UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

AUTOR: M. F. ALBERTO DE LA ROSA ELIZALDE

MATEMÁTICAS II (CÁLCULO DIFERENCIAL)		Clave: 1266
Plan: 2005		Créditos: 8
Licenciatura: Informática		Semestre: 2°
Área: Matemáticas		Asesoría: 4 h.
Requisitos: Ninguno		Por semana: 4 h.
Tipo de asignatura:	Obligatoria (x)	Optativa ( )

Objetivo general de la asignatura

Al término del curso, el alumno reunirá habilidades en el manejo del cálculo diferencial e integral para aplicarlo en la interpretación, planeación y resolución de problemas y modelos matemáticos típicos de la informática.

Temario oficial (64 horas sugeridas)

1.	Funciones	8 h.
2.	Límite	10 h.
3.	Derivada	14 h.
4.	Integral	12 h.
5.	Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer grado	10 h.
6.	Prácticas en laboratorio de informática	10 h.

Introducción

El objetivo de los presentes apuntes de Matemáticas II es lograr que el estudiante conozca de una manera cercana los conocimientos más importantes del cálculo diferencial, como son los conceptos función, dominio y rango; y de esta manera poder elaborar software más eficiente y, por otro lado, aportar los conocimientos básicos que se estudian en el cálculo diferencial e integral, además de poder considerarlos como la base de apoyo para otras materias, que por sus características es necesario saber algunos conceptos y procedimientos para optimizar las labores cotidianas.

Se ha tratado de exponer todos los temas de la asignatura de una manera clara y sencilla, utilizando un lenguaje simple para que el estudiante encuentre interés en el campo del cálculo diferencial e integral.

En el primer tema se verán los conceptos y diferentes tipos de funciones y problemas prácticos.

En el segundo tema se verá el concepto de límite, así como los diferentes tipos y técnicas para resolverlos.

En el tercer tema se verá el concepto de la derivada y los diferentes tipos de derivada, y su aplicación a los problemas de la vida real.

En el cuarto tema se verá el concepto de la integral definida e indefinida, así como los diferentes tipos de integrales y su aplicación a los problemas de la vida real.

En el quinto tema se explicará el concepto de una ecuación diferencial ordinaria de primer grado así como los diferentes tipos existentes y su aplicación a los problemas que se presentan en la vida real.

TEMA 1. FUNCIONES

Objetivo Particular

Al terminar este tema, el estudiante identificará cuándo se debe utilizar una función para la solución de un problema, así como hacer los cálculos respectivos para obtener cada concepto. Deberá utilizar las herramientas necesarias para el cálculo de problemas con álgebra que ayuden al empresario a un mejor manejo de sus actividades cotidianas.

Temario detallado

1.1. Naturaleza y definición de función matemática
   - 1.1.1. Naturaleza
   - 1.1.2. Función

1.2. Principales tipos de funciones
   - 1.2.1. Función lineal y su representación geométrica
   - 1.2.2. Función cuadrática y su representación geométrica
   - 1.2.3. Función polinomial y su representación geométrica
   - 1.2.4. Función exponencial y su representación geométrica
   - 1.2.5. Función logarítmica y su representación geométrica

1.3. Aplicaciones de las funciones

Introducción

En la presente unidad se muestran los conceptos de función, dominio, contra-dominio y rango, los cuales son necesarios para abordar las unidades subsecuentes. También se muestran algunos tipos de funciones así como aplicaciones de las funciones.

1.1 Naturaleza y definición de función matemática

1.1.1 Naturaleza

El concepto de **función** es una de las ideas fundamentales en matemáticas. Cualquier estudio en el que se utilicen las matemáticas para dar solución a problemas prácticos o en el que se requiera el análisis de datos empíricos se emplea este concepto matemático. La función es una cantidad dependiente que está determinada por otra.

1.1.2. Función

Una **función f(x)** es una regla de correspondencia que asocia a cada elemento **x** del **dominio** con un solo elemento **f(x)** de un segundo conjunto (con uno y sólo uno) llamado rango o contra dominio de la función, es decir, si x1 es diferente de x2 entonces f(x1) es diferente de f(x2).

Una función consta de tres partes:

1. Un conjunto A llamado **dominio de la función**.
2. Un conjunto B llamado **contra dominio de la función**.
3. Una **regla de correspondencia f** que asocia a todo elemento de A, uno y sólo un elemento del conjunto B.

La **regla** debe tener las siguientes propiedades:

1. Ningún elemento del dominio puede quedar sin elemento asociado en el contra dominio.

2. Ningún elemento del dominio puede tener más de un elemento asociado en el contra dominio. Esto no excluye que varios elementos del dominio tengan al mismo algún elemento asociado en el contra dominio.

Si tenemos los conjuntos A y B, y la regla de correspondencia se cumple con las propiedades señaladas, entonces, la terna (A, B, f) es una función cuya notación es:

$$f : A \to B$$

Se lee f va de A hacia B

otra forma es:

$f(x)$ y se lee $f\ de\ x$

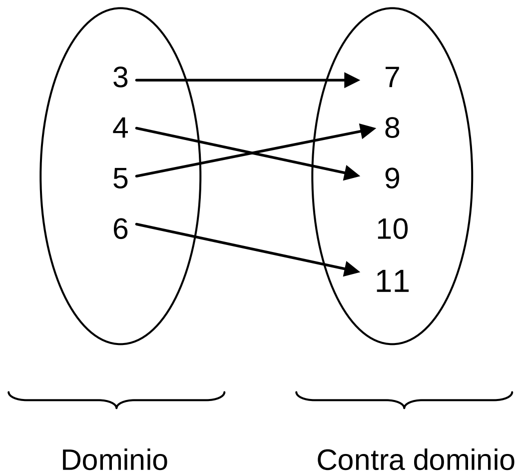
Se emplean por lo regular las letras f(x), g(x) o h(x) para simbolizar una función.

Si (*x*) es un elemento de A, entonces el elemento de B asociado a (*x*) por medio de la regla de correspondencia se expresa como f(*x)* y se le llama la imagen de (*x*) bajo (f).

La regla de correspondencia de una función puede estar dada por un diagrama, una ecuación, una tabla de valores y una gráfica.

- **Diagrama**

El diagrama se construye formando dos óvalos y uniendo estos con una flecha que parte del primer óvalo hacia el segundo (dirección de izquierda a derecha). En el interior del primer óvalo se anotan los valores de entrada de la función (dominio), en el segundo se anotan los valores de salida de la función (contra dominio), se une con una flecha el valor de entrada con el valor de salida como se muestra en la siguiente figura:



La imagen de 3 es 7

La imagen de 4 es 9

La imagen de 5 es 8

La imagen de 6 es 11

Figura1.1 Diagrama de la regla de correspondencia de una función

Ecuación

En este caso se requiere plantear una ecuación con dos incógnitas como la que se muestra a continuación:

$3x^2 - y + 4 = 0.$

Como primer paso se **despeja** la **variable dependiente** (y), $\therefore$ $y = 3x^2 + 4$.

A la expresión anterior la presentamos en forma de función $f(x) = 3x^2 + 4$, en donde la función **(*f*)** es el conjunto de todas las parejas ordenadas (*x, y*) tales que *x* y *y* satisfacen a la ecuación $3x^2 - y + 4 = 0$, *y* se denota como:

$$f = \{(x, y) \,/\, y = 3x^2 + 4\}$$

En el dominio de la función, están todos los posibles valores que toma la variable independiente (*x*) y los valores extremos; en el contra dominio de la función se encuentran todos los valores posibles que pueden asignarse por el dominio y regla de transformación a la variable dependiente (*y*).

Ejemplo:

Sea la función (f) cuya regla es $f(x) = 3x^2 + 4$

El dominio es: {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3},

Los valores extremos son: **-** 3 y 3

El contra dominio es {31, 16, 7, 4, 7, 16, 31} y está determinado por el dominio y la regla de transformación.

Una función que va de los reales a los reales se expresa con la notación:

$$f : R \to R$$

Los valores extremos en este caso no están determinados (no existen) en el dominio, porque éste contiene todos los números reales, el contra dominio está formado por todos los números R y la regla de correspondencia está dada por una ecuación.

En los casos en que no se indica o se especifica el dominio de la función, entonces, se debe entender que el dominio incluye todos los números reales (o también llamado dominio natural).

Ejemplo de funciones:

1. Si $f(x) = 3x^2 + 2x + 4$

   - ⊙ El dominio es todos los números reales R $f = \{x \in R\}$ y el contra dominio también está formado por todos los R.
   - ⊙ Para este tipo de funciones polinomiales el dominio siempre será el conjunto de los números reales R.

2. Sí $f(x) = \dfrac{4}{x-2}$

Solución:

$$f(x) = \frac{4}{2-2} = \frac{4}{0} = operación\ no\ \det erminada$$

- ⊙ El dominio son todos los reales excepto el 2, ya que la división entre cero no está determinada, $f = \{x \in R / x \neq 2\}$.

- ⊙ El contra dominio está formado por todos los números reales positivos excepto el cero, D = {$y \in R^+$/ ($0 < x < \infty$)}
- ⊙ Para este tipo de funciones racionales el dominio siempre será el conjunto de los números reales excepto los que hacen cero el denominador de la función.

3. Si $f(x) = \sqrt{5x+2}$

Solución:

- ⊙ El subradical se expresa de la siguiente forma: $5x + 2 \geq 0$,
- ⊙ El signo debe ser $\geq$, porque no existen raíces cuadradas de números negativos.
- ⊙ Se despeja el valor de *x* de la inecuación $x \geq -\frac{2}{5}$
- ⊙ El dominio de $F = \{x \in R / x \geq -2/5\}$

Para este tipo de función con radical y el índice par, el dominio siempre será formado por todos los números que hagan al subradical igual o mayor a cero.

Casos en el que una expresión no cumple con ser una función:

a. La expresión $y > x$ no define una función puesto que hay muchos valores de y para cada valor de x.
b. La expresión $x = y^2$ no define una función puesto que hay dos valores de y para cada valor positivo de *x*.
c. $x^2 + y^2 = 9$ no define una función, porque para cada valor positivo de (*x*) hay dos de (*y*).

Tabla de valores

Primero se selecciona la expresión que se va analizar, posteriormente se construye una tabla que debe incluir la variable independiente (*x*) y la variable dependiente (*y*) dentro de esta tabla se anotan los valores que va a tomar la variable independiente (valores de entrada) y se registran todos los valores que toma la variable dependiente (valores de salida).

Ejemplo:

Sea la función $f(x) = x + 2$

Solución:

Utilizando la tabulación, se registran los valores que toma (x) para encontrar los valores de y (también se registran en la tabla).

Los puntos extremos del dominio son –2 y 4

x	-2	-1	0	1	2	3	4	Dominio
y	0	1	2	3	4	5	6	Contra dominio

Tabla 1.1 Tabulación de la función $f(x) = x + 2$

1.2. Principales tipos de funciones

Función lineal y su representación geométrica

Una función lineal tiene la forma:

A*x* + B*y* + C = 0 con A $\neq$ 0 y B $\neq$ 0, (A, B, C son constantes)

⇨ Es la ecuación general de la línea recta y su representación gráfica es una línea recta.

- ⇨ En particular f(x) = ax + b es una función de primer grado o función lineal. Cuando se expresa en la forma y = mx + b se le llama a la ecuación pendiente-ordenada al origen.
- ⇨ (m) representa la pendiente, (b) es el punto donde corta al eje de las ordenadas (y).
- ⇨ La pendiente se puede calcular si se conocen dos puntos por donde pase la recta $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$, entonces:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Conociendo la pendiente y un punto se puede encontrar la ecuación de la línea recta con la ecuación punto-pendiente:

$$\boldsymbol{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$

1.2.1 Función cuadrática y su representación geométrica

La función cuadrática tiene la forma:

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \quad \text{con } A \neq 0$$

Es la ecuación general de segundo grado, su representación grafica es una parábola.

La **ecuación** de una **parábola** es:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Para realizar la gráfica son necesarios **tres pasos**:

1) Para determinar hacia dónde abre la parábola, es necesario conocer cuál es el signo del coeficiente de x^2.
   - 1.1.) Si es positivo, la parábola abre hacia arriba, $a > 0$.
   - 1.2.) Si el signo es negativo, la parábola abre hacia abajo, $a < 0$.

2) El vértice de la parábola es el punto máximo o mínimo de la parábola, se encuentra utilizando las siguientes expresiones:

$$Vx = \frac{-b}{2a} \quad \textit{vértice en } x \qquad ; \qquad Vy = \frac{4ac - b^2}{4a} \quad \textit{vértice en } y$$

3) La parábola siempre corta el eje de las ordenadas, para determinar en dónde lo corta se realizan los siguientes pasos:
   - 3.1.) Hacer x = 0
   - 3.2.) Sustituir éste en la ecuación: $y = a(0)2 + b(0) + c = c$, entonces la parábola corta el eje de las ordenadas en el punto (0,c).

Ejemplo:

$$Y = 3x^2 + 12x$$

La parábola abre hacia arriba porque a = 3 > 0.

El vértice se encuentra en el punto (-2, -12).

La parábola corta los ejes en los puntos (0, 0) y (-4, 0).

1.2.2 Función polinomial y su representación geométrica

Cualquier función que pueda obtenerse a partir de la función constante y de la función identidad mediante las operaciones de adición, sustracción y multiplicación se llama función polinomial, es decir **f** es de la forma:

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + . . . + a_1 x + a_0$

En donde los valores de $a_n, a_{n-1}, ... a_0$ son constantes (números reales) y $a_n \neq 0$.

n es un entero no negativo y también indica el grado de la función polinomial.

1.2.4. Función exponencial y su representación geométrica

La función exponencial se expresa como:

$f(x) = b^x$; si $b > 0$ y $b \neq 1$

en donde:

b es la base de una función exponencial.

x es el exponente de la función exponencial.

El dominio está formado por todos los números reales $D_f = \{R\}$ Ejemplo:

1. $f(x) = 2^x$

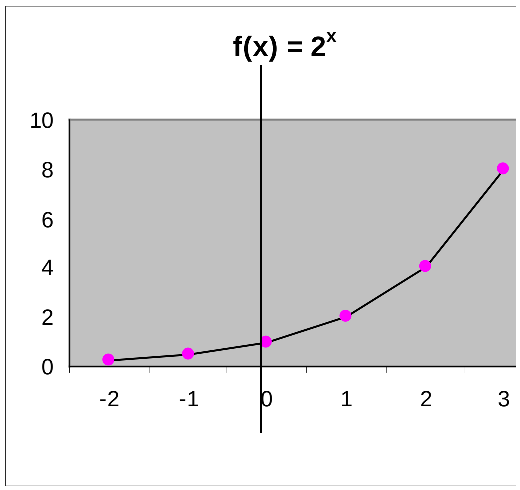


Figura 1.3 Función exponencial de base 2

2. $f(x) = (1/2)^x$

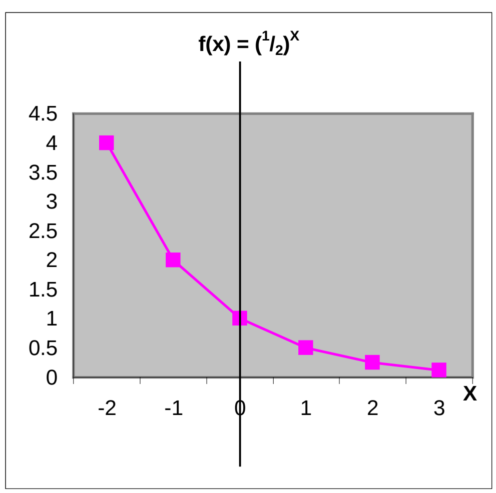


Figura 1.4 Función exponencial de base 1/2

Propiedades de la función exponencial

Si a > 0, b > 0 y (x), (y) elementos de los reales (R) entonces:

Teorema 1

1.1. $a^x \bullet a^y = a^{x+y}$

1.2. $(a^x)^y = a^{xy}$

1.3. $(a \bullet b)^x = a^x b^x$

1.4. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

1.5. $\left[\dfrac{a}{b}\right]^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

Teorema 2

2.1 $Si\ a > 1, \quad \begin{cases} a^x > 1 \ \ cuando \quad x > 0 \\ a^x < 1 \ \ cuando \quad x < 0 \end{cases}$

2.2 $Si\ a < 1, \quad \begin{cases} a^x < 1, \ \ cuando \quad x > 0 \\ a^x > 1, \ \ cuando \quad x < 0 \end{cases}$

Las leyes de los exponentes facilitan los cálculos de estas funciones.

También dentro de esta función se define la **función exponencial natural** que tiene como base el número (e) y es de la forma: $y = e^x$

1.2.5 Función logarítmica y su representación geométrica

La función logarítmica:

Si b > 0 y b ≠ 0, entonces:

$$y = \log_b x \quad \text{si y sólo si} \quad x = b^y; \quad x > 0$$

Con el dominio de la función $D_f = \{R^+\}$.

$y = \log_b x$ se lee logaritmo de base (b) de (x) igual a (y)

Los cálculos en funciones logarítmicas se facilitan con las leyes de los logaritmos. Dentro de esta función se define la función logaritmo natural que tiene como base al número (e) y es de la forma: $y = \ln x$

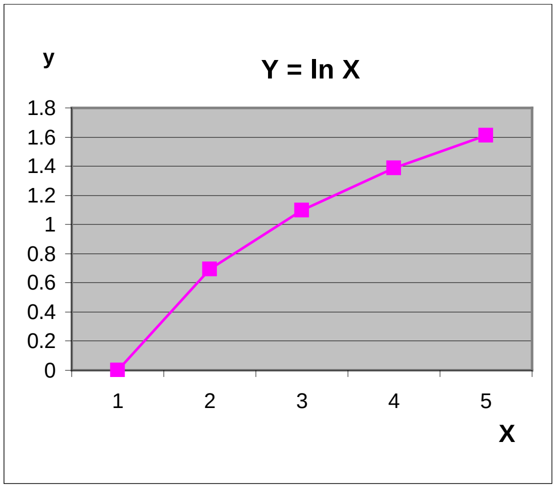


Figura 1.5 Función logarítmica

Propiedades de los logaritmos

Los logaritmos comunes o de base 10 (Briggs) se denotan como log *x*, la base 10 no se escribe. El logaritmo natural (neperiano) de base e (e = 2.718281828) se denota como: ln *x*.

LOGARITMO	
Expresión	Nombre
$\log_a a = 1$	Logaritmo de la base
$\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$	Cambio de base
Log (a • b) = log a + log b	Producto
$\log\left(a/b\right) = \log a - \log b$	Cociente
$\log a^n = n \log a$	Potencia
$\log \sqrt[n]{a} = \dfrac{1}{n}\log a$	Raíz
Estas propiedades se cumplen para logaritmos con cualquier base.	
Nota: $\log a^n \neq (\log a)^n = \log^n a$	

1.3. Aplicaciones de las funciones

Ejemplo de funciones lineales

Para un fabricante de relojes, el costo de mano de obra y de los materiales por reloj es de $150 y los costos fijos son de $ 20000 al día, si vende cada reloj a $200, ¿cuántos relojes deberá producir y vender cada día con objeto de garantizar que el negocio se mantenga en el punto de equilibrio?

Solución:

Sea (x) el número de relojes producidos y vendidos cada día. El costo total de producir (x) relojes es

y_c = costos variables + costos fijos = 150x +20000

Dado que cada reloj se vende a $200, el ingreso (I) obtenido por vender (x) relojes es

I = 200x

El punto de equilibrio se obtiene cuando los ingresos son iguales a los costos, es decir:

200x = 150x + 20000

Obtenemos que 50x = 20000 ó x = 400.

Se deben de producir y vender al día 400 relojes para garantizar que no haya ni utilidades ni pérdidas.

Punto de equilibrio de mercado

La demanda para los bienes producidos por una industria está dada por la ecuación $p^2 + x^2 = 169$, en donde (p) es el precio y (x) es la cantidad de demanda. La oferta está dada por p = x + 7 ¿Cuál es el precio y la cantidad del punto de equilibrio?

Solución:

El precio y la cantidad del punto de equilibrio son los valores positivos de (p) y (x) que satisfacen a la vez las ecuaciones de la oferta y la demanda.

$p^2 + x^2 = 169$ (1)

$p = x + 7$ (2)

Sustituyendo el valor de (p) de la ecuación (2) en la ecuación (1) y simplificando:

$$(x+7)^2 + x^2 = 169$$
$$2x^2 + 14x + 49 = 169$$
$$x^2 + 7x - 60 = 0$$

Factorizando encontramos que:

$$(x+12)(x-5) = 0$$

Lo cual da x = -12 ó 5. El valor negativo de x es inadmisible, de modo que x = 5 es el correcto.

Sustituyendo x = 5 en la ecuación (2), se tiene:

$P = 5 + 7 = 12$

En consecuencia el precio de equilibrio es 12 y la cantidad de equilibrio es 5.

Modelo de costo lineal

El costo de procesar un kilo de granos de café es de $0.50 y los costos fijos por día son de $300.

a). Encuentra la ecuación de costo lineal y dibuja su gráfica.

b). Determina el costo de procesar 1000 kilos de granos de café en un día.

Solución:

Si y_c representa el costo de procesar (x) kilos de granos de café por día, entonces se emplea la siguiente expresión:

Modelo lineal

Costo total = costo variable total + costos fijos

$y_c = mx + b$ (1)

La ecuación (1) es una línea recta cuya pendiente representa el costo variable por unidad y cuyo costo fijo es la ordenada al origen.

En este caso m = \$0.50 y b = \$ 300, por tanto:

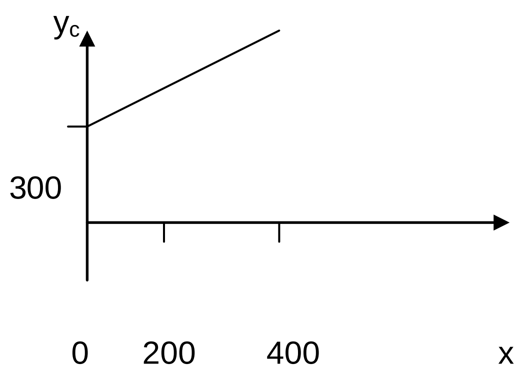
$y_c = 0.5x + 300$ (2)

Para dibujar la gráfica primero encontramos dos puntos sobre ella. Haciendo x = 0 en la ecuación (2), tenemos que y = 300, haciendo x = 200 en la ecuación (2), tenemos que $y_c = 0.5(200) + 300 = 400$. De modo que dos puntos que satisfacen la ecuación (2) de costo son (0,300) y (200,400). Graficando estos puntos y uniéndolos mediante una línea recta, obtendremos la gráfica que aparece en la gráfica 1.4.3.

b) Sustituyendo x =1000 en la ecuación (2), obtendremos

$y_c = 0.5(1000) + 300 = 800$

En consecuencia el costo de procesar l000 kilogramos de café al día será de \$800.



Gráfica 1.4.3

Modelo de costo lineal

El costo de fabricar 10 máquinas de escribir al día es de \$35000, mientras que cuesta \$60000 producir 20 máquinas del mismo tipo al día. Suponiendo un modelo de costo lineal, determine la relación entre el costo total y_c de producir (x) máquinas de escribir al día y dibuje su gráfica.

Solución:

Se nos dan los puntos (10,35000) y (20,60000) que están sobre la gráfica del modelo lineal, la pendiente de la línea que une estos dos puntos es:

$$m = \frac{60000 - 35000}{20 - 10} = \frac{25000}{10} = 2500$$

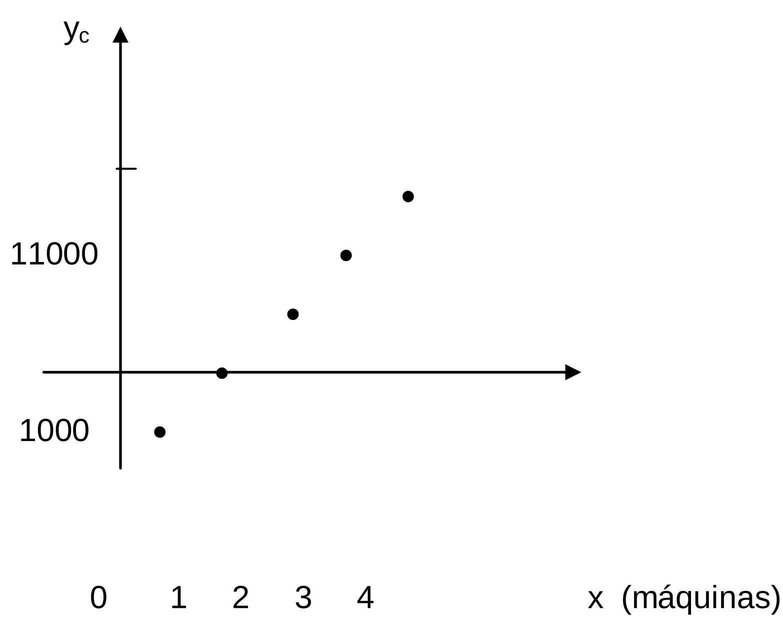
Empleando la fórmula de punto-pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y_c - 35000 = 2500(x - 10) = 2500x - 25000$$
$$y_c = 2500x + 1000$$

X	0	1	2	3	4
y_c	1000	3500	6000	8500	11000

Tabla 1.4.4

La gráfica de la ecuación (3) no es una línea recta continua porque (x) no puede tomar valores fraccionarios al representar el número de máquinas de escribir producidas. La variable (x) sólo puede tomar valores enteros 0,1,2,3,.....



Gráfica 1.4.4

5. Depreciación Lineal

Una empresa compra maquinaria por $150 000; se espera que la vida útil de la maquinaria sea de 12 años con valor de desecho de cero. Determina la cantidad de depreciación por año y una fórmula para el valor depreciado después de (x) años.

Solución:

Tasa de depreciación (por año) = (Valor inicial - Valor de desecho) ÷ (vida útil en años)

Depreciación por año = (precio de adquisición inicial) ÷ (vida útil en años)

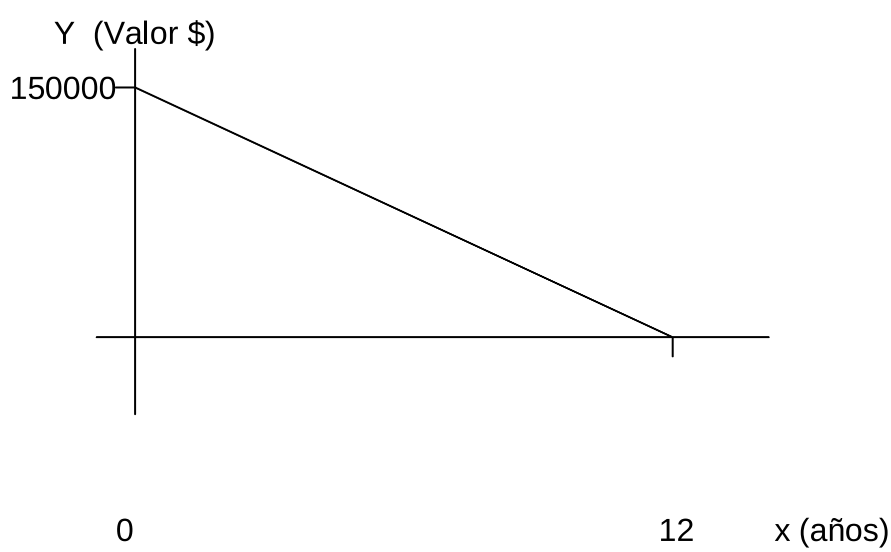
= $150 000 ÷ 12 años

= $12 500

Valor después de x años = (valor inicial) – (depreciación por año)(número de años)

y = $150 000 – ($12 500 por año)(x años)

y = $150 000 – 12 500x



Gráfica 1.4.5

6. Demanda

Un comerciante puede vender 20 paquetes de rastrillos al día al precio de $25 cada uno, pero puede vender 30 si les fija un precio de $20 a cada paquete. Determinar la ecuación de demanda.

Solución:

x la cantidad de demanda

y el precio p por unidad

$x = 20, \quad p = 25 \qquad y \qquad x = 30, \quad p = 20$

La pendiente de la línea recta de demanda es:

$$m = \frac{20-25}{30-20} = \frac{-5}{10} = -0.5$$

La ecuación de la demanda se encuentra a partir de la ecuación general de la línea recta

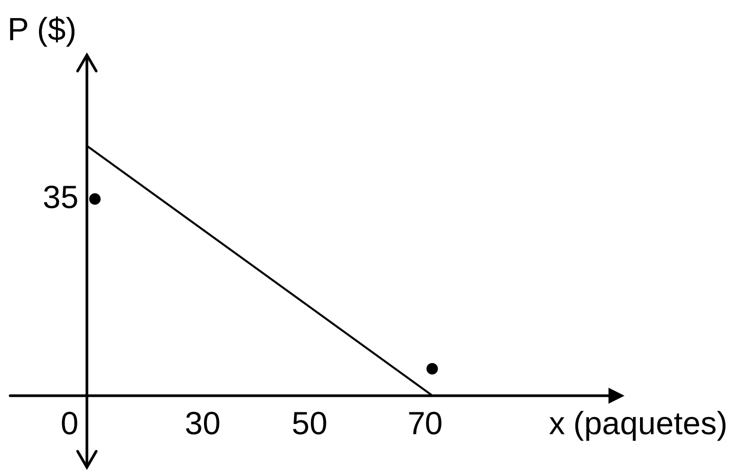
$y - y_1 = m(x - x_1)$

si m= -0.5

p – 25 = -0.5(x-20)

la ecuación de demanda es:

p = -0.5x + 35



Gráfica 1.4.5

7. Interés

El licenciado Álvarez cuenta con un capital de \$35 000. Parte de este dinero lo invierte en una cuenta de ahorro que le paga el 8% de interés simple y el dinero restante lo invierte en un negocio que produce el 12% de interés simple. ¿Qué cantidad debe invertir en cada caso para obtener una ganancia del 11% sobre su dinero después de un año?

Solución:

Sea (x) la cantidad invertida en la cuenta de ahorros al 8% y \$35 000 – x la cantidad de dinero invertido en el negocio al 12%.

El interés obtenido por la cuenta bancaria es:

$$I = Cnt = x(0.08)(1) = 0.08x \qquad (1)$$

El interés obtenido por la inversión en el negocio es:

$$I = Cnt = (35000 - x)(0.12)(1) = 0.12(35000 - x) \qquad (2)$$

El interés recibido por las dos al 11% (el total) es:

$$I = 0.11\,(35000) \qquad (3)$$

Sumando la ecuación 1 y 2 e igualando el resultado de estas con la ecuación 3 se tiene:

$$0.08x + 0.12(35000 - x) = 0.11(35000) \qquad (4)$$

Despejando x

$$-0.04x = -350$$

$$x = 8750$$

La interpretación de este resultado es el siguiente: en la cuenta de ahorros se depositan \$8750.

De la ecuación 2 tenemos:

$$35000 - x = 35000 - 8750$$

Despejando x

$$x = 26250$$

La interpretación de este resultado es: La inversión en el negocio es de \$26 250.

Conclusión

Considerando un mundo dinámico y lleno de tecnología es importante que el licenciado en informática tenga un buen conocimiento del concepto de función, porque de ello depende poder crear software, que necesita ser validado mediante los conocimientos desarrollados en la presente unidad. Tales como: el concepto de función matemática y algunas de las funciones más utilizadas en la vida real, requeridas para el cálculo de punto de equilibrio, depreciación y otras aplicaciones útiles para nuestros días.

Bibliografía del tema 1

Apostol T., *Calculus*, vol. I, 2ª ed., Barcelona, Reverter, 1982, 813 pp.

Weber, Jean E., *Matemáticas para Administración y Economía*, (2ª ed.), México, Harla, 1987, 689 pp.

Actividades de aprendizaje

A.1.1. Resuelve dos ejercicios del 1er y 2º libro de la bibliografía.

A.1.2. Resuelve al menos 10 ejercicios bajándolos de la red de Internet de páginas en español.

A.1.3. Investiga en Internet al menos cinco páginas de Internet que contengan ejemplos de aplicación, e indique su dirección.

A.1.4. Resolver los ejercicios pares de las páginas 21 y 22 del libro
LEITHOLD, L. *Cálculo para ciencias administrativas, biológicas y sociales*,
México, Alfaomega, 2004, 672 páginas.

Cuestionario de autoevaluación

1. Define el concepto de función.

2. Define el concepto de dominio.

3. Define el concepto de rango.

4. Da un ejemplo de función cuadrática.

5. Da un ejemplo de función exponencial.

6. Da un ejemplo de una función polinómica y define su contra dominio.

7. Define una función cuadrática y de su dominio y rango.

8. Define una función exponencial y Define su dominio y rango.

9. Define las propiedades de la función logarítmica.

10 Define las propiedades de la función exponencial.

Examen de autoevaluación

1. La ecuación de la oferta es $p = 0.03q + 2$, donde p es el precio por unidad y q representa el número de unidades producidas y vendidas, y la ecuación de demanda es $p = - 0.07q +12$. Entonces el punto de equilibrio es:

a) $p = 3$, $q = 100$
b) $p = 7$, $q = 100$
c) $p = 2$, $q = 100$
d) $p = 12$, $q = 1,000$
e) $p = 5$, $q = 100$

2. Al resolver el sistema de ecuaciones:

$$x + y = 2$$
$$2x + 2y = 4$$

Se obtiene:

a) solución única $x = 1, y = 1$
b) solución única $x = 2, y = 0$
c) No tiene solución.
d) No se puede saber.
e) Infinidad de soluciones.

3. Al resolver el sistema de ecuaciones:

$$x + y = 2$$
$$2x + 2y = 2$$

Se obtiene:

a) solución única $x = 1, y = 1$
b) solución única $x = 1, y = 0$
c) No tiene solución.

d) No se puede saber.
e) Infinidad de soluciones.

4. Un fabricante vende un producto a $8 por unidad, y vende todo lo que fabrica. Los costos fijos son de $5,000 y los costos variables por unidad de $^{22}/_{9}$ dólares. Determinar la producción q y los ingresos totales I, en el punto de equilibrio:

a) $q = 9{,}000$, $I = 72{,}000$
b) $q = 90$, $I = 720$
c) $q = 900$, $I = 7{,}200$
d) $q = 7{,}200$, $I = 900$
e) No existe punto de equilibrio.

5. En el problema anterior la cantidad de producción requerida para obtener utilidades de $10,000 es:

a) 900
b) 9000
c) 270
d) 2,700
e) 27,000

6. Al resolver el sistema de 3 ecuaciones con dos incógnitas:

$$3x_1 + 2x_2 = 7$$
$$4x_1 - 2x_2 = 0$$
$$2x_1 - 3x_2 = -4$$

Se obtiene:

a) No tiene solución.
b) No se puede saber.
c) Infinidad de soluciones.
d) Solución única con $x_1 = 2$
e) Solución única con $x_1 = 1$

7. Un fabricante está en equilibrio (no obtiene ni pérdidas ni utilidades) con un volumen de ventas de $200,000. Los costos fijos son de $40,000 y cada unidad se vende en $5, entonces el costo variable por unidad es:

a) $2
b) $4
c) $6

d) $20
e) $40

8. Una compañía fabrica calculadoras y tiene dos plantas, ubicadas en el D.F. y en Guadalajara. En la planta D.F., los costos fijos son de $70,000 al mes y el costo de fabricar cada calculadora es $75.00. En la planta Guadalajara, los costos fijos son de $88,000 mensuales y se requieren $60.00 para fabricar cada unidad. En el siguiente mes, la compañía debe fabricar 1,500 calculadoras. ¿Cuántas deben fabricarse en cada planta para que sean iguales los costos totales? (Plantear q_1 = Número de calculadoras en D.F. y q_2 = Número de calculadoras en Guadalajara).

a) $q_1 = 600$, $q_2=900$
b) $q_1 = 900$, $q_2=600$
c) $q_1 = 500$, $q_2=1000$
d) $q_1 = 1000$, $q_2=500$
e) $q_1 = 800$, $q_2=700$

9. Una compañía paga a sus vendedores con base en cierto porcentaje de los primeros $100,000 de ventas, más otro porcentaje sobre el excedente de los $100,000 de ventas. Si un vendedor ganó $8,500 en ventas de $175,000 y otro vendedor, $14,800 en ventas de $280,000. Entonces los dos porcentajes X_1 =Porcentaje de los primeros $100,000 y X_2=Porcentaje sobre excedente de $100,000 están entre los valores:

a) $5 \leq X_1 \leq 7$, $5 \leq X_2 \leq 7$
b) $2 \leq X_1 \leq 3$, $3 \leq X_2 \leq 5$
c) $3.5 \leq X_1 \leq 4.5$, $3 \leq X_2 \leq 5$
d) $2 \leq X_1 \leq 3$, $5 \leq X_2 \leq 7$
e) $3.5 \leq X_1 \leq 4.5$, $5 \leq X_2 \leq 7$

10. El precio promedio de compra de dos acciones en el último año, así como la ganancia estimada para el siguiente año (momento de venta) son:

Emisora	Precio Compra	Ganancia estimada
A	$15	$2.5
B	$50	$12.5

La empresa *B* es más riesgosa, así que se decide destinar 60% de nuestro dinero para *A* y 40% para *B.* ¿Cuántas acciones de *A* y *B* deben comprarse para tener ganancias por $130,000?

Si X_1 = # acciones de *A* y X_2 = # acciones de *B*., entonces X_1 y X_2 están entre:

a) $20{,}000 \leq X_1 \leq 22{,}000$, $2{,}300 \leq X_2 \leq 3{,}900$

b) $20{,}000 \leq X_1 \leq 22{,}000$, $4{,}000 \leq X_2 \leq 5{,}000$

c) $25{,}000 \leq X_1 \leq 27{,}000$, $2{,}000 \leq X_2 \leq 4{,}000$

d) $25{,}000 \leq X_1 \leq 27{,}000$, $4{,}000 \leq X_2 \leq 5{,}000$

e) $25{,}000 \leq X_1 \leq 27{,}000$, $5{,}100 \leq X_2 \leq 5{,}400$

TEMA 2. LÍMITE

Objetivo particular

Al terminar la unidad el estudiante identificará cuándo se debe utilizar el límite de una función y sus propiedades para la solución de un problema. Deberá utilizar las herramientas necesarias para el cálculo de problemas con funciones que ayuden al empresario a un mejor manejo de sus actividades cotidianas.

Temario detallado

2.1. Límite de una función
2.2. Propiedades de los límites
2.3. Límites al infinito
2.4. Propiedades de los límites al infinito
2.5. Aplicaciones de los límites

Introducción

En la presente unidad se muestran el concepto de límite así como sus propiedades. También se muestran las diferentes metodologías para resolver los límites y definir si estos tienen límite o no.

2.1. Límite de una función

Definición

Sea f(*x*) una función que está definida en todos los valores cercanos a (a), con la excepción de sí mismo. Se dice que L es el límite de f(*x*) cuando (*x*) tiende a (a), si la diferencia entre f(*x*) y (L) puede hacerse tan pequeña como se desee, con sólo restringir (*x*) a estar lo suficientemente cerca de (a). Quedando entonces representado como:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Ejemplos:

1. Considerando la función (f) definida por la ecuación

$$f(x) = \frac{(2x+3)(x-1)}{x-1}$$

(f) está definida para todos los valores de (x) excepto cuando $x = 1$. Además, si $x \to 1$, el numerador y el denominador pueden ser divididos entre (x – 1) para obtener :

$$f(x) = 2x + 3 \quad ; \quad x \to 1$$

Como se muestra a continuación: x toma los valores, 0, 0.25, 0.50, 0.75. 0.9, 0.99, 0.999 y así sucesivamente. Entonces (x) toma valores cada vez más cercanos a 1, pero (x) nunca toma el valor de 1, en otras palabras, la variable (x) se aproxima por la izquierda a 1 a través de valores que son números menores muy cercanos a éste. Ahora si analizamos a la variable (x) cuando se aproxima por el lado derecho a 1, a través de valores mayores que éste, esto hace, por ejemplo, que (x) tome valores de 2, 1.75, 1.50, 1.25, 1.10, 1.01, 1.001, 1.0001, 1.00001, y así sucesivamente, pero nunca toma el valor de 1.

Acercándonos a 1 por la izquierda:

x	0	0.25	0.5	0.75	0.9	0.99	0.999	0.9999
f(x) = 2x + 3	3	3.5	4	4.5	4.8	4.98	4.998	4.9998

Tabla 2.1 Límite por la izquierda

Pero $x \neq 1$

Acercándonos a 1 por la derecha:

X	2	1.75	1.5	1.25	1.1	1.01	1.001	1.0001
f (x) = 2x + 3	7	6.5	6	5.5	5.2	5.02	5.002	5.0002

Tabla 2.2 Límite por la derecha

Pero x $\neq$ 1

Se observa en ambas tablas a medida que (*x*) se aproxima cada vez más a 1, f(*x*) también se aproxima cada vez a 5 y entre más cerca esté (*x*) de 1, más cerca f (*x*) a 5, en consecuencia, cuando (*x*) se aproxima a 1 por la izquierda o por la derecha, f(*x*)=2x+3 se acerca a 5.

Se indica que el límite de f(*x*) cuando (*x*) tiende a 1 es igual a 5, esto se representa así:

$$\lim_{x \to 1} (2x+3)=5$$

Encontrar el límite de

$$\underset{x \to 1}{lím} \frac{(2x+3)(x-1)}{(x-1)} = \underset{x \to 1}{lím} = 5$$

Conclusión f(*x*) no está definida en *x* = 1,
sin embargo, lím f(*x*) existe cuando x $\to$ 1.

EJERCICIO 2.1

Encontrar el límite de la función

$$\underset{x \to 3}{\text{lím}} \frac{x^2-9}{x-3}$$

Sustituyendo el valor de tres, donde se encuentra la (x), se tiene:

$$\underset{x \to 3}{\text{lím}} \frac{(3)^2-9}{3-3} = \frac{0}{0} \quad \textit{operación no determinada}$$

Conclusión f(x) no está definida en x = 3 , sin embargo, $\underset{x \to 3}{\text{lím}} f(x)$ existe porque la podemos escribir como:

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \to 3} x+3 = 3+3 = 6$$

Una función f(x) es continua en x = a si la función f(a) como el $\lim_{x \to a} f(x)$ existen y son iguales.

2.2. Propiedades de los límites

Las propiedades básicas de las operaciones con límites de una función son:

Sean (f) y (g) dos funciones tales que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, si los dos límites existen

Entonces:

1. $\lim_{x \to a} k\left[f(x)\right] = k \lim_{x \to a} f(x) = kL$
2. $\lim_{x \to a} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = L \pm M$
3. $\lim_{x \to a} f(x) \bullet g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \bullet \lim_{x \to a} g(x) = L \bullet M$
4. $\lim_{x \to a} f(x) \div g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \div \lim_{x \to a} g(x) = L \div M, M \neq 0$
5. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$
6. Si k es una constante $\lim_{x \to a} k = k$
7. Si m, b, y c son tres constantes, entonces

   $\lim_{x \to c} (m x + b) = mc + b$

De acuerdo con el análisis de las propiedades de límites se podrá observar que el valor límite de una función se puede obtener con la simple sustitución del valor de límite de (x) en la función dada. Este método de sustitución siempre nos lleva a una respuesta correcta, si la función es continua en el límite que se está evaluando.

> Todos los **polinomios** son **funciones continuas** y cualquier función racional es continua, excepto en los puntos en que el denominador se hace cero, dando como resultado del cálculo de un límite que la operación no esté determinada y se concluye que el límite no existe (0 / 0 ó una constante divida entre cero d /0).

Ejemplos:

1. Calcular el límite de la siguiente función, cuando $x \to -1$

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{1 - x^2}$$

Haciendo $x = -1$ en la fórmula válida para f (x), tenemos

$$f(-1) = \frac{(-1)^2 + 3(-1) + 2}{1 - (-1)^2} = \frac{0}{0} \quad \textit{la operación no esta determinada}$$

Factorizando

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{1 - x^2} = \frac{(x+1)(x+2)}{(1-x)(1+x)} = \frac{x+2}{1-x} = \frac{-1+2}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$$

$$\textit{entonces}: \lim_{x \to -1} f(x) = \frac{1}{2}$$

2. Determine $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

Racionalizando se tiene:

$$\lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

3. Determine $\lim_{x \to 2} \sqrt{5x^3-15}$

$$\lim_{x \to 2} \left(5x^3-15\right)^{1/2} = \left[\lim_{x \to 2} \left(5x^3-15\right)\right]^{\frac{1}{2}} = (25)^{\frac{1}{2}} = 5$$

2.3 Límites al infinito

En ocasiones existen límites que su solución no se puede obtener directamente y en este caso la utilización de la metodología de límites al infinito es una técnica que consiste en transcribir el límite en términos de 1/x en lugar del término x, de esta forma se logra que el término 1/x cuando x tiende al infinito, el límite tiende a cero.

Una propiedad de un límite al infinito es la siguiente:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Determine $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x-1}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x-1} = \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}} = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

2.4. Propiedades de los límites al infinito

A continuación se mencionarán las propiedades de los límites al infinito:

$$\underset{x \to \infty}{lím} \frac{1}{x} = 0$$

$$\underset{x \to -\infty}{lím} \frac{1}{x} = 0$$

Si se tienen dos polinomios $g(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x^1$ y $h(x)=c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + c_1 x^1$, entonces el siguiente límite cuando x tiende a infinito es:

$$\underset{x \to \infty}{lím} \frac{g(x)}{h(x)}$$

Una importante propiedad es que los polinomios en el límite se reducen al término con un mayor exponente, es decir:

$$\underset{x \to \infty}{lím} \frac{a_n x^n}{c_n x^n} = \frac{a}{c}$$

Ejemplo.

$$\underset{x \to \infty}{lím} \frac{4x^3 + 4x^2 - 4x^1 + 2}{2x^3 + 6x^2 + 4x^1 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{4x^3}{2x^3} = \frac{4}{2} = 2$$

2.5. Aplicaciones de los límites

Funciones continuas

Para poder resolver problemas de la vida real muchas veces se acude a funciones matemáticas, las cuales deben ser capaces de dar un valor para la función de cada uno de los valores de x, y a lo largo de su trayecto.

Se define **función continua** como aquella cuya gráfica es una curva continua, la cual no tiene huecos (vacíos) ni está segmentada.

Se dice que una función es continua para un valor en *x* = a, si cumple con:

a. f(*a*) está definida

b. $\lim_{x \to a} f(x) \quad existe$

c. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Para que en un límite exista la función debe aproximarse al mismo punto x = a por ambos lados

Ejemplos:

1. La función f(x) =x^2 ¿es continua en x = 3?

   a. f(*x*) = x^2 está definida

   b. $\lim_{x \to 3} x^2 = (3)(3) = 9$

   c. Valor funcional

$$f(3) = (3)^2 = 9$$

$$\lim_{x \to 3} x^2 = f(3)$$

$$9 = 9$$

Es continua para x = 3

2. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ ¿es continua en x = 3?

   a. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ está definida

b. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3+1}{3-2} = \dfrac{4}{1} = 4$

c.

$$\lim_{x \to 3} \frac{3+1}{3-2} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = f(a)$$

4 = 4

Es continua en x = 3

Función discontinua

Cuando no se cumplen las condiciones de continuidad de una función, a ésta se le llama discontinua.

Ejemplos:

1. $f(x) = \dfrac{5}{x-1}$ ¿es discontinua para x = 1?

a. $f(x) = \dfrac{5}{x-1}$ es discontinua para x = 1

b. $\lim\limits_{x \to 1} = \dfrac{5}{x-1} = \dfrac{5}{0} = \quad \textit{no existe el limite}$

c. $f(x) = \dfrac{5}{x-1} = \dfrac{5}{0}$ = la operación no está definida

La función es discontinua en x = 1.

2. $f(x)=\frac{1}{x}$ ¿es continua en x = 0?

a. $f(x)=\frac{1}{x}$ es discontinua en x = 0?

b. $\lim\limits_{x \to 0} = \frac{1}{x}$ no existe el límite

c. $f(0)=\frac{1}{0}$ no esta definida la operación

La función es discontinua en x = 0, pero la función es continua en x $\neq$ 0.

Una función f(*x*) es continua en un intervalo abierto a < x < b, si es continua en cada x del intervalo. En un intervalo cerrado a $\leq$ x $\leq$ b si f(*x*) es continua en el intervalo abierto a < x < b y f(*x*) se aproxima a f(*a*) a medida que (*x*) se acerca al valor de (*a*) por la derecha (para a < x) y f(*x*) se aproxima a f(*b*) a medida que (*x*) tiende al valor (*b*) por la izquierda (para x < b).

Bibliografía del tema 2

Apostol T., *Calculus*, vol. I, 2ª ed., Barcelona, Reverter, 1982, 813 pp.

Weber, Jean E., *Matemáticas para Administración y Economía*, 2ª ed., México, Harla, 1987, 689 pp.

Actividades de aprendizaje

A.2.1. Resuelve dos ejercicios del 3er y 4º libro de la bibliografía.

A.2.2. Resuelve al menos 10 ejercicios bajándolos de la red de Internet de páginas en español.

A.2.3. Investiga en Internet al menos cinco páginas de Internet que contengan ejemplos de aplicación de las determinantes, e indique su dirección.

A.2.4. Resolver los ejercicios pares de las páginas 121 a la 123 del libro LEITHOLD, L. *Cálculo para ciencias administrativas, biológicas y sociales*, México, Alfaomega, 2004, 672 páginas.

Cuestionario de autoevaluación

1. Define el concepto de límite.
2. Define el concepto de límite por la izquierda.
3. Define el concepto de límite por la derecha.
4. De un ejemplo de función cuadrática y calcule su límite.
5. De un ejemplo de un límite por la izquierda.
6. De un ejemplo de un límite por la derecha.
7. Define una función y diga si es continua.
8. Define una función y diga si su rango es continuo.
9. Define las propiedades de la continuidad.
10. Define en qué casos una función no es continua atizando sus propiedades.

Examen de autoevaluación

1. Encontrar: límite de $(X^3 - 27) / (X - 3)$ cuando $X \rightarrow 3$.
   a. 3
   b. 23
   c. 32
   d. 12
   e. 27
2. Encontrar: límite de $X / (-7X + 1)$ cuando $X \rightarrow 4$.
   a. 4/7
   b. 7
   c. –4/27
   d. 27/4

e. –7

3. Encuentre el límite de la función definida por la expresión f(x) = $(2x^2 + x - 3) / (x - 1)$ cuando (x) tiende a 1.
   a. 4
   b. 5
   c. 4.5
   d. 6
   e. 5.5

4. Encuentre el límite de la función definida por la expresión f(x) = $(2x^2 + x - 3)/(x-2)$ cuando (x) tiende a 1.
   a. -2
   b. -1
   c. 0
   d. 1
   e. 2

5. Determine el límite de la función f(x) = $x^3 - 3x + 4$ cuando (x) tiende a infinito..
   a. 0
   b. 1
   c. -3
   d. 4
   e. infinito

6. Calcular el límite de la función f(x) = $(x^3 - 6x^2 + 9x)/(x+5)$ cuando (x) tiende a infinito:
   a. 0
   b. 1
   c. -6
   d. 9

e. infinito

7. Calcular el límite de la función $f(x) = (x+6)/(5x^3 - 7x^2 + 9x)$ cuando (x) tiende a infinito:
   a. -7
   b. 0
   c. 1
   d. 5
   e. infinito

8. Calcular el límite de la función $f(x) = (2x)/(x^2 - 1)$ cuando (x) tiende a infinito
   a. 2
   b. 1
   c. cero
   d. infinito
   e. -1

9. Calcular el límite de $f(x) = (5t^2 + 7)/t$ cuando tiende a 2
   a. 13
   b. 13.5
   c. 14
   d. 12.5
   e. -13

10. Encontrar la solución de la función $(x+3)(x+2)/(x+2)$ cuando (x) tiende a -2
   a. 2
   b. 1
   c. -1
   d. 0
   e. -2

TEMA 3. DERIVADA

Objetivo Particular

Al terminar la unidad, el estudiante comprenderá los conceptos básicos del cálculo diferencial, aplicará las herramientas correspondientes para encontrar la derivada de distintas funciones. Podrá resolver problemas de la vida real aplicando la técnica de optimización con máximos o mínimos, que permitan resolver problemas en una empresa cualquiera.

Temario detallado

Introducción

En la presente unidad se muestra el concepto de derivada así como sus propiedades. De igual manera se muestra el método de los cuatro pasos que es la base para la obtención de las fórmulas de las diferentes derivadas. Y por último la aplicación de máximos, mínimos y puntos de inflexión para la solución de problemas que permiten optimizar los recursos de todo tipo.

3.1. Derivada de una función

Interpretación geométrica de la derivada

El cálculo diferencial estudia el cambio que le ocurre a una variable cuando existen variaciones en otra variable de la cual depende la variable original.

Los investigadores del área económica-administrativa se interesan por las razones de cambio promedio e instantáneo y están particularmente interesados en las tasas marginales de cambio, tales como: el costo marginal, el ingreso marginal, la utilidad marginal, el producto marginal, todos los cuales se miden utilizando matemáticamente la derivada.

Para llegar a un concepto claro de derivada, esta sección define lo que se conoce como cambio o incremento de una variable.

Definición de incremento de una variable

Sea $y = f(x)$ una función, con x_1 y x_2, un par de valores en el dominio de (f), de tal forma que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$, entonces:

1. El cambio en el valor de x al pasar de x_1 a x_2, dado por $x_2 - x_1$, se denomina incremento de x y se representa por Δx, donde $\Delta x = x_2 - x_1$.
2. El cambio en el valor de Y al pasar de y_1 a y_2, dado por $y_2 - y_1$, se denomina incremento de y, se representa por ΔY, donde:

$$\Delta Y = Y_2 - Y_1 = f(X_2) - f(X_1)$$

Tasa de cambio

Para entender el comportamiento geométrico de la derivada, se define la tasa de cambio de una función $f(x)$, entre x y $x+\Delta x$, al cociente $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$

Muchos de los problemas importantes del cálculo dependen de encontrar la recta tangente a una curva dada en un punto específico de la curva. Si la curva es una circunferencia, sabemos de la geometría plana que la recta tangente en un punto P de la circunferencia se define como la recta que intercepta a la circunferencia únicamente en el punto P. Esta definición no es suficiente para cualquier curva en general.

Por ejemplo, en la figura 3.1. Donde la línea es la recta tangente a la curva en el punto P, la cual intersecta a la curva en el punto P.

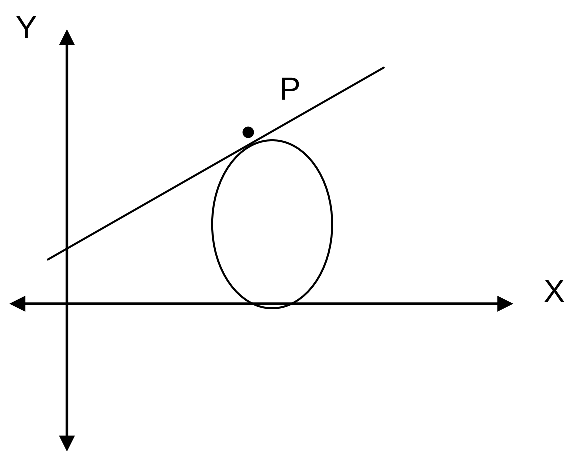


Figura 3.1 Recta tangente a la curva en el punto P

Para llegar a una definición adecuada de la recta tangente a la gráfica de la función, se comienza por considerar cómo se definiría la pendiente de la recta tangente en un punto, si conocemos la pendiente de una recta y un punto sobre la misma, la recta está determinada (punto-pendiente).

Sea la función (*f*) continua en x_1. Se define la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función (*f*) en P $(x_1, f(x_1))$.

Sea Q (x_2, f(x_2)) otro punto sobre la gráfica de la función f.

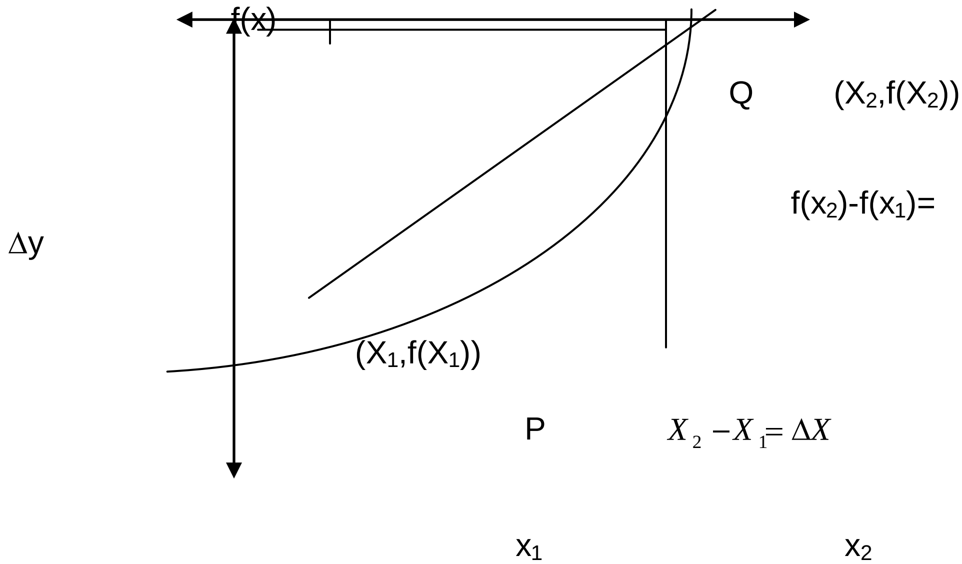


Figura 3.2 Pendiente de la recta tangente

Cualquier recta que pase por dos puntos de una curva se llama secante; por lo tanto, la recta a través de P y Q es una recta secante. En la figura 3.2 está a la derecha de P. Sin embargo Q puede estar a la derecha o a la izquierda de P.

Denotemos la diferencia de las abscisas de Q y P por Δx tal que:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Δ_x puede ser positivo o negativo. La pendiente de la recta secante PQ está definida por:

$$M_{pq} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Ya que $X_2 = X_1 + \Delta x$, podemos escribir la ecuación anterior como:

$M_{pq} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$

Ahora el punto P está fijo, si movemos el punto Q a lo largo de la curva hacia P; entonces Q se aproxima a P. Esto es equivalente a establecer que Δx tiende a cero. Como esto sucede, la recta secante gira sobre el punto fijo P. Si esta recta secante tiene un punto límite, a esta posición límite, común de la recta secante se le define como la recta tangente a la curva en P. Así se querría que la pendiente de la recta tangente a la gráfica en P sea el límite de M_{pq} cuando Δx se aproxima a cero, y el límite existe.

Esto conduce al proceso de los cuatro pasos:

3.2. Proceso de cuatro pasos para determinar la derivada

Pendiente de una recta tangente

La pendiente de la recta tangente en la gráfica de la función f en el punto P (x, f(x)) está dada por:

$$m(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$ Si el límite existe.

El límite que mide la pendiente de la recta tangente a la gráfica de Y = f(x) en el punto P (x, f(x)) recibe el nombre especial de derivada de (f) en (x).

La derivada de una función (f) con respecto de (x) es la función (f)' (que se lee "f prima de x"), definida por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Donde el dominio de f' es el conjunto de todas las (x) donde existe límite.

Diferenciación

La operación de calcular la derivada de una función se denomina diferenciación.

Si la derivada de una función existe en un punto (a), se dice que (f) es diferenciable en este punto.

Ejemplo:

Encontrar la pendiente de la recta tangente a la curva Y= x^2 en el punto (x_1, y_1)

Si: $f(x) = x^2$, entonces:

$f(x_1) = x_1^2$ y $f(x_1 + \Delta x) = (x_1 + \Delta x)^2$

de la definición (i) tenemos:

Primer paso

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Segundo paso

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_1 + \Delta x)^2 - x_1^2}{\Delta x}$$

Tercer paso

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_1^2 + 2x_1\Delta x + \Delta x^2 - x_1^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_1\Delta x + \Delta x^2{}_1}{\Delta x}$$

Ya que $\Delta x \to 0$ podemos factorizar Δx en el numerador

Cuarto paso

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x_1 + \Delta x_1 - 4)}{\Delta x} = 2x_1 + \Delta x$$

En donde:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0}(2x_1 + \Delta x)$$

$$m\ (x_1) = 2x_1$$

Nota: Cuando se obtiene como resultado del cálculo de un límite 0 / 0 ó constante / 0, se concluye que el límite no existe.

3.3. Uso e interpretación de la derivada

El cálculo diferencial estudia el cambio que le ocurre a una variable cuando existen variaciones en otra variable de la cual depende la variable original.

Los investigadores del área **económica-administrativa** se interesan por las razones de cambio promedio e instantáneo y están particularmente interesados en las tasas marginales de cambio, tales como: el costo marginal, el ingreso marginal, la utilidad marginal, el producto marginal, todos los cuales se miden utilizando matemáticamente la derivada.

Para llegar a un concepto claro de derivada, esta sección define lo que se conoce como cambio o incremento de una variable.

Definición de incremento de una variable

Sea $y = f(x)$ una función, con x_1 y x_2, un par de valores en el dominio de (f), de tal forma que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$, entonces:

El cambio en el valor de x al pasar de x_1 a x_2, dado por $x_2 - x_1$, se denomina incremento de x y se representa por Δx, donde $\Delta x = x_2 - x_1$.

El cambio en el valor de Y al pasar de y_1 a y_2, dado por $y_2 - y_1$, se denomina incremento de Y, se representa por ΔY, donde:

$\Delta Y = Y_2 - Y_1 = f(X_2) - f(X_1)$

3.4. Reglas para determinar la derivada de una función

No siempre es sencillo utilizar la definición dada anteriormente para calcular la derivada de algunas funciones, lleva tiempo y cuidado; por ello, es necesario conocer reglas que faciliten este procedimiento. Estas reglas forman lo que se denomina el **álgebra de derivadas**. La notación $\frac{dy}{dx}$ representa un sólo símbolo y no deberá interpretarse como el cociente de las cantidades de *dy* y *dx*, $\frac{dy}{dx}$ indica la derivada d*y* con respecto a (x) si Y es una función de la variable independiente (x), la derivada también se denota por las siguientes representaciones:

$$\frac{d}{dx}(y), \quad \frac{df}{dx}, \quad y', \quad Dxy, \quad Dxf, \quad \frac{d}{dx}(f).$$

Las principales derivadas algebraicas:

1. Derivada de una constante es igual a cero, si: $y = c$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(c) = 0$$

Ejemplos:

a. $\frac{d}{dx}(6) = 0$

b. $\frac{d}{dx}(b) = 0$

Problemas:

a. $\frac{d}{dx}(18)$ R. 0

b. $\frac{d}{dx}(3b)$ R. 0

2. Derivada de una variable es igual a 1, si: y = x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x) = 1$$

Ejemplos:

a. $\frac{d}{dt}(t) = 1$

b. $\frac{d}{dr}(r) = 1$

Problemas:

a. $\frac{d}{dy}(y)$ R. 1

b. $\frac{d}{dm}(m)$ R. 1

3. La derivada de la potencia *n*-ésima de una variable es el producto del exponente (*n*) y la potencia del exponente *n*-1 de la variable, si: *y*=*xn*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

a. $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x^{2-1} = 2x$

b. $\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{8}}) = \frac{1}{8}x^{-\frac{7}{8}}$

Problemas:

a. $\frac{d}{dx}(x^{-3}) \qquad R. \quad -\frac{3}{x^4}$

b. $\frac{d}{dx}(x^{-\frac{5}{3}}) \qquad R. \quad -\frac{5}{3x^{\frac{8}{3}}}$

4. Derivada del producto de una constante y una función.
   Si: y =cu en donde u= f(*x*).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$$

Ejemplos:

a. $\frac{d}{dx}(10x) = 10\frac{d}{dx}(x) = 10$

b. $\frac{d}{dx}(-2x^{\frac{4}{3}}) = -2\frac{d}{dx}(x^{\frac{4}{3}}) = -2\left[\left(\frac{4}{3}\right)x^{\frac{4}{3}-1}\right] = -\frac{8}{3}x^{\frac{1}{3}}$

Problemas:

a. $\frac{d}{dx}(4x^3) \qquad R.\quad 12x^2$

b. $\frac{d}{dx}(16x^{\frac{1}{2}}) \qquad R.\quad \frac{8}{x^{1/2}}$

5. Derivada de la suma de un número infinito de funciones.

   Si: Y = u + v en donde u = f(*x*) y v = g(*x*)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(u) + \frac{d}{dx}(v)$$

Ejemplos:

a. $\frac{d}{dx}(3x^2 + 4x + 2) = 3\frac{d}{dx}(x^2) + 4\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(2) = 3(2x) + 4 + 0 = 6x + 4$

b. $\frac{d}{dx}(2x \;\; - 6x^{-\frac{1}{2}} + 10) = 2\frac{d}{dx}(x) - 6\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{d}{dx}(10) = \frac{-3}{\sqrt{x}} + 2$

Problemas:

a. 1. $\frac{d}{dx}(7x^{\frac{1}{2}} + 5x^{-\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{4}} + 7x - 5) \qquad R. \frac{7}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{5}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}x^{-\frac{3}{4}} + 7$

b. 2. $\frac{d}{dx}(16x^{\frac{1}{2}} + 7x + 4) \qquad R.\quad 8x^{-1/2} + 7$

6. Derivada del producto de dos funciones.

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{d}{dx}(v) + v\frac{d}{dx}(u)$$

Ejemplo:

a. f(x) = (X^3 +3)(x+2)

Sea: u=(x3+3) y v=(x+2)

$$\frac{d}{dx}(uv) = (x^3+3)\frac{d}{dx}(x+2) + (x+2)\frac{d}{dx}(x^3+3) = 4x^3 + 6x^2 + 3$$

b. $f(x) = \left(\sqrt{x}+3\right)\left(x+3\right)$

Sea: $u = \sqrt{x}+3$ y v = x+3

f(x) = $\left(\sqrt{x}+3\right)(1) + \left(x+3\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right) = \left(\sqrt{x}+3\right)\left(\frac{x+3}{2\sqrt{x}}\right)$

Ejemplo:

a. $f(x) = \frac{4}{x^6}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{x^6}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{4}{x^{12}}\right)\left(6x^5\right) = -\frac{24x^5}{x^{12}} = -24x^{-7}$$

b. $f(x) = \frac{36}{x^3+1}$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{36}{x^3+1}\right) = -\frac{108x^2}{(x^3+1)^2}$$

Ejemplos:

a. $f(x) = \left(x^2+3\right)^3$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+3\right)^3 = 3(x^2+3)^2(2x) = 6x(x^2+3)^2$$

b. $f(x) = \left(x+3\right)^{-\frac{1}{3}}$ $\frac{d}{dx}\left(x+3\right)^{-1/3} = \frac{-1}{3\left(x+3\right)^{4/3}}$

Derivadas de las funciones exponenciales y logarítmicas

1. Derivada de una constante elevada a una función.

   Si: $f(x) = a^u$ en donde u = f(*x*) es una función derivable con respecto a *x*.

   $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(a^u\right) = a^u Lna \frac{du}{dx}$$

Ejemplo:

a. $f(x) = 2^{-x}$

$$\frac{d}{dx}\left(2^{-x}\right) = 2^{-x} Ln(2) \frac{d}{dx}\left(-x\right) = -2^{-x} Ln(2)$$

b. $f(x) = 10^{x^2 - x}$

$$\frac{d}{dx} 10^{x^2 - x} = 10^{x^2 - x} \ln 10(2x - 1)$$

Ejemplo:

a. $f(x) = \frac{e^x}{x}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{x}\right) = \frac{x\frac{d}{dx}\left(e^x\right) - e^x \frac{d}{dx}(x)}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

b. $f(x) = 10e^{x^2 + 4}$

$$\frac{d}{dx}\left(10\frac{d}{dx}\left(x^2 + 4\right)\right) = 20xe^{x^2 + 4}$$

Ejemplos:

a. $f(x) = \log\left(\frac{x}{x+1}\right)$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\log e}{\frac{x}{x+1}}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x+1}\right)\right) = \frac{\log e}{x/x+1}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right) = \frac{\log e}{x(x+1)}$$

b. $f(x) = \sqrt{\log x}$

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\log x}\right) = \frac{\log e}{2x\sqrt{\log x}}$$

3.5. Segunda derivada

Derivadas de las funciones de orden superior

En ocasiones es necesario derivar una función una o más veces. Al resultado de dos o más derivadas en forma consecutiva de una función, se le conoce como **derivada de orden superior** y se representa de la siguiente forma:

$$\frac{d^n y}{dx^n} \quad ; \quad f^n(x) \quad ; \quad y^n$$

Ejemplo:

a. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 6x - 6$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = 6$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = 0$$

Las derivadas de orden superior son también iguales a cero.

b. $f(t) = \sqrt{t^2 + 1}$

Solución:

$$\frac{dt}{dy} = t(t^2+1)^{-1/2}$$

$$\frac{d^2t}{dy^2} = (t^2+1)^{-3/2}$$

$$\frac{d^3t}{dy^3} = -3t(t^2+1)^{-5/2}$$

Funciones creciente y decreciente

Este tipo de funciones es también muy importante pues en la vida real una creciente representará los ingresos y ventas que una empresa desea obtener en el presente y futuro así como las decrecientes los gastos y costos.

Función creciente

Se dice que la función es creciente en un intervalo (I), si para cualesquiera x_1 y x_2 dentro del intervalo, $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) < f(x_2)$. Si la primera derivada de (f) es positiva en todo un intervalo entonces la pendiente será positiva y (f) será una función creciente en el intervalo.

Función decreciente

Se dice que la función es decreciente en un intervalo (I), si para cualesquiera x_1 y x_2 dentro del intervalo, $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) > f(x_2)$. Si la primera derivada de (f) es negativa en todo un intervalo, entonces la pendiente será negativa y (f) será una función decreciente en el intervalo.

Ejemplos:

1. En $f(x)=5x^2-20x+3$ determinar los intervalos en que f puede describirse como:
   a. Función creciente.
   b. Función decreciente.
   c. La función no es creciente ni decreciente.

Encontrar la primera derivada:

$$f(x)=5x^2-20x+3$$
$$f`(x)=10x-20$$

a. (f) será creciente cuando f`(*x*)>0 o cuando:

$$10x-20>0$$
$$10x>20$$
$$x>20/10$$
$$x>2$$

b. (f) será decreciente cuando f`(*x*)<0 o cuando:

$$10x-20<0$$
$$10x<20$$
$$x<2$$

c. (f) no será creciente ni decreciente cuando f`(x) = 0 o cuando:

$$10x-20=0$$
$$10x=20$$
$$x=2$$

2. En $f(x)=2x^2+10$ determinar los intervalos en que f puede describirse como:
   a. Función creciente.
   b. Función decreciente.
   c. La función no es creciente ni decreciente.
   d. Encontrar la primera derivada:

$$f(x) = 2x^2 + 10$$
$$f`(x) = 4x$$

a. f será creciente cuando f`(x)>0 o cuando:

$$4x > 0$$
$$x > 0/4$$
$$x > 0$$

b. f será decreciente cuando f`(*x*)<0 o cuando:

$$4x < 0$$
$$x < 0/4$$
$$x < 0$$

c. f no será creciente ni decreciente cuando f`(*x*) = 0 o cuando:

$$4x = 0$$
$$x = 0$$

3. En $f(x) = x^3 + 6x^2 + 15$ determinar los intervalos en que (f) puede describirse como:
   a. Función creciente.
   b. Función decreciente.
   c. La función no es creciente ni decreciente.
   d. Encontrar la primera derivada:

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 15$$
$$f`(x) = 3x^2 + 12x$$
$$f`(x) = 3x(x+4)$$

a. (f) será creciente cuando f`(*x*)>0 y cuando f(*x*)< - 4:

$$3x > 0$$
$$x > 0$$
$$cuando:$$
$$x < -4$$

b. (f) será decreciente cuando - 4< f'(x) <0 o cuando:

$$3x < 0$$
$$x < 0$$

$$cuando:$$
$$x > -4$$

c. (f) no será creciente ni decreciente cuando f'(x) = 0 y cuando f(x) = -4:

$$3x = 0$$
$$x = 0$$

$$x + 4 = 0$$
$$x = -4$$

3.6. Máximos y mínimos

Valores máximos y mínimos utilizando el método de la primera derivada

Criterio de la primera derivada para determinar los máximos y mínimos de una función:

1. Encontrar la primera derivada de la función y factorizarla hasta obtener los factores de primer grado.
2. Los factores encontrados en el punto anterior se igualan a cero (cada uno) y se resuelve la ecuación hasta obtener sus raíces, que vienen a ser los valores críticos de la variable o abscisa de un máximo o mínimo.
3. Se realiza un cuadro en el que se toma como base los valores críticos de la variable, se le dan valores menores y mayores, pero vecinos para cada valor crítico de la variable, los cuales se sustituyen en la ecuación importante de la segunda operación, si el cambio de signo es de más (+) a menos (-) hay un máximo, pero si es de menos (-) a más (+) es un mínimo, si no hay cambio de signo entonces se tiene un punto estacionario.
4. Los valores críticos de la variable se sustituyen en la función, obteniéndose las ordenadas de los máximos y mínimos.

Los puntos anteriores son utilizados como un procedimiento para localizar los máximos y mínimos que ocurren en los valores de x para los cuales f(*x*) y f'(*x*) son continuas.

Ejemplos:

A.

1.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 16$$
$$f``(x) = 3x^2 - 12x$$
$$f``(x) = 3x(x - 4)$$

2. Valores críticos

3x = 0	x - 4 = 0
x = 0	x = 4

3.

x		
	3x (x - 4)	
-1	(-)(-) = +	
0		Máximo
1	(+)(-) = -	
3	(+)(-) = -	
4		Mínimo
5	(+)(+) = +	

4.

a) Ordenada del máximo

$$f(0) = (0)^3 - 6(0)^2 + 16$$
$$f(0) = 16$$

b) Ordenada del mínimo

$$f(4) = (4)^3 - 6(4)^2 + 16$$
$$f(4) = -16$$

5.

Punto del máximo P(0,16)

Punto del mínimo P(4,-16)

B.

1.

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3$$
$$f`(x) = 12x^3 - 12x^2 = x^2(x-1)$$

2. Valores críticos

$x^2 = 0$ $x - 1 = 0$

$x = 0$ $x = 1$

3.

	x	x^2 (x - 1)	
	-1	(+)(-) = -	
0			Punto estacionario
	1	No hay signo	
	0	(+)(-) = -	
1			Mínimo
	2	(+)(+) = +	

4.

a) Ordenada del máximo

$$f(0) = 3(0)^4 - 4(0)^3$$
$$f(0) = 0$$

b) Ordenada del mínimo

$$f(1) = 3(1)^4 - 4(1)^3$$
$$f(1) = -1$$

5.

Punto estacionario P(0,0)

Punto del mínimo P(1,-1)

C.

1.

$$f(x) = 2x^3 - 6x + 5$$
$$f`(x) = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1)$$

2. Valores críticos

6 = 0 $\qquad$ $x^2 - 1 = 0$

$x_1 = 1$ y $x_2 = -1$

3.

	x	$6(x^2-1)$	
	0	(-)	
1			Mínimo
	2	(+)	
	-2	(+)	
-1			Máximo
	0	(-)	

4.

a) Ordenada del mínimo

$$f(1) = 2(1)^3 - 6(1) + 5$$
$$f(1) = 1$$

b) Ordenada del máximo

$$f(-1) = 2(-1)^3 - 6(-1) \ \ +5$$
$$f(-1) = 9$$

5.

Punto del máximo P(-1,9)

Punto del mínimo P(1,1)

Resumen

1. Si la función tiene un máximo relativo o un mínimo relativo en un valor x = a, para el que la primera derivada es continuo, entonces f `(*a*) = 0, si y sólo si.
2. Si f `(*a*) = 0 no necesariamente debe de ser un máximo relativo o un mínimo relativo en x = a, puede ser un punto estacionario con tangencia horizontal, pero f(*x*) y f `(x) son continuas en x = a entonces f `(*a*) = 0.
3. Las condiciones necesarias para que exista un máximo o un mínimo son:

   a. f `(*a*) = 0

   o bien

   b. f `(*a*) no está definida

Valores máximos y mínimos utilizando el método de la segunda derivada

La segunda derivada se emplea para determinar en dónde una función tiene una concavidad hacia arriba o hacia abajo.

La segunda derivada f''(*a*) es la pendiente de la gráfica de f`(*x*) en el punto x = 0.

a. La segunda derivada f``(*a*) de una función y = f (*x*) es positiva, se afirma que la curva que representa es cóncava hacia arriba y f`(*x*) es una función de *x* creciente en x = a.

b. La segunda derivada f``(a) de una función y = f(x) es negativa, se afirma que la curva que representa es cóncava hacia abajo (convexa) y f`(x) es una función de x decreciente en x = a.

Si una función f(x) en un valor x = a para el cual f(x) y f`(x) son continuas.

a. Geométricamente si f`(a) = 0 y f(x) es cóncava hacia abajo en x =a, entonces f(x) tiene un máximo en a.

b. Geométricamente si f`(a) = 0 y f(x) es cóncava hacia arriba en x =a, entonces f(x) tiene un mínimo en a.

Si f(x) y f`($x$) son continuas en x = a y f`(a) = 0, entonces:

Mínimo	Máximo	La prueba no es aplicable
En x = a, f``(a) > 0	En x = a, f``(a) < 0	F``(a) = 0

Criterio de la segunda derivada para calcular máximos y mínimos.

1. Obtener la primera derivada y encontrar los factores de primer orden.
2. Igualar a cero los factores de primer orden y obtener los valores críticos.
3. Obtener la segunda derivada y sustituir en ellos los valores críticos de la variable y ver si el valor numérico obtenido es positivo (x > 0) existe un mínimo, si el valor es negativo (x < 0) existe un máximo, cuando el valor obtenido es cero (x = 0), el criterio no se aplica y se tiene que regresar al criterio de la primera derivada.

Ejemplos:

A. Encontrar los máximos o mínimos y determinar la concavidad.

1.

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 12$$
$$f`(x) = 6x^2 - 6x - 12$$
$$f`(x) = 6(x^2 - x - 2)$$
$$f`(x) = 6(x+1)(x-2)$$

2.

x + 1 = 0	x - 2 = 0	6 = 0
x = -1	x = 2	

3.

$$f`(x) = 6x^2 - 6x - 12$$
$$f``(x) = 12x - 6$$

Para $x_1 = -1$

$$f``(x) = 12(-1) - 6 = -18$$ Existe un Máximo.

Para $x_2 = 2$

$$f``(x) = 12(2) - 6 = 18$$ Existe un Mínimo

Es cóncava hacia abajo en x = -1.

Es cóncava hacia arriba en x = 2.

B. Determinar la concavidad de la función en el punto x = -2

1.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$$
$$f`(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

2.

$$f`(x) = 3x^2 - 4x + 1$$
$$f``(x) = 6x - 4$$

Para $x_1 = -2$

$$f``(x) = 6(-2) - 4 = -16$$
$$f``(-2) < 0$$ Existe un Máximo.

Para $x_2 = 3$

$$f``(x) = 6(3) - 4 = 14$$ Existe un Mínimo

Es cóncava hacia abajo en x = -2

Es cóncava hacia arriba en x = 3

C. Obtener los máximos o mínimos y determinar la concavidad.

1.

$$f(x) = x^4$$
$$f`(x) = 4x^3$$

2.

$4x^3 = 0$

$x = 0$

3.

$$f`(x) = 4x^3$$
$$f``(x) = 12x^2$$

Para $x_1 = 0$

$f``(x) = 12(0) = 0$ No existe máximo o mínimo, la prueba no es aplicable.

a) Valor crítico

si $x < 0$; $f`(x) < 0$

si $x > 0$; $f`(x) > 0$

Entonces existe un Mínimo

	x	$4x^3$	
	-1	(-)-	
0			Mínimo
	1	(+)	

b) . Ordenada del máximo

$$f(0) = (0)^4$$
$$f(0) = 0$$

c)

El mínimo esta en el punto P(0,0)

Es cóncava hacia arriba en x = 0

3.7. Aplicaciones de la derivada

La aplicación que la derivada es la obtención de los valores críticos donde una función tiene máximos, mínimos y puntos de inflexión.

Aplicaciones con la primera derivada

Costo Marginal

Se define como el cambio en el costo total C(x) debido al incremento de una unidad en la producción y se escribe como:

$$C'(x) = \frac{dc}{dx}$$

Ingreso Marginal

El ingreso marginal es el cambio en el ingreso total R(x) por un incremento de una unidad en la demanda y se representa por:

$$R'(x) = \frac{dr}{dx}$$

Costo promedio marginal

Es el costo total dividido entre la cantidad producida, que es la razón C (x)/x, y ésta representa el costo promedio por unidad producida. A la derivada de la razón C (x)/x, con respecto a x se le llama costo promedio marginal y se representa como:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{C(x)}{x}\right) = \frac{1}{x}\left[C'(x) - \frac{C(x)}{x}\right]$$

La expresión anterior indica el costo promedio por artículo en la cantidad total producida.

Ejemplos:

1. El costo total de producir un artículo esta dado por: C(*x*)= $0.25x^2 +40x+100$ pesos, el precio de venta de las *"x"* unidades está dado por la ecuación p(*x*)= 120-0.5x pesos por unidad.
   a. Encontrar el costo marginal.
   b. Calcular el ingreso marginal.
   c. ¿Cuál es el costo marginal de la venta de 14 unidades?
   d. ¿De cuánto es el ingreso marginal que se obtiene de la venta de 14 unidades?

Solución:

a) La ecuación del costo total es: C (x)= $0.25x^2+40x+100$

   La primera derivada nos da el costo marginal

   C'(*x*)= 0.5x+40

b) El precio de venta está dado por la ecuación p(*x*)=120-0.5x , al venderse "*x*" unidades se expresa como:

$$\boldsymbol{R(x) = x[p(x)]} \qquad \boldsymbol{R(x) = x(120 - 0.5x)}$$

Al encontrar la primera derivada obtenemos el ingreso marginal

R'(*x*)= 120-x

c) De la ecuación de costo marginal del inciso "a", se obtiene:

   C' (14) = 0.5 (14) + 40 = 47 pesos

d) El ingreso marginal de la venta de 14 unidades

$$R'(x) = 120 - x$$

$$\boldsymbol{R'(14) = 120 - 14}$$

$$\boldsymbol{R(14) = 106}$$

El ingreso obtenido al vender 14 unidades es 106 pesos.

2. Encontrar el costo promedio marginal de la siguiente ecuación; cuando

   x = 150

COSTO PROMEDIO MARGINAL

$$C(x) = 0.003x^3 - 0.5x^2 + 20x + 1500$$
$$C'(x) = 0.009x^2 - x + 20$$
$$C'(150) = 72.5$$
$$C(150) = 3375$$
$$\frac{1}{x}\left[C`(x) - \frac{C(x)}{x}\right] = \frac{1}{150}\left[147.5 - \frac{3375}{150}\right] = 0.8$$

Así, cuando x = 150, el costo promedio por unidad aumenta en 0.8 por cada unidad adicional producida.

Costo Marginal

1. Suponga que el fabricante de cierto artículo descubre que a fin de producir *"x"* de estos artículos a la semana, el costo total en dólares está dado por: $C = 200 + 0.03x^2$. Por ejemplo, si se producen 100 artículos a la semana, el costo total en dólares está dado por $C = 200 + 0.03\ (100)^2 = 500$. El costo promedio al producir 100 artículos es 500/100 = $5.

$$-2x(25-2x^2)^{\frac{-1}{2}}$$

$C + \Delta C = 200 + 0.03(100 + \Delta x)^{2}$

$= 200 + 0.03\ [10,000 + 200\ \Delta x + (\Delta x)^2]$

$= 200 + 300 + 6\ \Delta x + 0.03\ (\Delta x)2$

$= 500 + 6\ \Delta x + 0.03\ (\Delta x)2$

Por consiguiente, el costo extra determinado por la producción de los artículos adicionales es:

$\Delta C = (C + \Delta C) – C = 500 + 6\Delta\ x + 0.03\ (\Delta x)^2 - 500$

$\Delta C = 6\ \Delta x + 0.03\ (\Delta x)^2$

$\Delta C = \Delta x\ (6 + 0.3\ \Delta x)$

En consecuencia, el costo promedio por artículo de las unidades extras es:

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = 6 + 0.03\,\Delta x$$

Si la producción crece de 100 a 150 artículos por semana (de modo que el $\Delta x = 50$), se sigue que el costo promedio de los 50 artículos adicionales es igual a 6 + 0.03 (50) = $7.50 por cada uno. Si el incremento es de 100 a 110 (de modo que $\Delta x = 10$), el costo promedio extra de los 10 artículos es igual a $6.30 por cada uno.

Definimos el costo marginal como el valor límite del costo promedio por artículo extra cuando este número de artículos extra tiende a cero. Así, podemos pensar del costo marginal como el costo promedio por artículo extra cuando se efectúa un cambio muy pequeño en la cantidad producida. En el caso anterior:

$$\text{Costo marginal} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6 + 0.03\,\Delta x) = 6$$

Regla de la cadena

1. Un importador de café mexicano estima que los consumidores locales comprarán aproximadamente $D(p) = \frac{4.374}{p^2}$ kilogramos de café por semana cuando el precio sea de p pesos por kilogramos.

   Se estima que dentro de t semanas, el precio del café mexicano será de $P(t) = 0.02t^2 + 0.1t + 6.0$ pesos el kilogramo. ¿A qué ritmo estará cambiando la demanda de café dentro de 10 semanas?

La demanda, ¿Estará creciendo o decreciendo?

$$\frac{dD}{dp} = -\frac{8.748}{p^3} \qquad\qquad \frac{dp}{dt} = 0.04t + 0.1$$

Donde $$\frac{dD}{dt}=\frac{dD}{dp}*\frac{dp}{dt}=\frac{-8.748}{\left(0.02t^2+0.1t+6\right)^3}$$

Cuando t = 10 semanas $$\frac{dD}{dt}=-0.012$$

Por lo tanto, la demanda está decreciendo a un ritmo de 0.012 kilogramos por semana.

A modo de conclusión

Hoy en día se requiere optimizar procesos de muchos tipos en diferentes actividades, por esto se requieren metodologías para la optimización, ya sea maximizando o minimizando dichas actividades; así hemos visto la utilidad de la derivada para su uso constante en la vida real.

Bibliografía tema 3

APOSTOL T., *Calculus*, vol. I, 2ª ed., Bcn., Reverter, 1982, 813 pp.

DRAPER J., y J. KLINGMAN J., *Matemáticas para Administración y Economía*, 2ª ed., México, Harla, 1987, 689 pp.

Actividades de aprendizaje

A.3.1 Resolver los ejercicios pares de las páginas 1203 a la 1207 del libro LEITHOLD, L. *Cálculo para ciencias administrativas, biológicas y sociales*, México, Alfaomega, 2004, 672 páginas.

A.3.2 Resuelve dos ejercicios del 3er y 4º libro de la bibliografía.
(La finalidad es que obtengan habilidad para resolver este tipo de temas.)

A.3.3 Resuelve al menos 10 ejercicios bajándolos de la red de Internet de páginas en español.

A.3.4 Investiga en Internet al menos cinco páginas de Internet que contengan ejemplos de aplicación de las determinantes, e indique su dirección.

Cuestionario de autoevaluación

1. Define el concepto de derivada.
2. Define el concepto de segunda derivada.
3. Define el concepto de máximo.
4. Da un ejemplo de un mínimo.
5. Da un ejemplo de un máximo.
6. Da un ejemplo de una derivada y calcule sus valores críticos.
7. Defina el concepto de mínimo.
8. Defina el concepto de punto de inflexión.
9. Propón algunas funciones y calcule su derivada por el método de los cuatro pasos.
10. Propón algunas funciones y calcule su derivada por formula.

Examen de autoevaluación

1. Encontrar la primera derivada de x(X – 3).
   a. 2x-3
   b. 2
   c. X-3
   d. -3
   e. -3x

2. Encontrar la primera derivada de x(2x+1).
   a. 4x+1
   b. 2x+1
   c. X+1
   d. 3x+1

e. $3x$

3. Deriva la función definida por la expresión $f(x) = (2x^2 + x - 3)$.
   a. $(2x^2 + x - 3)$
   b. $(2x + 3)$
   c. $(2x - 3)$
   d. $(4x + 1)$
   e. $(2x^2 – 3)$

4. Supongamos que la función f(x) es continua en un punto x1; entonces la derivada de la función en x1 es:
   a. La pendiente de la recta tangente a la función en x_1
   b. El límite de la función en x_1
   c. La recta tangente a la grafica de f(x)
   d. La pendiente de la recta secante de la función en x_1
   e. La pendiente de la recta secante de la función en el límite de las rectas secantes a la función en el punto x_1

5. Determina la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x^3 - 3x +4$ en el punto (2 , 6).
   a. $3x - y = 12$
   b. $9x - y = 12$
   c. $3x + 4 = y$
   d. $9x + y = 12$
   e. $4x + 9 = 12$

6. Para la función $f(x) = x^3 -6x^2+9x$ encontrar los valores de x en los cuales ocurren los extremos relativos:
   a. $x=2, x= 3$
   b. $x= 1, x= 2$
   c. $x= 1, x= 3$

d. x= 2, x= 4
e. x= 1, x = -1

7. Para la función f(*x*) = $(1 - 2x)^3$, determina el valor de (*x*) en el punto de inflexión de la gráfica.
    a. x= 3
    b. x= 4
    c. x= 2
    d. x = -1
    e. x= 0.5

8. Calcular la primera derivada cuando x=1 de la función f(*x*) = (2)/(x^2 - 1)
    a. +4
    b. infinito
    c. cero
    d. -4
    e. -2

9. Calcular la derivada de f(*x*)= ($5t^2$ + 7t)
    a. -(10t+7)
    b. (10t+7)
    c. (-10t+7)
    d. (10t-7)
    e. 10t

10. Derivar la función f(*x*) = (4x +3.)*3x
    a. 8x+3
    b. x(4x)+3
    c. 4x(4x+3)
    d. 4(4x+3)
    e. 24x+9

TEMA 4. INTEGRAL

Objetivo particular

Al terminar la unidad el estudiante comprenderá los conceptos básicos del cálculo integral, aplicará las herramientas correspondientes para encontrar la integral de distintas funciones. Podrá resolver problemas de la vida real aplicando la integral, que permitan resolver problemas en una empresa cualquiera.

Temario detallado

Introducción

En el presente tema se muestra el concepto de integral definida e indefinida así como sus propiedades. También se muestran diferentes métodos para la obtención de la integral para una función. Y por ultimo la aplicación de la integral para la obtención de áreas bajo la curva y también cálculo de probabilidades.

4.1. Antiderivadas

Empecemos por plantear el concepto de integral en forma general y más adelante se estudiará la integral indefinida y definida.

La integral de una función (f) se denota como:

$$\int f(x)\,dx$$

Donde:

f(*x*)	función a integrar o integrando
d*x*	diferencial de la variable x,
$\int$	signo de integración

La integral es la operación contraria a derivar y se le llama antiderivada.

Ejemplo:

La derivada de la función *x* es 1, d*x* (*x*) = 1

Por lo tanto la antiderivada o integral de 1 es:

$$\int 1\,dx = x + C$$

En donde "C" es una constante de integración que puede tomar cualquier valor, así decimos que:

$F(x) = x + 3$

$F(x) = x + 2$

$F(x) = x + 1$

$F(x) = x + 0$

$F(x) = x - 1$

Todos los casos anteriores son antiderivadas de la función f(*x*) =1, entonces se puede afirmar que una función f es una antiderivada de f en un intervalo, si:

$$F'(x) = f(x)$$

Las funciones $F(x) = x + C$ representan una familia de rectas, todas ellas con pendiente igual a 1.

$\int 2x = x^2 + C$

al derivar la función $f(x) = x^2$,obtenemos como resultado 2x.

Hasta aquí podemos concluir que si conocemos la derivada de una función, conocemos su antiderivada o integral también.

4.2. Integral Indefinida

La integral indefinida de cualquier función (f) con respecto a x es una antiderivada indefinida (arbitraria) de (f), y se denota como: $\int \boldsymbol{f(x)dx}$

Se afirma que todas las antiderivadas de f difieren sólo en una constante.

Formalicemos lo hasta aquí visto.

La antiderivada general de f(x) es: F(x) + C

Por lo tanto

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

Ejemplo:

a) $\int 5dx = 5\int dx = 5x + C$

b) $\int \boldsymbol{3x^2dx = 3\int x^3dx = 3\left[\frac{x^3}{3} + C\right] = x^3 + C}$

Aplicando a la formula anterior la siguiente

Formula $\int x^n dx = \int x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right] = x^{n+1} + C$

c) $\int (1-x)dx = \int dx - \int xdx = x - \frac{x^2}{2} + C.$

4.3. Reglas de integración

Algunas de las propiedades de la integral definida.

1. Si tenemos una función que se está multiplicando por una constante; podemos colocar a la constante fuera de la integral.

   En forma general:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

Ejemplo:

$$\int_2^4 6x^3dx = 6\int_2^4 x^3dx = 6\left(1/4\, x^4\right)\Big|_2^4 = 6\left[1/4(4)^4 - 1/4(2)^4\right] = 360$$

2. Si *k* es cualquier constante, entonces:

$$\int_a^b kdx = k(b-a)$$

Ejemplo:

$$\int_2^4 2xdx = (2x\ )\Big|_2^6 = 2(6-2) = 8$$

3. Si estamos calculando la integral de la suma o resta de 2 funciones:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)$$

Ejemplo:

$$\int_0^3 \left(x^2 + x^3\right)dx = \int_0^3 x^2dx + \int_0^3 x^3dx = 1/3(x^3)\ \Big|_0^3 + 1/4(x^4)\ \Big|_0^3$$

$$= 1/3\left[(3)^3 - (0)^3\right] + 1/4\left[(3)^4 - (0)^4\right] = 9 + 20.25 = 29.25$$

4. La inversa del orden de los límites de integración cambia el signo de la integración.

$$\int_a^b F(x)dx = -\int_a^b F(x)dx$$

$$\int_1^2 dx = (x)\Big|_1^2 = (2-1) = 1$$

Entonces invirtiendo los límites de integración tenemos

$$\int_{2}^{1} dx = (x)\Big|_{2}^{1} = -(1-2) = -(-1) = 1$$

5. Si el límite superior de integraciones es igual al límite inferior de integración, el valor de la integración definida es cero.

$$\int_{a}^{b} F(x)dx = F(a) - F(a) = 0$$

6. La integral definida puede expresarse como la suma de subintegrales.

$$\int_{a}^{c} F(x)dx = \int_{a}^{b} F(x)dx + \int_{b}^{c} F(x)dx \qquad a \le b \le c$$

Formulas básicas de integración

1. $\int dx = x + C$
2. $\int kdx = kx + C$
3. $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$
4. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$
5. $\int x^{n} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
6. $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{2} dx = Ln|x| + C$ x ≠ 0
7. $\int e^{x} dx = e^{x} + C$

Ejercicios de integrales

1. $\int x^{3} dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^{4}}{4} + C$

2. $\int \frac{1}{x^5}\, dx = \int x^{-5} dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = \frac{x^{-4}}{-4} + C = \frac{-1}{4x^4} + C$

3. $\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{1/3+1}}{1/3+1} + C = \frac{x^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3}{4} x^{4/3} + C$

4. $\int x^3 \sqrt{x} dx = \int x^3 x^{1/2} dx = \int x^{7/2} dx = \frac{x^{7/2+1}}{7/2+1} + C = \frac{2}{9} x^{9/2} + C$

5. $\int x\left(x + x^5\right) dx = \int \left(x^2 + x^6\right) dx = \int x^2 dx + \int x^6 dx =$

$\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} + C = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{7} x^7 + C$

6. $\int \left(2 + y^2\right)^2 dx = \int (4 + 4y^2 + y^4) dy = 4\int dy + 4\int y^2 dy + \int y^4 dy = 4y + \frac{4}{3} y^3 + \frac{y^5}{5} + C$

7. $\int \left(3x^5 + 4x^{3/2} - 2x^{-1/2}\right) dx = 3\int x^5 dx + 4\int x^{3/2} dx - 2\int x^{-1/2} dx =$

$= \frac{3x^6}{6} + \frac{4x^{5/2}}{5/2} - \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{1/2} + C = \frac{1}{2} x^6 + \frac{8}{5} x^{\frac{5}{2}} - 4x^{\frac{1}{2}} + C$

4.4. Integración por sustitución

De las fórmulas de las integrales se desprende que es limitado el número de ellas.

Existen dos principios que permiten ampliar el alcance.

- ⇨ Cada regla de integración representa un patrón.
- ⇨ Las diferenciales suministran una pauta a dicho patrón.

Por ejemplo:

$\int (x+3)^{50} d(x+3) = \frac{(x+3)^{50+1}}{51} + C$

Donde a la expresión (x+3) se le saca la derivada con respecto a x.

4.5. Integración por partes

La integral por partes es una fórmula muy eficiente que se basa en el producto de una integral.

La fórmula de integración por partes es:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Para ejemplificar tenemos el siguiente ejemplo:

$$\int x \cos xdx$$

U= x dv = cos *x*

V= sen *x*   du = dx

$$\int x \cos xdx = xsenx - \int sexdx = xsenx + \cos x + C$$

4.6 Integral definida

La integral definida de una función f(*x*) entre x = a y x = b se denota como:

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

Se puede interpretar como el área de la región limitada por la gráfica y = f(*x*) y las rectas x = a, x = b y el eje “x”.

Los valores “a” y “b” reciben el nombre de límite inferior y superior de integración respectivamente.

Una definición más precisa es mencionar que el área bajo una gráfica de una función continua puede expresarse como la integral definida de F(*x*) sobre el intervalo de “a” hasta “b” escrito matemáticamente como:

$$\int_a^b F(x)dx = \frac{lím}{x \to \infty} \sum_{i=1}^{n} F(x)\Delta xi$$

Al contrario de la integral indefinida, que es un conjunto de funciones que contiene todas las antiderivadas de F(*x*), la integral definida es un número real que puede ser evaluado empleando el “**teorema fundamental del cálculo**” que establece que el valor numérico de la integral definida de una función continua F(*x*) sobre el intervalo de (a) hasta (b) está dado por la antiderivada F(*x*)+C evaluada en el límite superior de integración (b), menos la misma antiderivada F(*x*)+C evaluada en el límite inferior de integración (a), con (C) común a ambos, la constante de integración se elimina en la sustracción matemática expresada.

Donde el símbolo $\Big|_a^b$, $\Big]_a^b$, ó $[....]_a^b$ indica que los límites de (b) y (a) deben sustituirse sucesivamente para x.

Ejemplo:

Calcular $\int_0^3 (x-1)dx$

a. Primero el cálculo del área.
b. El concepto de antiderivada que plantea la pregunta ¿qué función al derivarla da como resultado (x – 1)?

y se obtiene que:

$$\int_0^3 (x-1)dx = \int_0^3 xdx - \int_0^3 dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_0^3$$

$$= \left[\frac{1}{2}(3)^2 - (3)\right] - \left[\frac{1}{2}(0)^2 - 0\right]$$

El resultado es: $\int_0^3 (x-1)dx = \frac{3}{2}$

Propiedades de la integral definida

Algunas de las propiedades de la integral definida.

1. Si tenemos una función que se está multiplicando por una constante; podemos colocar a la constante fuera de la integral.

   En forma general:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

   Ejemplo:

$$\int_2^4 6x^3 dx = 6\int_2^4 x^3 dx = 6\left(\tfrac{1}{4}x^4\right)\Big|_2^4 = 6\left[\tfrac{1}{4}(4)^4 - 1/4(2)^4\right] = 360$$

2. Si *k* es cualquier constante, entonces:

$$\int_a^b kdx = k(b-a)$$

   Ejemplo:

$$\int_2^5 6xdx = \left(\frac{6}{2}x^2\right)\Big|_2^5 = 3(5-2) = 3(3) = 9$$

3. Si estamos calculando la integral de la suma o resta de 2 funciones:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)$$

   Ejemplo:

$$\int_0^4 (2x+5)dx = \int_0^4 2xdx + \int_0^4 5dx = 1/2(2x^2)\Big|_0^4 + 5x\Big|_0^4 = (4^2 - 0) + 5(4-0) = 16 - 20 = -4$$

4. La inversa del orden de los límites de integración cambia el signo de la integración.

$$\int_a^b F(x)dx = -\int_a^b F(x)dx$$

5. Si el límite superior de integraciones es igual al límite inferior de integración, el valor de la integración definida es cero.

$$\int_a^b F(x)dx = F(a) - F(a) = 0$$

6. La integral definida puede expresarse como la suma de subintegrales.

$$\int_a^c F(x)dx = \int_a^b F(x)dx + \int_b^c F(x)dx \qquad a \le b \le c$$

Problemas de integrales definidas

a) $\int_2^4 3x^2 dx = 3\int_2^4 x^2 dx = 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^4 = (4)^3 - (2)^3 = 56$

b) $\int_4^{36} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_4^{36} x^{\frac{-1}{2}} dx = \left[\frac{x^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1}\right]_4^{36} = \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_4^{36}$

$= 2(36)^{\frac{1}{2}} - 2(4)^{\frac{1}{2}}$

=12 – 4 = 8

c) $\int_1^5 3x^{-1}dx = 3\int_1^5 x^{-1}dx = 3[\ln x]_1^5 = 3\ln 5 - 3(\ln 1)$

=3(ln 5) = 4.82

d) $\int_0^1 e^{\frac{t}{2}}dt = \left[2e^{t/2}\right]_0^1 = 2e^{\frac{1}{2}} - 2e^0 = 2(e^{\frac{1}{2}} - 1)$

4.7. Integración por substitución

De las fórmulas de las integrales se desprende que es limitado el número de ellas.

Existen dos principios que permiten ampliar el alcance.

- ⇨ Cada regla de integración representa un patrón.
- ⇨ Las diferenciales suministran una pauta a dicho patrón.

Por ejemplo

$$\int_0^4 8e^x dx = 8(e^4 - e^0) = 8(54.598 - 1) = 8(53.598) = 428.784$$

Donde a la expresión (x+3) se le saca la derivada con respecto a x.

4.8. Integración por partes

La integral por partes es una fórmula muy eficiente que se basa en el producto de una integral.

La fórmula de integración por partes es:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Para ejemplificar tenemos el siguiente ejemplo:

$$\int_0^{\pi} x\cos x dx$$

U=x dv= cos *x*

V= sen *x* du = dx

$$\int_0^{\pi} x\cos x dx = xsenx - \int_0^{\pi} senxdx = \left(xsenx + \cos x\right)\Big|_0^{\pi} = \left[\left(\pi sen\pi + \cos\pi\right) - \left(0sen0 + \cos 0\right)\right] = (0-1) - (0+1) = -1-1$$

4.9. Aplicación de integral

1. La gerencia de la compañía de equipo para oficina determinó que la función de ingresos marginales diarios asociados con la producción y venta de su sacapuntas de baterías está dada por:

   $R´(x) = -0.0006x + 6$

   Donde (x) denota las unidades producidas y $R´(x)$ se mide en dólares por unidad.

   a) Determinar la función de ingresos $R(x)$ asociada con la producción y venta de estos sacapuntas
   b) ¿Cuál es la ecuación de demanda que relaciona el precio unitario al mayoreo con estos sacapuntas con la cantidad demandada?

Solución:

a) La función de ingresos R se encuentra integrando la función de ingresos marginales R´(x). Así, R(x)=(-0.0006x + 6)

   $$R(x) = \int R`(x)dx = \int (-0.0006x + 6)dx = -0.0006 \int x\, dx + 6\int dx$$

   $$= -0.0003x^2 + 6x + C$$

   Para determinar el valor de la constante (C), hemos de darnos cuenta de que los ingresos totales de la empresa son cero cuando el nivel de producción y ventas son nulos; es decir, R(0) = 0. Esta condición indica que:

   $$R(0) = -0.0003\,(0)^2 + 6(0) + C = 0$$

   Por lo tanto: $C = 0$

   Así la función de ingresos requerida está dada por:

   $$R(x) = -0.0003\,x^2 + 6x$$

b) Sea (p) el precio unitario al mayoreo de los sacapuntas, entonces:

   Ingresos $\longrightarrow$ R (x) = p x

   Precio número de sacapuntas

   Despejando:

p = $\frac{R(x)}{x}$ = $\frac{-0.0003x^2+6x}{x} = -0.0003x+6$

La ecuación de demanda es:

p = -0.0003x + 6

2. Las tasas de costos e ingresos de cierta operación minera están dadas por:

$$C'(t) = 5 + 2t^{\frac{2}{3}} \quad \text{y} \quad R'(t) = 17 - t^{\frac{2}{3}}$$

En donde (C) y (R) se miden en millones de pesos y (t) en años, determine:

a) ¿Qué tanto deberá prolongarse la operación? y

b) Encuentre la utilidad total que puede obtenerse durante este periodo.

Solución:

a) El instante óptimo (t) que dará como resultado la utilidad máxima es el instante en que el costo y el ingreso son iguales, es decir:

C'(t)=R'(t)

$$5 + 2t^{\frac{2}{3}} = 17 - t^{\frac{2}{3}}$$

$$3t^{\frac{2}{3}} = 17 - 5$$

$$3t^{\frac{2}{3}} = 12$$

$$t^{\frac{2}{3}} = \frac{12}{3}$$

$$t^{\frac{2}{3}} = 4$$

$$t = 4^{\frac{3}{2}} = 8$$

Por lo tanto, la operación deberá mantenerse por t =8 años

b) La utilidad que puede obtenerse durante este periodo de 8 años está dada por:

Utilidad = $\int_0^8 [R'(t) - C'(t)]dt$

$$= \int_0^8 \left[17 - t^{\frac{2}{3}} - (5 + 2t^{\frac{2}{3}}) \right] dt$$

$$= \int_0^8 \left[17 - t^{\frac{2}{3}} - 5 - 2t^{\frac{2}{3}} \right] dt$$

$$= \int_0^8 (12 - 3t^{\frac{2}{3}}) dt$$

$$= 12t - \frac{3t^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} \Bigg|_0^8$$

$$= 12t - \frac{9}{5} t^{\frac{5}{3}} \Bigg|_0^8$$

$$= 12(8) - \frac{9}{5}(8)^{\frac{5}{3}}$$

$= 96 - 57.6 = 38.4$ Millones de pesos

3. La función de costo marginal de un fabricante está dada por la $\dfrac{dc}{dq} = 0.8q + 4$ Si la producción es alta, esto es, es casi igual a q = 90 unidades por semana ¿Cuánto costaría incrementar la producción a 110 unidades por semana?

   La tasa de cambio del costo es $\dfrac{dc}{dq}$.

$$C(110) - C(90) = \int_{90}^{110} \frac{dc}{dq} dq = \int_{90}^{110} (0.8q + 4) dq$$

$$= 0.8 \int_{90}^{110} q dq + 4 \int_{90}^{110} dq = \frac{0.8q^2}{2} + 4q \Big]_{90}^{110} = 5280 - 3600 = 1680$$

   El costo para aumentar la producción de 90 a 110 unidades es $1680.

4. El valor actual de un flujo continuo de ingresos de $5000 al año durante 10 años al 4% compuesto continuamente esta dado por:

$$\int_0^{10} 5000 e^{-0.04t} dt$$

   c) Calcule el valor actual

$$\int_0^{10} 5000e^{-0.04t}dt = 5000\int_0^{10} e^{-0.04t}dt$$

$$= 5000\left[-\frac{e^{-0.04t}}{0.04}\right]_0^{10} = -83790.0 + 125000$$

Valor actual = $ 41210

En estadística, una función de densidad de probabilidad (f) de una variable (x), en donde (x) toma todos los valores del intervalo $[a,b]$ tiene las siguientes propiedades:

1. $F(x) \geq o$ 2. $\int_a^b F(x)dx = 1$ 3. $P(c \leq x \leq d) = \int_c^d F(x)dx$

Ejemplo:

2. Suponga que (y) tiene la función de densidad F(y) = C y en el intervalo $0 \leq y \leq 2$.

   Encuentre el valor de la constante C que hace de F(y) una función de densidad de probabilidad.

$$F(y) = \int_0^2 Cydy = 1 \qquad C\int_0^2 ydy = \left.\frac{Cy^2}{2}\right|_0^2 = 1$$

2C=1 $\therefore$ C = $\frac{1}{2}$

a) Encuentre la probabilidad de $P(1 \leq y \leq 2)$:

$$\text{P}(1 \leq y \leq 2) = \int_1^2 \frac{1}{2}ydy = \frac{1}{2}\int_1^2 ydy = \frac{1}{2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^2$$

$$\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(1 \leq y \leq 2) = \frac{3}{4}$$

5. El tiempo requerido por un grupo de estudiantes de la Facultad de Contaduría para presentar un examen de 1 hora es una variable aleatoria continua con

una función de densidad dada por $F(y) = cy^2 + y$ que se comporta en el intervalo de $0 \le y \le 1$.

a) Determinar el valor de C.

$$F(y) = \int_0^1 \left[Cy^2 + y\right]dy = 1 \qquad \left[\frac{cy^3}{3} + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 1$$

$$\frac{C}{3} + \frac{1}{2} = 1$$

$$C = \frac{3}{2}$$

b) Calcular la probabilidad de que un estudiante termine en menos de media hora.

$$P(o \le y \le 0.5) = \int_0^{0.5} \left[\frac{3}{2}y^2 + y\right]dy = \left[\frac{3}{2}\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}\right]_0^{0.5} = 0.1875$$

A modo de conclusión

Así como se utiliza la integral para calcular el área que tiene una superficie irregular, la cual se puede descomponer en diferentes figuras geométricas para el cálculo de sus áreas y así obtener el área total. La integral se utiliza en el ambiente administrativo para calcular los ingresos y costos acumulados de una empresa, por eso es posible utilizarla y de hecho se utiliza en la vida real en muchos cálculos.

Bibliografía del tema 4

Apostol, T., *Calculus*, vol. I, 2ª ed., Barcelona, Reverter, 1982, 813 pp.

DRAPER J. Y J. KLINGMAN J., *Matemáticas para Administración y Economía*, 2ª ed., México, Harla, 1987, 689 pp.

Actividades de aprendizaje

A. 4.1. Resuelve dos ejercicios del 3er y 4º libro de la bibliografía.

A. 4.2. Resuelve al menos 10 ejercicios bajándolos de la red de Internet de páginas en español.

A. 4.3. Investiga en Internet al menos cinco páginas de Internet que contengan ejemplos de aplicación de las determinantes, e indique su dirección.

Cuestionario de auto evaluación

1. Define el concepto de integral.
2. Define el concepto de integral definida.
3. Define el concepto de integral definida.
4. Da un ejemplo de una integral y resuélvala mediante su fórmula.
5. Aplicando el método de cambio de variable da un ejemplo de una integral.
6. Da un ejemplo de una integral definida.
7. Da un ejemplo de una integral definida.
8. Da un ejemplo de una integral calculando una probabilidad.
9. Define el área entre dos curvas y calcule su área con integrales.
10. Define el área entre dos curvas y calcule su área con integrales.

Examen de autoevaluación

1. La integral de X^3 es igual a:
   a. $X^4/4+c$
   b. $X^2/3+c$
   c. $X^3/3+c$
   d. X^2+c
   e. $x/3+c$

2. La integral de 5 X^5 es igual a:

   a. 5 X^3/3+c
   b. 5 X^2/3+c
   c. 5 X^6/6+c
   d. 5 X^6+c
   e. 5x/3+c

3. La integral de ln x es igual a:

   a. Xln(x)-x+c
   b. –Xln(x)-x+c
   c. Xln(x)+x+c
   d. – Xln(x)+x+c
   e. Xln (x) –x-c

4. La integral de exp (x/2) es igual a:

   a. -Exp(x/2)/2+c
   b. Exp(x/2)+c
   c. -Exp(x/2)+c
   d. 2Exp(x/2)/2+c
   e. (–2) Exp(x/2)/2+c

5. La integral de -5exp(-x/2) es igual a:

   a. (–5)exp(-x/2)+c
   b. (2)exp(-x/2)+c
   c. (5)exp(-x/2)+c
   d. (–2)exp(-x/2)+c
   e. 10exp(-x/2)+c

6. La integral de sen 4x es igual a:

a. (Cos (4x))/4 +c
b. –cos (4x)/4+c
c. (sen (4x))/4+c
d. –(sen (4x))/4+c
e. –cos (4x)+c

7. La integral de 3sen 6x es igual a:

a. 6(Cos (6x))/3 +c
b. –cos (6x)/2+c
c. (sen (6x))/2+c
d. –(sen (6x))/3+c
e. –cos (6x)+c

8. La integral de cos 3x es igual a:

a. (Cos (3x))/3+c
b. –cos (3x)/3+c
c. (sen (3x))/3+c
d. –(sen (3x))/3+c
e. –cos (3x)+c

9. La integral de 3 cos 4x es igual a:

a. (3)(Cos (4x))/2 +c
b. (–3)cos (4x)/2+c
c. (3)(sen (4x))/4+c
d. (–3)(sen (4x))/2+c
e. (–3)cos (4x)+c

10. La integral de (x+3)(x+2) es igual a:

a. $X^3/4+ 5 X^2/2+6x+c$
b. $X^3/3+ 5X^2/2+6x+c$
c. $X^3/3+ 5 X^2/2+6x+c$

d. $X^3/3+ X^3/2+x+c$

e. $X^3/3+ X^3/2+x+c$

TEMA 5. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER GRADO

Objetivo particular

El alumno aprenderá y comprenderá el término de ecuación diferencial ordinaria de primer grado, además aplicará los métodos propuestos en este apartado para resolver problemas de la vida real, con un enfoque administrativo.

Temario detallado

5.1. Concepto de ecuación diferencial
5.2. Soluciones general y particular
5.3. Ecuaciones diferenciales separables
5.4. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden
5.5. Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales

Introducción

En el desarrollo de este tema se muestra el concepto de ecuación diferencial ordinaria de primer grado. De igual manera se muestran diferentes métodos para la obtención de la ecuación diferencial ordinaria de primer grado para una función.

5.1. Concepto de ecuación diferencial

Dada una función $y = f(x)$, la derivada es: $dy / dx = f'(x)$

Es también una función de (x) y se encuentra mediante alguna regla apropiada. Por ejemplo, si $y = e^{x^2}$ entonces $dy / dx = 2xe^{x^2}$ o bien $dy / dx = 2xy$

El problema que se desea resolver es cómo resolver $dy / dx = 2xy$, de tal forma que se encuentre de alguna manera una función $y = f(x)$ que satisfaga la ecuación. En una palabra, se desea resolver ecuaciones diferenciales.

Definición

Si una ecuación contiene las derivadas o diferenciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes, se dice que es una **ecuación diferencial**.

Las ecuaciones diferenciales se dividen de acuerdo a lo siguiente:

Si una ecuación contiene sólo derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, entonces se dice que es una **ecuación diferencial ordinaria.**

Una ecuación que contiene las derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes se llama **ecuación diferencial parcial.**

El orden de la más alta derivada en una ecuación diferencial se llama **orden de la ecuación**.

5.2. Soluciones general y particular

Una solución general de una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$Y' + ky = 0$, e la cual k es una constante, esta ecuación diferencial tiene como solución la siguiente expresión matemática:

$Y=ce^{-kx}$

Donde c es una constante cualquiera que esta sea, y así la expresión matemática anterior representa una solución general.

Una solución particular es aquella donde las constantes c y k están determinadas por un valor en particular para cada una de ellas.

Dándole un valor a k=2 y c=4 tenemos que la ecuación diferencial de primer orden es

$Y' + 2y = 0$

Y su solución particular es $y=4e^{-2x}$

5.3 Ecuaciones diferenciales separables

Una ecuación diferenciable separable es una ecuación diferenciable que puede describirse de la forma siguiente:

$$M(x,y)+N(x,y)\frac{dX}{dY} = 0$$

Es una ecuación diferenciable separable, la cual se puede escribir de la siguiente manera

$$M(x,y)\frac{dx}{dy} = -N(x,y)$$

Y ésta a su vez se simplifica en

$$M(x,y)\, dx = -N(x,y)\, dy$$

$$\int M(x,y)\, dx + \int (n(x,y)\, dy = c$$

Ejemplo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2+y^2}$$

Despejando el término x^2 tenemos lo siguiente:

$$-x^2+(2+y^2)\frac{dy}{dx}=0$$

Como sí se pudo despejar, es una ecuación diferencial separable

Su solución está dada por

$$(2+y^2)dy = x^2dx$$

Integrando la expresión en ambos lados de la igualdad:

$$\int(2+y^2)dy = \int x^2dx$$

$$\int(2+y^2)dy = 2y+\frac{y^3}{3}+a$$

$$\int x^2dx = \frac{x^3}{3}+b$$

Con a, b constantes

$$2y+\frac{y^3}{3}+a = \frac{x^3}{3}+b$$

Multiplicando la expresión matemática por 3 obtenemos (para eliminar el valor de 3 que divide a algunos de los elementos):

$$6y+y^3+3a = x^3+3b$$

Despejando a x en función de y

$$x^3+3b = y^3+6y+3a$$

$$x^3 = y^3+6y+3a-3b$$

$$x = \sqrt[3]{y^3+6y+3a-3b}$$

Que es la solución.

5.4. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Una ecuación diferencial lineal de primer orden se representa matemáticamente de la siguiente manera:

y´ +f(*x*)y =h(x)

Considerando que h(*x*) y f(*x*) son dos funciones continuas dadas en un intervalo a< x< b, su solución se encuentra dada por:

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \left(\mu(x)h(x)dx\right)\right] + c$$

Donde

$$\mu(x) = e^{\left[\int f(x)dx\right]}$$

Ejemplo:

y`+4xy =x

f(x)=4x y h(x)=x

Primero encontramos u(x)

$$\mu(x) = e^{\int 4xdx}$$

$$\mu(x) = e^{2X^2}$$

$$Y=\frac{1}{e^{2x^2}}\left[\int xe^{2x^2}dx\right]+c=\frac{1}{e^{2x^2}}\left[\frac{1}{4}\int 4xe^{2x^2}dx+c\right]=\frac{1}{4e^{2x^2}}\left[e^{2x^2}+c\right]=\frac{1}{4}+\frac{c}{e^{2x^2}}$$

5.5. Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales

En este punto se realizan algunos ejercicios que muestren el uso de las ecuación diferencial ordinarias de primer grado.

Problema de mezclas

A veces, el mezclar dos líquidos da lugar a una ecuación diferencial lineal de primer orden. En el siguiente ejemplo se considera la mezcla de dos soluciones salinas de concentraciones diferentes.

Se disuelven inicialmente 50 libras (lb) de sal en un tanque que contiene 300 galones (gal) de agua. Se bombea salmuera al tanque a razón de 3 galones por minuto; luego la solución, adecuadamente mezclada, se bombea fuera del tanque, también a razón de 3 galones / minuto. Si la concentración de la solución que entra es de 2 lb / gal, determine la cantidad de sal que hay en el tanque en un instante cualquiera. ¿Cuánta sal hay después de 50 min? ¿Cuánta después de un tiempo largo?

Solución:

Sea A(t) la cantidad de sal (en libras) que hay en el tanque en un instante cualquiera. En problemas de esta clase, la rapidez neta con que A(t) cambia está dada por:

$$\frac{dA}{dt}=\left(\begin{array}{c}\text{rapidez con que}\\ \text{la sustancia entra}\end{array}\right)-\left(\begin{array}{c}\text{rapidez con que}\\ \text{la sustancia sale}\end{array}\right)=R_1-R_2$$

Ahora bien, la rapidez con que la sal entra al tanque es, en libras por minuto,

R_1 = *(3 gal / min) * (2 lb / gal) = lb / min*

en tanto que la rapidez con que la sal sale es

$$R_2 = (3 \text{ gal /min}) * \left(\frac{A}{300} \text{ lb/gal} \right) = \frac{A}{100} \text{ lb/min}$$

En consecuencia, la primera ecuación se transforma en

$$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{A}{100}$$

La resolvemos sujeta a la condición inicial $A(0) = 50$.

Puesto que el factor integrante es $e^{t/100}$, puede escribirse como

$$d/dt\,[e^{t/100}A] = 6\,e^{t/100}$$

Por lo tanto

$$e^{t/100}A = 600\,e^{t/100} + c$$

$$A = 600 + ce^{-t/100}$$

Cuando $t = 0$ se tiene $A = 50$; se halla así que $c = -550$. Finalmente, se obtiene

$$A(t) = 600 - 550\,e^{-t/100} = 600 - 550\,e^{-50/100} = 600 - 550e^{-.5} =$$

$$= 600 - 550\,(0{,}6065306597) = 600 - 333.5918628 = 266.408$$

Para $t = 50$ *se tiene que* $A(50) = 266.41$ lb. Además, cuando $t \to \infty$, de la ecuación anterior y en la siguiente tabla se puede ver que $A \to 600$. Por supuesto, esto es lo que se esperaría; después de un periodo largo, entonces el número de libras de sal presente en la solución debe ser:

(300 gal)(2lb / gal) = 600 lb.

t (minutos)	*A (libras)*
50	266.41
100	397.67
150	477.27
200	525.57
300	572.62
400	589.93

En el ejemplo anterior se supuso que la rapidez con que la solución se bombea al tanque es igual a la rapidez con que la solución se bombeó hacia fuera. Sin embargo, esto no tiene por qué ser así; la salmuera mezclada podría ser bombeada hacia fuera con una rapidez mayor o menor que la rapidez con que la otra solución se bombea hacia el interior. La ecuación diferencial que resulta en este caso es lineal con un coeficiente variable.

Bibliografía del tema 5

E. BOYCE, William, C. Diprima, R., *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales*, Limusa, México, 1979, 336 pp.

HERMAN, Betz, *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones*, México, Harla, 1978, 300 pp.

Actividades de aprendizaje

A. 5.1. Resuelve dos ejercicios del 3er y 4º libro de la bibliografía.

A. 5.2. Resuelve al menos 10 ejercicios bajándolos de la red de Internet de páginas en español.

A. 5.3. Investiga en Internet al menos cinco páginas de Internet que contengan ejemplos de aplicación de las determinantes, e indique su dirección.

Cuestionario de autoevaluación

1. Define el concepto de ecuación diferencial.
2. Define el concepto de ecuación diferencial ordinaria de primer orden.
3. Define el concepto de ecuación diferencial en general.
4. Define el concepto de ecuación diferencial en particular
5. Define el concepto de ecuación diferencial separable.
6. Da un ejemplo de una ecuación diferencial separable.
7. Da un ejemplo de una ecuación diferencial en particular.
8. Da un ejemplo de una ecuación diferencial en general.
9. Da un ejemplo de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden.
10. Da un ejemplo de una ecuación diferencial *n*.

Examen de autoevaluación

1. Resolver $2xy\,dx + (x^2 - 1)\,dy = 0$
   a) $x^2 y^2 - y = c$
   b) $xy - y^2 = c$
   c) $x^2 y - y = c$
   d) $y - x^2 y = c$
   e) $x^2 y - xy = c$

2. Resolver $(2x-1)dx + (3y+7)dy = 0$
   a) $x^2 - x + \frac{3}{2}y^2 + 7y = c$
   b) $x^2 - x^3 + \frac{2}{3}y^2 + 9y = c$
   c) $2x^2 - x + y^2 + 7y = c$
   d) $3x^2 - x + \frac{5}{2}y^2 + 7y^2 = c$

e) $x^2 - 2x + \frac{3}{2}y^2 - 8y = c$

3. Resolver $(5x+4y)\,dx + (4x-8y^3)\,dy = 0$
   a) $2x^2 + 4xy^3 - 2y^4 = c$
   b) $\frac{5}{3}x^2 - 3xy - 2y^4 = c$
   c) $\frac{5}{2}x^2 y + 3xy + 3y^4 = c$
   d) $4x^2 + 4xy^2 - 2y = c$
   e) $\frac{5}{2}x^2 + 4xy - 2y^4 = c$

4. Resolver $(2xy^2 - 3)dx + (2x^2 y + 4)dy = 0$
   a) $xy - 4x + 3y = c$
   b) $x^2 y^2 - 3x + 4y = c$
   c) $x^2 y^2 - 4x + 3y = c$
   d) $xy^2 + 5x + 4y = c$
   e) $x^2 y - 3x + 4xy = c$

5. Resolver $\left(1 - \frac{3}{x} + y\right)dx + \left(1 - \frac{3}{y} + x\right)dy$
   a) $2x + 3y + 3\ln|xy| = c$
   b) $x + 5y - 3\ln|x+y| = 2c$
   c) $6x + 2y - 4\ln|xy| = c$
   d) $x + y - 3\ln|xy| = c$
   e) $x + y - 5\ln|xy| = 3c$

6. Resolver $(x^3 + y^3)dx + 3xy^2\,dy = 0$
   a) $\frac{x^4}{4} + xy^4 - c = 0$
   b) $\frac{x^4}{4} + xy^3 = c$
   c) $\frac{x^4}{4} + 4xy^3 = c$
   d) $\frac{x^4}{4} + x^3y^3 - c = 0$

e) $\frac{3x^4}{4} + 4xy^3 = c$

7. Resolver $\frac{2x}{y}dx - \frac{x^2}{y^2}dy = 0$

a) $\frac{3x^2}{y} + 2x\ln 2y = c$

b) $\frac{2x^2}{y} - 2x\ln y - c = 0$

c) $\frac{2x^2}{3y} + 2x\ln y = 2c$

d) $\frac{2x^2}{y} + 3x\ln 3y = 2c$

e) $\frac{2x^2}{y} + 2x\ln y = c$

8. Resolver $(x+y)^2 dx + (2xy + x^2 - 1)dy = 0$

a) $\frac{x^3}{3} + x^2y^2 + 3xy^2 - 2y = c$

b) $\frac{x^3}{3} - x^2y - 2x^2y^2 - y = c$

c) $\frac{x^3}{3} + x^2y + xy^2 - y = c$

d) $\frac{x^3}{3} - 3x^2y - 3xy^2 - 3y = c$

e) $x^3 + 3x^2y + 2xy^2 + 3y = c$

9. Resolver $(5x - y^3)dx + (x^2 - 3xy^2)dy = 0$

a) $\frac{5}{2}x^2 + 3xy^3 + \frac{4x^3}{3} = c$

b) $\frac{5}{3}x^2 - xy^3 + \frac{x^3}{3} = c$

c) $\frac{5}{2}x^2y^2 - xy^3 + \frac{x^3}{3} = c$

d) $\frac{5}{2}x^2 - 3xy^3 + \frac{5x^3}{3} = c$

e) $\frac{5}{2}x^2 - xy^3 + \frac{x^3}{3} = c$

10. Resolver $(1-2x^2-2y)\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 4xy$

a) $x^4 - 3x^2y + 3y - y^2 = c$

b) $-x^4 - 2x^2y + y - y^2 = c$

c) $-x^4 + 3x^2y + y^2 + 3y = c$

d) $x^4 - 2x^2y + y - 3y^2 = 2c$

e) $-x^4 - 4x^2y - 3y - y^2 = c$

TEMA 6. Prácticas en el laboratorio de informática

Objetivo particular

El alumno utilizará los conceptos y propiedades de función, límite, derivada, integral y ecuaciones diferenciales para desarrollar modelos matemáticos con el uso de la hoja Excel y de esta manera resolver problemas de la vida real.

Temario detallado

6.1. Caso práctico de función
6.2. Caso práctico de límite
6.3. Caso práctico de derivada
6.4. Caso práctico de integral
6.5. Caso práctico de ecuaciones diferenciales

Introducción

En el desarrollo de este tema se aplican todos los conocimientos adquiridos durante el semestre y algunos otros de otras materias que en su conjunto, hacen que le alumno sea capaz de resolver problemas combinándolos con el uso de la computadora.

6.1. Caso Práctico de función

El Departamento de Biología estima que una bacteria se reproduce siguiendo el comportamiento de la siguiente función.

$$f(t) = -.26t^2 + 440t + 80.$$

Si el tiempo está dado en segundos, cuántas existirán en la colonia durante un periodo de tres minutos.

Para resolver este ejercicio utilizaremos la hoja Excel

Paso 1 Colocamos en un renglón y celda el valor de los segundos totales.

	A	B	C
1			
2			
3		=3*60	
4			
5			
6			

Resultado

	A	B	C
1			
2			
3		180	
4			
5			

Paso 2. Colocamos en un renglón y celdas diferentes los valores de los coeficientes de la función**.**

	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4					
5		-0.26	440	80	
6					

Paso 3. Multiplicamos la celda del paso uno por cada uno de los coeficientes de la función, en este caso la celda del paso uno al cuadrado por la primera celda del paso dos, más la celda del paso uno por la segunda celda del paso dos más la tercera celda del paso dos.

	A	B	C
6			
7		=B5*B3^2	
8			

	C	D
6		
7	=C5*B3	
8		

Resultado de las operaciones anteriores

	A	B	C	D
6				
7		-8424	79200	
8				

Suma

	A	B	C
8			
9		=B7+C7+D5	
10			

Resultado de la suma

	A	B	C
8			
9		70,856	
10			

6.2. Caso Práctico de límite

El tanque de aire de una gasolinera soporta una presión máxima dada por la siguiente función.

$$f(t) = (x^2 + 248t - 500)/(x-2)$$

Si la presión a que se le somete en un momento dado es de 2 psi, cuál será la presión total soportada por el tanque.

Para resolver este ejercicio utilizaremos la hoja Excel

Paso 1. En una celda de un renglón se coloca el valor de 2.0001 y enseguida el valor de 1.9999.

	A	B	C	D
1				
2		2.0001	1.9999	
3				
4				

Paso 2. Se calcula el valor de la función sustituyendo el valor de la primera celda del paso uno.

	A	B	C	D
3				
4		=(B2^2+248*B2-500)/(B2-2)		
5				

Resultado del cálculo anterior

	A	B	C
3			
4		252.0001	
5			

Paso 3. Se calcula el valor de la función sustituyendo el valor de la segunda celda del paso uno.

	A	B	C	D
5				
6		=(C2^2+248*C2-500)/(C2-2)		
7				

Resultado del cálculo anterior

	A	B	C
5			
6		251.9999	
7			

Paso 4. Ambos valores (paso dos y tres) deben ser muy parecidos a número entero el cual es el resultado buscado. Se calcula el valor de la función sustituyendo el valor de la segunda celda del paso uno.

Vemos que los valores anteriores tienden al valor de 252 que es el valor buscado.

6.3 Caso práctico de derivada

El Departamento de Biología estima que una bacteria se reproduce siguiendo el comportamiento de la siguiente función

$$f(t) = -.26t^2 + 1640t + 80.$$

Maximizar el número de bacterias en una colonia.
Para resolver este ejercicio utilizaremos la hoja Excel

Paso 1. Colocamos en un renglón y celdas diferentes los valores de los coeficientes de la función.

	A	B	C	D	E
1					
2		-0.26	1640	80	
3					
4					

Paso 2. Multiplicamos la primera celda por 2 y se guarda en una celda de otro renglón.

	A	B	C
3			
4		=B2*2	
5			

Resultado

	A	B	C
3			
4		- 0.5200	
5			

Paso 3. Se le cambia el signo a la cantidad resultante del paso 2, el resultado se coloca en una celda distinta.

	A	B	C
3			
4		=B2*2*-1	
5			

Resultado

	A	B	C
3			
4		0.5200	
5			

Paso 4. A continuación el valor de la segunda celda del paso uno se divide entre valor del paso tres, la resultante es el resultado buscado.

	A	B	C
5			
6		=C2/B4	
7			

Resultado

	A	B	C
5			
6		3,153.85	
7			

6.4 Caso práctico de integral

La función que describe el ingreso marginal de un producto es:

Ingreso marginal = -0.08 x + 26

Obtenga el ingreso total a obtener con la venta de 440 unidades del producto, integrando la función del ingreso marginal, y tomando como límites de integración 0 y 440.

Para resolver este ejercicio utilizaremos la hoja Excel

Paso 1. Colocamos en un renglón y celdas diferentes los valores de los coeficientes de la función.

	A	B	C	D
1				
2		-0.08	26	
3				

Paso 2. Colocamos en otro renglón los límites de integración.

	A	B	C	D
3				
4		-	400	
5				

Paso 3. Se coloca en una celda de otro renglón la primera celda del paso uno dividida entre dos y multiplicada por el cuadrado de la segunda celda del paso dos.

	A	B	C
5			
6		=B2/2*C4^2	
7			

Resultado

	A	B	C
5			
6		- 6,400	
7			

Paso 4. Se coloca en una celda de otro renglón la segunda celda del paso uno y se multiplica por la segunda celda del paso dos.

	A	B	C
7			
8		=C2*C4	
9			

Resultado

	A	B	C
7			
8		10,400	
9			

Paso 5. El resultado de los pasos tres y cuatro se suman dando como resultado la cantidad buscada**.**

	A	B	C
9			
10		=B6+B8	
11			

Resultado final

	A	B	C
9			
10		4,000	
11			

6.5. Caso práctico de ecuaciones diferenciales

Se disuelven inicialmente 50 libras (lb) de sal en un tanque que contiene 300 galones (gal) de agua. Se bombea salmuera al tanque a razón de 3 galones por minuto; luego la solución, mezclada adecuadamente, se bombea fuera del tanque, también a razón de 3 galones/minuto. Si la concentración de la solución que entra es de 2 lb/gal, determina la cantidad de sal que hay en el tanque en un instante cualquiera. ¿Cuánta sal hay después de 44 min? ¿Cuánta después de un tiempo más largo?

Para resolver este ejercicio utilizaremos una hoja de Excel

Paso 1. Colocamos en un renglón y celdas diferentes los valores de los coeficientes de la ecuación diferencial $A = 600 - 550\, e^{-t/100}$

	A	B	C	D	E
1					
2		600	-550	100	
3					

Paso 2. Colocamos en otro renglón el valor de los 44 minutos que transcurrirán.

	A	B	C
3			
4		44	
5			

Paso 3. Se sustituye el valor del paso 2 en la función del paso 1

	A	B	C
5			
6		=B2+C2*EXP(-B4/D2)	
7			

Dando como resultado

	A	B	C
5			
6		245.78	
7			

Bibliografía básica

Apostol, T., *Calculus*, vol. I, 2ª ed., Barcelona, Reverter, 1982, 813 pp.

Draper J. Y J. Klingman J., *Matemáticas para Administración y Economía*, 2ª ed., México, Harla, 1987, 689 pp.

E. Boyce, William, C. Diprima, R., *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales*, Limusa, México, 1979, 336 pp.

Herman, Betz, *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones*, México, Harla, 1978, 300 pp.

Weber, Jean E., *Matemáticas para Administración y Economía*, 2ª ed., México, Harla, 1987, 689 pp.

RESPUESTAS A LOS EXÁMENES DE AUTOEVALUACIÓN

MATEMÁTICAS II

TEMA 1	TEMA 2	TEMA 3	TEMA 4	TEMA5
1. e	1. e	1. a	1. a	1. c
2. e	2. c	2. a	2. c	2. a
3. c	3. b	3. d	3. a	3. e
4. c	4. c	4. a	4. d	4. b
5. a	5. e	5. b	5. e	5. d
6. a	6. e	6. c	6. b	6. b
7. b	7. b	7. e	7. b	7. e
8. e	8. c	8. b	8. c	8. e
9. a	9. b	9. b	9. c	9. e
10. e	10. b	10. e	10. b	10. b