito anteriormente se le conoce como recorrido por profundidad y representa un algoritmo de búsqueda de primera profundidad.

[10] Imagen tomada de http://fcasua.contad.unam.mx/apuntes/interiores/docs/98/6/mate_4.pdf recuperado el 20/10/08

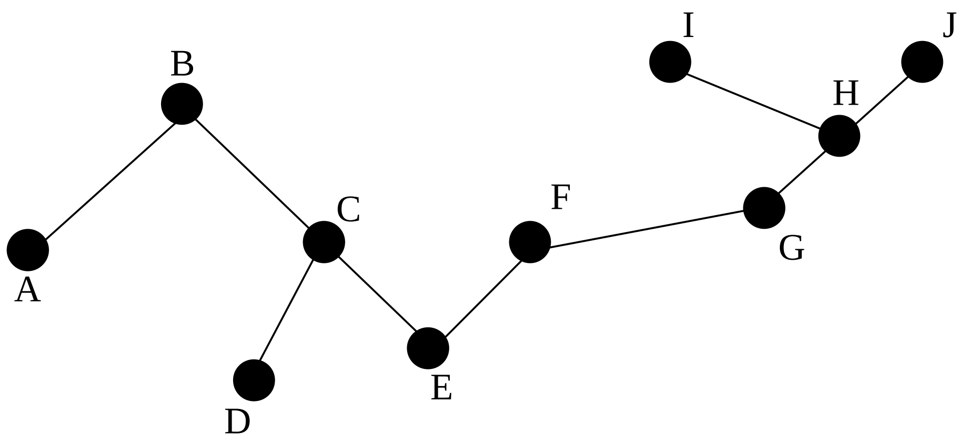


Figura 4.3. Ejemplo de algoritmo de búsqueda

Podemos ver que existen tres recorridos los cuales son

AB, BC, CE, EF,FG,GH,HJ

AB, BC, CE, EF, FG, GH, HI

AB, BC, CD

4.3 Notación polaca

En el ambiente de los árboles una parte importante a considerar es la forma de recorrerlo visitando cada uno de los vértices y para ello se tiene tres diferentes tipos de recorrido los cuales se encuentran relacionados con tres diferentes tipos de notaciones las cuales son la prefija, postfija y la infija.

A continuación se definen las ya mencionadas notaciones:

La notación prefija o notación polaca es aquella en la cual los operadores van al principio.

Ejemplo:

Para hacer la siguiente operación a+b-c (a, b, c constantes) en notación polaca sería poniendo primero el operando + las constantes ab seguidas por la operación y después la constante c, es decir ab+c-.

La notación postfija o notación polaca inversa es aquella en la cual los operadores se ponen al final de las cantidades.

Ejemplo:

Para hacer la siguiente operación a+b-c (a,b,c constantes) en notación postfija polaca inversa sería poniendo primero las constantes abc seguidas por las operaciones +- es decir abc+-.

La notación infija es aquella en la cual los operadores van en medio de los valores, es utilizada en álgebra común de las matemáticas que conocemos en el mundo.

Ejemplo:

Para hacer la siguiente operación a+b-c (a,b,c constantes) en notación infija sería poniendo los signos de la operación en medio de las constantes es decir a+b-c.

4.3 Árboles pesados

Dentro del estudio de los árboles es muy importante un tipo de árboles los cuales llevan valores en sus aristas como por ejemplo conocer la distancia entre dos ciudades. Cuando a un árbol se le ponen valores a sus aristas a este árbol se le llama árbol pesado o ponderado. Además de que las aristas llevan valores los nodos (vértices) se les ponen nombres llamadas, normalmente, ‘etiquetas’.

Este tipo de árboles se puede aplicar por ejemplo en el desarrollo de actividades que tienen un determinado tiempo de ejecución en cada una de las actividades.

Ejemplo

Supóngase que se tiene que hacer un viaje de la ciudad A a la ciudad G y se desea saber el total de kilómetros que hay que recorrer, suponiendo que los valores de las aristas est en kilómetros.

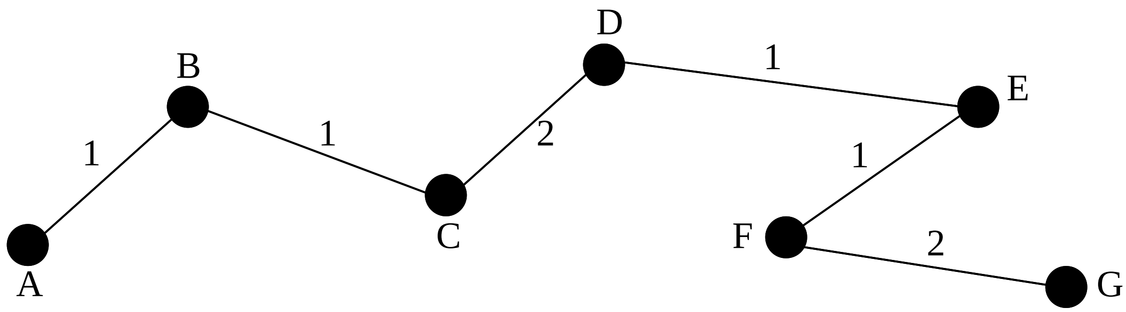


Figura 4.3. Ejemplo de árbol pesado

Primero, la gráfica anterior representa un árbol pesado o ponderado y el total de su longitud es 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 2 = 8

Bibliografía del tema 4

Abellanas, M y D. Lodares, Análisis de algoritmos y teoría de grafos, México, Macrobit, 1991, 189 pp.

Kolman, Bernard, Robert C Busby, y Sharon Ross, Estructura de matemáticas discretas para la computación, 3ª ed., México, Prentice Hall, 1995, 524 pp.

LIU, C. L. Elementos de matemáticas discretas, México, McGraw-Hill, 1995, 432 pp.

Ross, Kennet A. Matemáticas discretas, México, Prentice Hill, 1990, 367 pp.

Bibliografía Complementaria

Tremblay, Jean-Paul, Manohar, R., Matemáticas discretas, México Cecsa, , 1996, 597 pp.

Johnsonbaugh Richard, Matemáticas discretas, Iberoamericana, México, Iberoamericana ,1988, 506 pp.

Lipschutz, Seymour, Lipson Marc, Matemática discreta, Schaum, Madrid, McGraw Hill, 2004, 420 pp.

Apunte de matemáticas IV plan 1998 de la Facultad de Contaduría y Administración. Disponible en: http://fcasua.contad.unam.mx/apuntes/interiores/docs/98/6/mate_4.pdf

Actividades de aprendizaje

A.4.1. Realiza un resumen de los conceptos más importantes de este tema y de sus propias conclusiones.

A.4.2. Investiga en Internet al menos cinco páginas que contengan ejemplos de aplicación, e indica su dirección.

A.4.3. Resolver los ejercicios pares de las páginas 276 y 281 del libro Johnsonbaugh Richard, *Matemáticas discretas*, Iberoamericana, México, 1988, 506 pp.

A.4.4. Con el estudio de la bibliografía específica sugerida, estudiar las aplicaciones de los arboles.

A.4.5. Proporciona por lo menos 5 situaciones profesionales o empresariales en donde se utilice el árbol.

A.4.6. Investiga ejemplos prácticos relacionados con los arboles enraizados en los libros de referencia y en Internet.

A.4.7 Investiga y describe el concepto de algoritmo.

A.4.8 Realiza un tabla indicando las ventajas y desventajas de los algoritmos.

A.4.9 Investga y realiza una tabla indicando las ventajas y desventajas de un árbol.

A.4.10 Investiga y realiza por lo menos cuatro aplicaciones con algoritmos de búsqueda de primera profundidad de acuerdo con los conceptos estudiados; para ello utiliza la bibliografía Sugerida

A.4.11 Investiga y realiza por lo menos cuatro aplicaciones con notación polaca de acuerdo con los conceptos estudiados; para ello utiliza la bibliografía Sugerida.

A.4.12 Investiga otros tipos de árboles en la informática y si existen aplicaciones reales.

A.4.13 Exponga las diferencias fundamentales entre los árboles enraizados y pesados utilizando la bibliografía citada.

A.4.14 Consulte y exponga las principales aplicaciones de los árboles pesados.

A.4.15 Investiga y crea una tabla especificando las ventajas y desventajas de los árboles pesados.

A.4.16 Investiga y crea un tabla con las ventajas y desventajas de la notación polaca.

Cuestionario de autoevaluación

1. Da el concepto de árbol
2. Define el concepto árbol enraizado
3. Define el concepto de árbol dirigido
4. Da un ejemplo de árbol enraizado
5. Da un ejemplo de árbol dirigido
6. Elabora un ejemplo de un recorrido por profundidad
7. Define la notación polaca
8. Define un árbol pesado
9. De un ejemplo de un árbol pesado

10 De un ejemplo de la notación polaca

Examen de autoevaluación

Indica si las siguientes aseveraciones son falso (F) o verdadero (V).

1. Un árbol es una gráfica aciclica conexa:

a) Verdadero
b) Falso

2. Un árbol no tiene lazos ni aristas paralelas:

a) Verdadero
b) Falso

.

3. Si a un árbol se le quitan algunas aristas, pero se mantienen los vértices, a este árbol se le llama árbol generador:

a) Verdadero
b) Falso

4. Un árbol dirigido es cuando se consideran las direcciones de sus aristas:

a) Verdadero
b) Falso

5. Un árbol enraizado es cuando exactamente un vértice cuyo grado de entrada sea 0 y los grados de entrada de todos los otros vértices sean 1

a) Verdadero
b) Falso

6**.** A los árboles enraizados también se les conoce como árboles familiares:

a) Verdadero
b) Falso

7. La notación polaca puede ser utilizada para escribir expresiones que involucren objetos de algunos sistemas y algunas operaciones en lo objetos:

a) Verdadero
b) Falso

8. En notación polaca las operaciones son normalmente, aunque siempre, operaciones binarias

a) Verdadero

b) Falso

9. Un grafo es pesado cuando sus aristas contienen datos (etiquetas):

a) Verdadero
b) Falso

10**.** Un grafo cuyas aristas o vértices tienen pesos asociados recibe el nombre de grafo etiquetado o ponderado:

a) Verdadero
b) Falso

TEMA 5: ALGORITMOS EN GRAFOS

Objetivo particular

El terminar el tema, el alumno deberá elaborar los tipos de algoritmos y a su vez podrá modificarlos para resolver determinados problemas del empresario para que éste tenga control de sus actividades cotidianas.

Temario detallado

Introducción

Hoy en día el concepto de algoritmo es algo muy importante, pues por medio de él se pueden representar determinados procesos informáticos. La creación de uno de ellos involucra el conocer dicho proceso muy bien, pero si se tiene un modelo ya hecho entonces este puede modificarse para su ejecución.

Algoritmos para gráficas

Hoy en día existen muchas necesidades en el tratamiento de la información, una de ellas es la de ordenar dicha información y para ello existen muchos algoritmos como por ejemplo el de la método de la burbuja y el método de Shell.

Empezaremos por definir al método de la burbuja el cual consiste en ir comparando el primer valor con el segundo, de tal manera que en el primer lugar quede el menor y en el segundo el mayor, después el segundo y el tercero de tal manera que en el segundo lugar quede el menor y en el tercero el mayor, y así sucesivamente hasta que el valor mayor quede hasta el último lugar, el proceso continúa de la misma manera pero colocando el segundo valor más grande en la penúltima posición y así sucesivamente hasta que la información o datos queden totalmente ordenados ascendente o descendentemente según se le pida al propio algoritmo. Este método se puede aplicar para la ordenación de números y datos alfanuméricos (es decir números y letras), en un arreglo, archivo y bases de datos.

Dentro de las ventajas que tiene es que es un método muy seguro y dentro de sus desventajas es que puede ser lento en comparación de otros además de utilizar mucha memoria RAM,

Por otro lado, el método de Shell consiste en ir comparando intervalos de datos, el primer valor con el segundo valor del primer intervalo, el primer valor con el segundo valor del segundo intervalo, y así sucesivamente hasta llegar al último intervalo, después la longitud del intervalo se disminuye y se continúa con el proceso anterior de comparación de intervalos hasta que la longitud sea la mínima, de tal manera que se comparen uno a uno los valores y al final queden totalmente ordenados los datos. Este método se puede aplicar para la ordenación de números y datos alfanuméricos, en un arreglo, archivo y bases de datos.

Dentro de las ventajas que tiene es que es un método muy seguro y mas rápido que el método de la burbuja y dentro de sus desventajas sería la de utilizar mucha memoria RAM,

Las necesidades de hoy en día llevan a encontrar recorridos con pesos (un peso por ejemplo puede ser la distancia entre dos ciudades, el tiempo que se lleva en realizar una determinada actividad o el costo de realizar un determinado trabajo) mínimos de una gráfica y para ello se necesitan algoritmos que produzcan una matriz de peso mínimo y de igual manera se pueden tener gráficas de peso máximo.

Ejemplo

En la gráfica que a continuación se muestra, podemos observar en cada una de las líneas negras y amarillas un número el cual representa el peso, la ruta en amarillo nos indica la más corta.

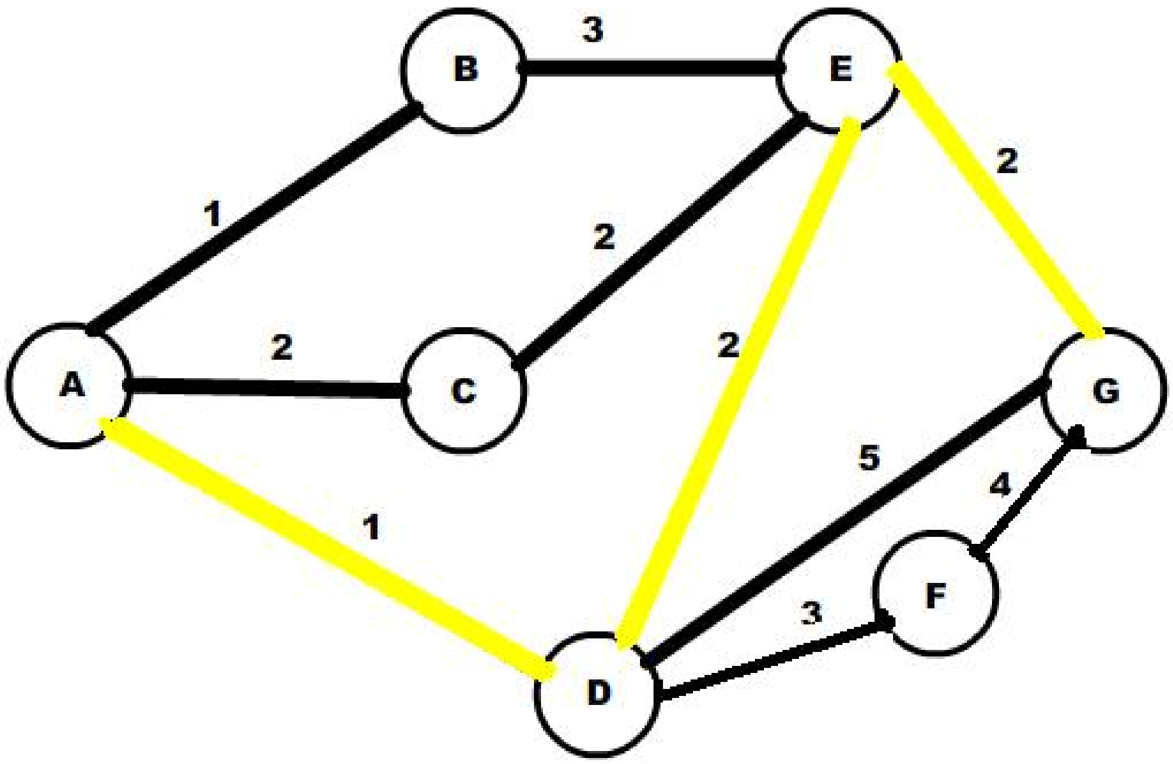


Figura 5.1. Ejemplo sobre peso

Como ejemplo de estos algoritmos tenemos los siguientes:

Algoritmo de Dijskstra

El algoritmo de dijskstra es una serie de pasos que nos permite en una gráfica seleccionar un vértice y a partir de ahí a los demás vértices, y con este procedimiento encontrar únicamente los pesos mínimos.

Ejemplo 1

A continuación se tiene la siguiente gráfica la cual al utilizar 1 del algoritmo de dijskstra, aplicándolo desde el inicio, es decir el vértice A, generara los pesos mínimos de la siguiente gráfica para un determinado recorrido.

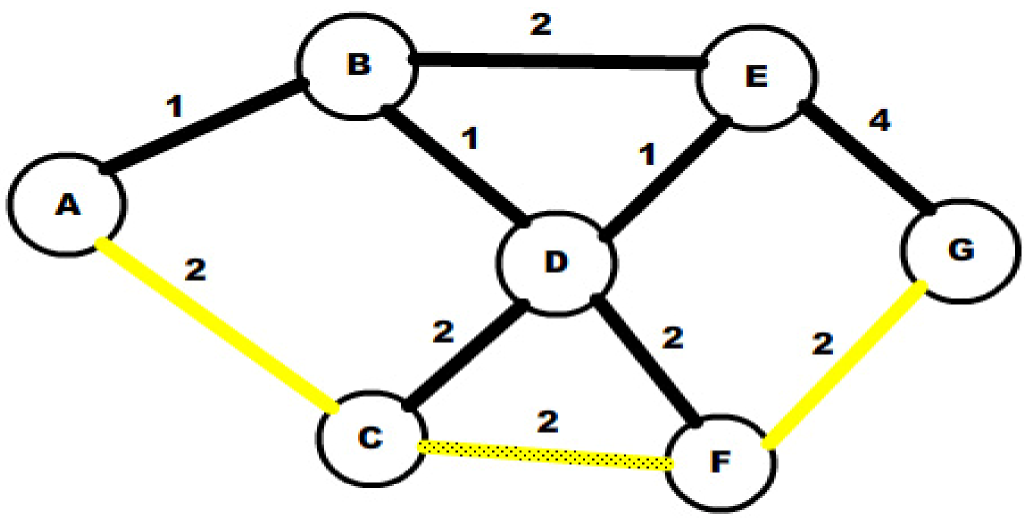


Figura 5.2. Ejemplo de algoritmo dijskstra

En la gráfica anterior la ruta que pasa por los vértices A, C, F Y G nos dan un peso mínimo para el gráfico anterior igual a seis.

Ejemplo 2

Aquí tenemos otro ejemplo del algoritmo de dijskstra.

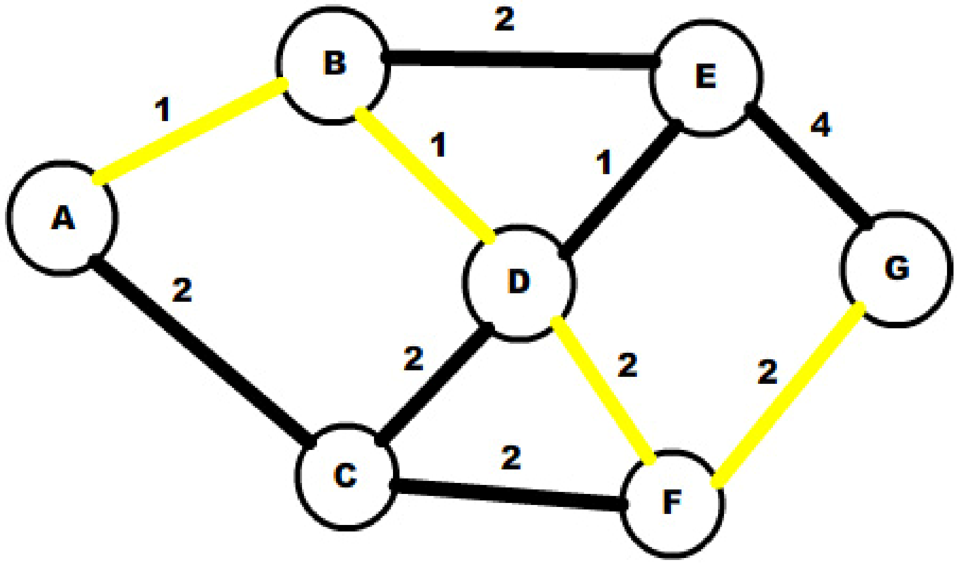


Figura 5.3. Ejemplo de algoritmo dijskstra

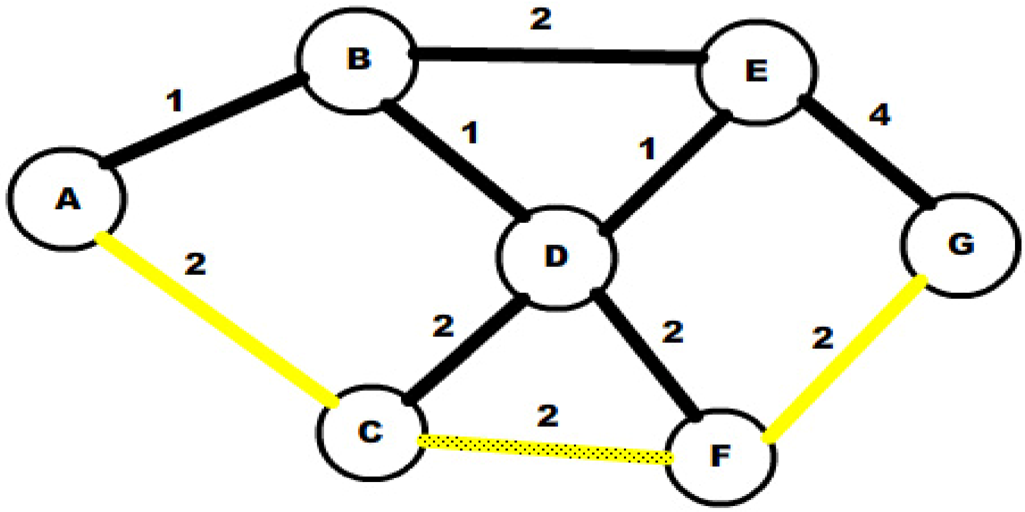
En la gráfica anterior la ruta que pasa por los vértices A, B, D, F y G nos dan un peso mínimo para el gráfico anterior igual a seis.

Algoritmo de Warshall

El algoritmo de Warshall es un proceso que permite obtener una matriz de peso mínimo. Es decir que si tenemos un grafo con pesos mínimos el algoritmo de Warshall encontrará su matriz correspondiente.

Ejemplo

Considerando la gráfica del ejemplo1 del algoritmo de dijskstra.


A
B
C
D
E
F
G
1
2
1
1
4
2
2
2
2
2

Su matriz de incidencia sería

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Su matriz de adyacencia

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nota. La teoría para encontrar las matrices ya se mostró en el tema uno.

Algoritmo de Max-Weight

El algoritmo de Max-Weight es una serie de pasos que nos permiten en una gráfica seleccionar un vértice y a partir de ahí dirigirse a los demás vértices, y con este procedimiento encontrar únicamente los pesos máximos.

Ejemplo 1

Considerando la gráfica que se mostrara a continuación con el algoritmo de Max-Weight, se encontrarán los pesos máximos.

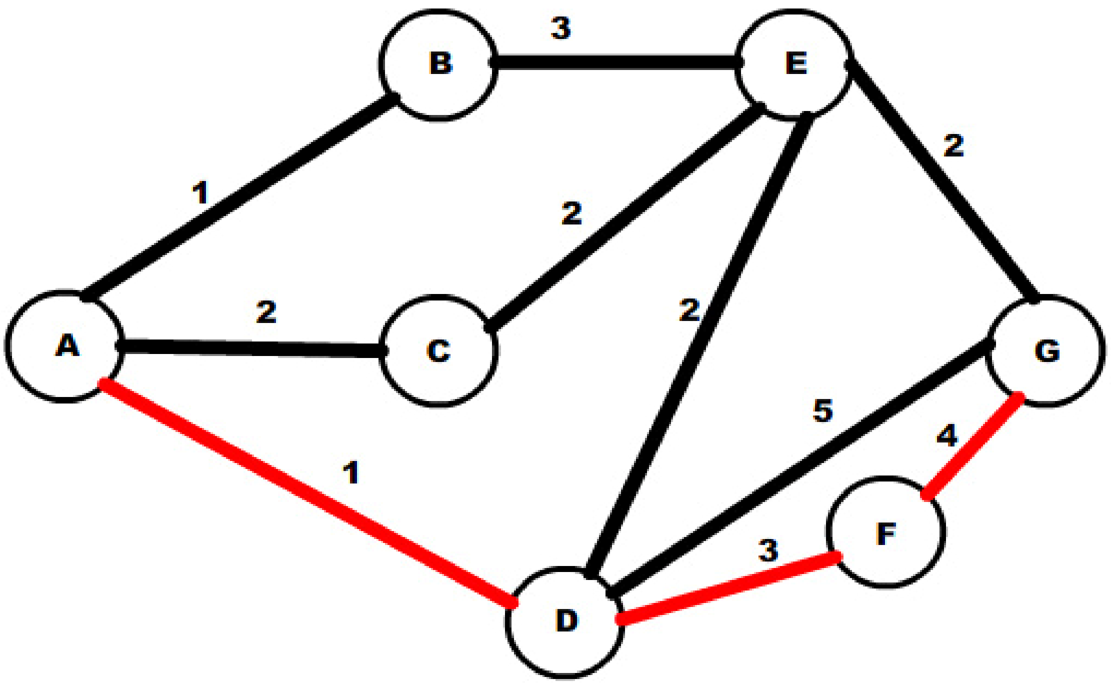


Figura 5.4. Ejemplo de algoritmo Max- Weight

Podemos observar que el recorrido por los vértices A, D, F, y G no da el peso máximo de la gráfica.

Ejemplo 2

Considerando la gráfica que se mostrará a continuación con el algoritmo de Max-Weight, se encontrarán los pesos máximos, al igual que en el ejercicio anterior tenemos la siguiente gráfica.

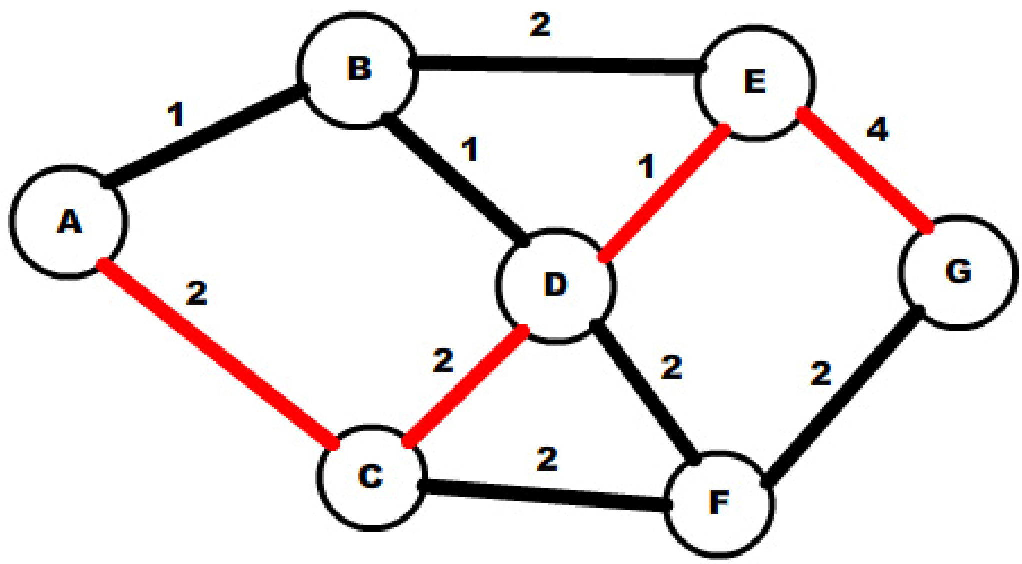


Figura 5.5. Ejemplo de algoritmo de Max- Weight

Podemos observar que el recorrido por los vértices A, C, D, E, y G da el peso máximo de la gráfica.

Ejemplo de aplicación para los algoritmos de Dijskstra, Warshall y Max-Weight

Como ejemplos de aplicación de estos algoritmos podemos mencionar que para el algoritmo de Dijskstra si se tuviera una gráfica con los caminos de una ciudad a otra, por ejemplo México-Veracruz, y podríamos ir a Veracruz ya sea pasando por Xalapa o Córdoba, entonces el algoritmo nos ayudaría a encontrar la ruta más corta, pero también podríamos considerar una segunda gráfica con las rutas y las casetas de cobro de tal manera que se tuviera la de menor costo.

El algoritmo de Warshall considerando el ejemplo del camino de México-Veracruz, ayudaría a encontrar la ruta más corta y la expresaría en forma de una matriz.

Y por último el algoritmo de Max-Weight mostraría a partir de la gráfica con los caminos de México- Veracruz, la ruta más larga, pero también podríamos considerar una segunda gráfica con las rutas y las casetas de cobro de tal manera que se obtuviera la de mayor costo.

5.2Modificaciones

Hoy en día hay la necesidad de realizar diferentes actividades las cuales se pueden relacionar con las gráficas y de esta manera resolver dicha necesidad, y para ello se pueden utilizar los algoritmos ya existentes, sin embargo, en ocasiones se requieren de modificaciones que permitan llegar al resultado requerido.

Normalmente el hacer un algoritmo lleva mucho más tiempo que hacer una adaptación a uno ya existente. Como por ejemplo a los métodos de la burbuja y el de Shell, se pueden hacer adaptaciones para que la información la den en forma descendente en lugar de la forma ascendente, que es la forma natural en que la ordenan ambos métodos. Y así existen otros algoritmos que se pueden adaptar para su utilización dentro del mundo de las gráficas que nos permitan, encontrar pesos mínimos o máximos.

Ejemplo. Por ejemplo la versión del algoritmo Dijkstra encuentra pesos mínimos de una gráfica. Pero puede modificarse para que el algoritmo de Dijkstra produzca un camino mínimo. Es decir en lugar de darnos los pesos mínimos de una gráfica, nos dará los vértices por los cuales se hará el recorrido y este a su vez sea de peso mínimo.

Ejemplo.

La versión del algoritmo Warshall encuentra pesos mínimos de una gráfica.

Pero puede modificarse para que el algoritmo de Warshall produzca un camino máximo, es decir en lugar de darnos los pesos mínimos de una gráfica, nos dará los vértices por los cuales se hará el recorrido y este a su vez sea de peso máximo.

En otras palabras que si al algoritmo de Warshall se le hacen algunas adaptaciones de acuerdo a las necesidades de la empresa, este algoritmo puede producir un camino máximo.

Bibliografía del tema 5

Abellanas, M y D. Lodares, Análisis de algoritmos y teoría de grafos, México, Macrobit, 1991, 189 pp.

Kolman, Bernard, Robert C Busby, y Sharon Ross, Estructura de matemáticas discretas para la computación, 3ª ed., México, Prentice Hall, 1995, 524 pp.

LIU, C. L. Elementos de matemáticas discretas, México, McGraw-Hill, 1995, 432 pp.

Ross, Kennet A. Matemáticas discretas, México, Prentice Hill, 1990, 367 pp.

Bibliografía Complementaria

Tremblay, Jean-Paul, Manohar, R., Matemáticas discretas, México Cecsa, , 1996, 597 pp.

Johnsonbaugh Richard, Matemáticas discretas, Iberoamericana, México, Iberoamericana ,1988, 506 pp.

Lipschutz, Seymour, Lipson Marc, Matemática discreta, Schaum, Madrid, McGraw Hill, 2004, 420 pp.

Actividades de aprendizaje

A.5.1. Realiza un mapa conceptual de los conceptos más importantes de este tema.

A.5.2 Con el estudio de la bibliografía específica sugerida, estudiar los conceptos principales y las aplicaciones de los algoritmos para gráficas.

A.5.3 Proporciona por lo menos 5 situaciones profesionales o empresariales en donde se utilicen los algoritmos para gráficas.

A.5.4 Investiga ejemplos prácticos en los cuales se puedan realizar modificaciones tomando en cuenta los libros de referencia y en Internet.

A.5.5 Realiza un tabla indicando las ventajas y desventajas de los algoritmos para gráficas.

A.5.6 Realiza un tabla indicando las ventajas y desventajas al hacer modificaciones de un algoritmo.

A.5.7 Investiga otros tipos de algoritmos para gráficas en la informática y si existen aplicaciones reales.

A.5.8 Investiga y expón en un cuadro comparativo las diferencias fundamentales entre la creación de un algoritmo para gráficas y la modificación de uno ya existente.

Cuestionario de autoevaluación

1. Define el concepto de algoritmo y elabora un ejemplo
2. Define el concepto de algoritmo para una gráfica y construye un ejemplo
3. Define el algoritmo de peso mínimo y da un ejemplo.
4. Define el algoritmo de Dijskstra y da un ejemplo
5. Define el algoritmo de Warshall y da un ejemplo
6. Da un ejemplo de un algoritmo y da un ejemplo

Examen de autoevaluación

Indica si las siguientes aseveraciones son falso (F) o verdadero (V).

1. Un algoritmo es una serie de pasos a seguir.

   a) *Verdadero*
   b) Falso

2. El algoritmo de Warshall busca el peso máximo.

   a) *Verdadero*
   b) Falso

3. El algoritmo de Dijkstra busca el peso máximo.

   a) *Verdadero*
   b) Falso

4. El algoritmo de peso-máximo busca el peso máximo.

   a) *Verdadero*
   b) Falso

5. El algoritmo de Warshall se puede modificar para producir un árbol de peso mínimo.

a) *Verdadero*
b) Falso

6. El algoritmo de Dijkstra se puede modificar para producir un árbol de peso mínimo.

a) *Verdadero*
b) Falso

7. El algoritmo de peso-máximo se puede modificar para producir un árbol de peso máximo.

a) *Verdadero*
b) Falso

8. El algoritmo de la burbuja sirve para ordenar información.

a) *Verdadero*
b) Falso

9. El algoritmo de Shell sirve para ordenar información.

a) *Verdadero*
b) Falso

10. El algoritmo de la burbuja es más efectivo en comparación del algoritmo de Shell cuando la información es muy grande.

a) *Verdadero*
b) Falso

TEMA 6. PRÁCTICAS EN EL LABORATORIO DE INFORMÁTICA

Objetivo particular

El alumno utilizará los conceptos y propiedades de función, inducción matemática para desarrollar modelos matemáticos con el uso de la hoja Excel y de esta manera resolver problemas de la vida real.

Temario detallado

6.1 Caso práctico de composición de una función

6.2 Caso práctico de suma de números naturales

6.3 Caso práctico de suma de números pares naturales

Introducción

En el desarrollo de este tema se muestran todos los conocimientos adquiridos durante el semestre y su relación con otras materias, que en su conjunto, hacen que le alumno sea capaz de resolver problemas combinándolos con el uso de la computadora.

6.1 Caso práctico de composición de una función

Aplicar el concepto de composición de una función considerando a las funciones $f(x)=x+4$ y $h(x)=x^2+5x+6$, calcularemos $f(h(x))$. Y calcularla para el valor de x=2

$f(h(x)) =(x^2+5x+6)\ \ +4= x^2+5x+10$ y

$h(f(x))= .\ (x+4)^2+5(x+4)+6= x^2+8x+16+5x+20+6= x^2+13x+42$

Para solucionar este ejercicio utilizaremos la hoja Excel

Paso 1. Colocamos en un renglón y celda el valor de x y en el de lado derecho de la función f(x).

	A	B	C	D	E	F
1						
2		x=	2		=C2+4	
3						

El resultado de la función es el que esta en la celda E2

	A	B	C	D	E	F
1						
2		x=	2		6	
3						

Paso 2. Insertamos en un renglón y celdas diferentes los valores de los coeficientes de la función h(x).

	A	B	C	D	E
3					
4		1	8	6	
5					

Paso 3. Multiplicamos la celda E2 del paso uno por cada uno de los coeficientes de la función h(x), en este caso la celda del paso uno al cuadrado por la primera celda del paso dos más la celda del paso uno por la segunda celda del paso dos más la tercera celda del paso dos.

	A	B	C
5			
6			
7		=E2^2	
8			

	A	B	C	D
5				
6				
7			=E2*C4	
8				

	A	B	C	D	E
5					
6					
7				=D4	
8					

Resultado de las operaciones anteriores

	A	B	C	D	E
5					
6					
7		36	48	6	
8					

La suma es

	A	B	C
8			
9		=B7+C7+D7	
10			

Resultado de la suma

	A	B	C
8			
9		90	
10			

El valor obtenido en paso tres es el resultado buscado en la presente práctica.

6.2 Caso práctico de suma de números naturales

Se propone verificar si con la fórmula n(n+1)/2 se puede encontrar la suma de los primeros números naturales. En esta práctica se suma los primeros 8 números naturales los cuales suman 36, entonces se requiere utilizar la fórmula para verificar este resultado.

$$f(n) = n(n+1)/n.$$

Para solucionar este ejercicio utilizaremos la hoja Excel

Paso 1. En una celda de un renglón se colocan los primeros números naturales del 1 al 8.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2		1	2	3	4	5	6	7	8	
3										

Paso 2. Se calcula la suma de los números del paso 1 con la función suma de Excel.

	A	B	C	D
3				
4		suma=	=suma(B2:I2)	
5				

Resultado del cálculo anterior

	A	B	C	D
3				
4		suma=	36	
5				

Paso 3. Se calcula la suma de los mismos números utilizando la fórmula.

	A	B	C	D
5				
6				
7		suma con		
8		formula=	=I2*(I2+1)/2	
9				

Resultado del cálculo anterior

	A	B	C	D
5				
6				
7		suma con		
8		formula=	36	
9				

El resultado con fórmula es el anterior.

6.3 Caso práctico de suma de números pares naturales

Se propone verificar si con la fórmula n(n+1) se puede encontrar la suma de los primeros n números pares naturales. En esta práctica se suma los primeros 6 números pares naturales los cuales suman 42, entonces se requiere utilizar la fórmula para verificar este resultado.

$$f(n) = n(n+1)$$

Para solucionar este ejercicio utilizaremos la hoja Excel

Paso 1. En una celda de un renglón se colocan los primeros números naturales del 1 al 8.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		2	4	6	8	10	12	
3								

Paso 2. Se calcula la suma de los números del paso 1 con la función suma de Excel.

	A	B	C	D
3				
4		suma=	=suma(B2:G2)	
5				

Resultado del cálculo anterior

	A	B	C	D
3				
4		suma=	42	
5				

Paso 3. Se coloca en un renglón y celda el número de números pares a calcular su suma.

	A	B	C	D
5				
6				
7		numero de		
8		numero=	6	
9				

Paso 4. Se calcula la suma de los mismos números del paso 1 utilizando la fórmula.

	A	B	C	D
9				
10		suma con		
11		formula=	=C8*(C8+1)	
12				

Resultado del cálculo anterior

	A	B	C	D
9				
10		suma con		
11		formula=	42	
12				

El resultado con fórmula es el anterior.

Bibliografía básica

Abellanas, M y D. Lodares, Análisis de algoritmos y teoría de grafos, México, Macrobit, 1991, 189 pp.

Kolman, Bernard, Robert C Busby, y Sharon Ross, Estructura de matemáticas discretas para la computación, 3ª ed., México, Prentice Hall, 1995, 524 pp.

LIU, C. L. Elementos de matemáticas discretas, México, McGraw-Hill, 1995, 432 pp.

Ross, Kennet A. Matemáticas discretas, México, Prentice Hill, 1990, 367 pp.

Bibliografía complementaria

Tremblay, Jean-Paul, Manohar, R., Matemáticas discretas, México Cecsa, , 1996, 597 pp.

Johnsonbaugh Richard, Matemáticas discretas, Iberoamericana, México, Iberoamericana ,1988, 506 pp.

Lipschutz, Seymour, Lipson Marc, Matemática discreta, Schaum, Madrid, McGraw Hill, 2004, 420 pp.

RESPUESTAS A LOS EXÁMENES DE AUTOEVALUACIÓN

Matemáticas V

	Tema 1	Tema 2	Tema 3	Tema 4	Tema 5
1.	v	a	a	a	a
2.	f	d	e	b	b
3.	v	e	d	a	b
4.	f	c	e	b	a
5.	v	b	a	a	a
6.	v	b	a	a	a
7.	v	a	b	a	a
8.	v	a	a	b	a
9.	v	a	b	a	a
10.	f	a	b	a	b