UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CONTAURÍA Y ADMINISTRACIÓN

AUTOR: ALBERTO DE LA ROSA ELIZALDE

Matemáticas I (Álgebra Lineal)		Clave: 1168
Plan: 2005		Créditos: 8
Licenciatura: Informática		Semestre: 1º
Área: Matemáticas		Asesoría: 4 h.
Requisitos: Ninguno		Por semana: 4 h.
Tipo de asignatura:	Obligatoria (x)	Optativa ( )

Objetivo general de la asignatura

Al término del curso el alumno aplicará la teoría del álgebra lineal en el planteamiento y resolución de modelos matemáticos afines al área informática.

Temario oficial (horas sugeridas 64)

1. Sistemas de ecuaciones lineales	(10 hrs.)
2. Espacios vectoriales	(8 hrs.)
3. Transformaciones lineales	(10 hrs.)
4. Producto interno	(8 hrs.)
5. Matrices	(8 hrs.)
6. Determinantes	(8 hrs.)
7. Prácticas en el laboratorio de informática	(12 hrs.)

Introducción

Hoy en día existen muchas situaciones en las cuales se requieren calcular valores para diferentes variables, con los cuales se satisfacen infinidad de procesos. Para la obtención de estos valores existen diversas metodologías.

En esta variedad de metodologías es donde tiene su mayor importancia el *Álgebra Lineal*.

TEMA 1. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Objetivo particular

El alumno manejará los conceptos básicos con respecto a las relaciones, las funciones y las ecuaciones tanto de primer como de segundo grado, los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas; con el propósito de aplicar en la informática.

Temario detallado

1.1. Introducción
1.2. Sistemas de *m* Ecuaciones en *n* incógnitas. Eliminación Gaussiana y Gauss-Jordan
1.3. Sistemas de ecuaciones homogéneas
1.4. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

1.1. Introducción

Hoy en día existen muchas situaciones en las cuales se requieren calcular valores para diferentes variables con los cuales poder satisfacer infinidad de procesos y de esta manera obtener solución a diferentes actividades en algún área en especifico de una empresa.

Las ecuaciones lineales se representan en forma general de la siguiente forma:

$$a_1x_1+a_2x_2+ \ldots + a_nx_n = b$$

Ejemplo:

$3x+ 2y = 5$ ó $5z+ 8w-9k=12$

Donde x, y, z, w, k son las variables o incógnitas de la ecuación las cuales las encontramos a través de métodos álgebraicos que estudiaremos más adelante.

1.2. Sistema de *m* ecuaciones y *n* incógnitas. Eliminación y Gauss-Jordan

La eliminación Gauss-Jordan de un sistema de m ecuaciones y n incógnitas es una metodología que permite calcular los valores (x1, x2,….,xn) para los cuales existe una solución del sistema de ecuaciones.

A un sistema de *m* ecuaciones con *n* incógnitas lo podemos representar como:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = Z_1 \ldots\ldots(1)$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = Z_2 \ldots\ldots(2)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = Z_m \;\; ..(m)$$

Donde 1, 2, 3, …, m son las ecuaciones y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las variables de las ecuaciones.

- **El método Gauss-Jordan**

El método de eliminación Gauss-Jordan consiste en representar el sistema de ecuaciones por medio de una matriz y escalonarla para obtener la solución de la ecuación.

Una matriz escalonada es de la forma.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

$$3x + 2y = -17$$
$$7x + 5y = -41$$

Paso 1) Si escribimos la ecuación como una matriz aumentada tenemos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -17 \\ 7 & 5 & -41 \end{bmatrix}$$

Paso 2) El primer renglón lo multiplicamos por 1/3 por lo tanto tenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2/3 & -17/3 \\ 7 & 5 & 41 \end{bmatrix}$$

Paso 3) El mismo primer renglón lo multiplicamos por siete y lo sumamos al segundo y el resultado lo ponemos en el segundo renglón.

Ahora –7R1+ R2→R2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2/3 & -17/3 \\ 0 & 1/3 & -4/3 \end{bmatrix}$$

Paso 4) Ahora multiplicamos el renglón 2 por 3.

Entonces $3R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2/3 & -17/3 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Paso 5) Enseguida multiplicamos el segundo renglón por -2/3 y se le suma al primer renglón.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -9/3 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Como en el primer renglón y la primera columna de la matriz tiene el valor de uno, esto implica que el resultado para *x* es -9/3=-3

Por otro lado en el segundo renglón y la segunda columna de la matriz tiene el valor de uno, esto implica que el resultado para *y* es -4.

$$x = -3, \quad y = -4$$

Este método se puede generalizar para un sistema de *m* ecuaciones con *n* incógnitas.

1.3. Sistemas de ecuaciones homogéneas

Los sistemas de ecuaciones homogéneas se representan como:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n=0 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\ldots+a_{mn}x_n=0 \end{array}$$

Los sistemas de ecuaciones homogéneas siempre tienen solución trivial (una solución trivial es aquella en cuya solución todas las variables son igual a cero) la cual es $X_1= X_2 =X_3=\ldots=X_n = 0$ ó soluciones no triviales.

Ejemplo:

$$\begin{array}{l} x- y + 4z=0 \\ 2x+ y- z=0 \\ -x-y + 2z=0 \end{array}$$

Solución

Paso 1) Se obtiene la matriz aumentada del sistema $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Paso 2) Se multiplica el primer renglón por el valor del segundo renglón y primera columna con signo cambiado en este caso -2. Y se le suma el resultado al

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

segundo renglón, obteniendo la siguiente matriz.

Paso 3) Se divide el segundo renglón entre el valor del segundo renglón y la segunda columna este caso 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Paso 4) Se multiplica el segundo renglón por el valor del tercer renglón y la segunda columna con signo cambiado en este caso 2, y se le suma el resultado al tercer renglón, obteniendo la siguiente matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Paso 5) Se multiplica el segundo renglón por el valor del primer renglón y la segunda columna con signo cambiado en este caso 1, y se le le suma el resultado al primer renglón, obteniendo la siguiente matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Paso 6) De la matriz anterior obtenemos las siguientes ecuaciones

$$x + z = 0 \Rightarrow x = z$$

$$y - 3z = 0 \Rightarrow y = -3z$$

Paso 7) Si le asignamos el valor de w a la variable x, es decir $x = w$ obtenemos, primero la siguiente ecuación

Si $x + z = 0 \Rightarrow x = z$

Como $x = w$ entonces $z = x = w$ por lo tanto $z = w$

Paso 8) Si le asignamos los valores de $x = z = w$ a la segunda ecuación tenemos lo suiguiente.

$$y - 3z = 0 \Rightarrow y = -3w$$

y por lo tanto la solución es (w,3w ,w) .

1.3 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales podemos utilizar los métodos de igualación, reducción, comparación y el método de Gauss-Jordan (El cual ya se vio en el punto 1.2).

- **Método de igualación**

Ejemplo. Hallar la solución de

$$2x + 3y = 10 \ldots. (1)$$

$$x - 5y = 10 \ldots. (2)$$

Paso 1) Primero se despeja las ecuaciones en función de alguna de las variables, en este caso en función de x.

$$x = (10 - 3y) /2 \quad \ldots\ldots (3)$$

$$x = 10 + 5y \quad \ldots\ldots. (4)$$

Paso 2) Igualamos (3) y (4) y tenemos que

$$(10 - 3y) / 2 = 10 + 5y$$

Paso 3) El 2 que divide a el (3) pasa multiplicando a (4)

$$10 - 3y = 2 * (10 + 5y)$$

Paso 4) Se multiplica (4) por el 2 y se obtiene lo siguiente

$$10 - 3y = 20 + 10y$$

Paso 5) Se pasan los términos en Y a la izquierda de la igualdad y los términos independientes a la derecha.

$$-3y - 10y = 20 - 10$$

Quedando una sola ecuación

$$-13y = 10$$

Paso 6) se multiplica por -1 la ecuación anterior

$$13y = -210$$

Paso 7) se despeja la y, dividiendo ambas partes de la igualdad entre 13.

$$y = -10/13$$

si sustituimos en (2) tenemos

$$x - 5 * (-10 / 13) = 10$$

$$x + (50 / 13) = 10$$

$$x = 10 - (50 / 13)$$

$$x = (80 / 13)$$

por lo cual el resultado es

$$x = 80 / 13 \text{ , y } \quad y = -10 / 13$$

- **Método por sustitución**

$$2x + 3y = 10 \ldots \ (1)$$

$$x - 5y = 15 \ldots \ (2)$$

Paso 1) se elige una de las ecuaciones, en este caso la primera ecuación, entonces la despejamos en función por ejemplo de y (también podría ser en función de x).

Al despejar de (1) y

$$3y = 10 - 2x$$

$$y = (10 - 5x) /3 \ldots . \ (3)$$

Paso 2) Se sustituye (3) en (2)

$$x - 5 * (10-2x) / 3=15$$

$$x - 50 / 3 +10\, x / 3=15$$

si multiplicamos por tres, se simplifica mucho la ecuación

$$3x – 50 + 10x = 45$$

$$13x = 45 + 50$$

$$x = 95 / 13$$

Paso (3) Esto lo sustituimos en (3)

$$y = (10 – 2 * (95 /13)) /3$$

$$y = (10 - 190 /13) /3$$

$$y = - 20 / 13$$

- **Método por reducción**

$$2x + 3y = 10\ldots (1)$$

$$x + 5y = 15\ldots (2)$$

Paso 1) Hay que eliminar una de las dos variables, se elige la variable *x.*

Paso 2) Para poderlas eliminar, ambas deben tener el mismo coeficiente, por lo tanto la ecuación (2) se multiplica por dos.

$$\begin{array}{rcl} 2x+ 3y & = & 10 \\ 2x + 10y & = & 30 \\ \hline \end{array}$$

Paso 3) A la ecuación (1) se le resta la ecuación (2)

$$\begin{array}{rcl} 2x+ 3y & = & 10 \\ 2x + 10y & = & 30 \\ \hline -7y & = & -20 \end{array}$$

Paso 4) Despejando la y obtenemos

$$y = -20/-7 = 20/7$$

Paso 5) Sustituyendo el valor de *y* en la ecuación (2) obtenemos

$$x = 15 - 5 * (20 / 7)$$

$$x = 15 + (100 / 7)$$

$$x = (105 - 100) / 7$$

$$x = 5 / 7$$

Bibliografía del tema 1

FLOREY, Francis, *Fundamentos de álgebra lineal y aplicaciones*, México, Prentice-Hall, 1994, 416 pp.

GROSMAN, Stanley Y., *Álgebra lineal*, México, Mc Graw-Hill, 1996, 634 pp.

HOFFMAN, Kenneth; KUNZE Ray, Á*lgebra lineal*, México, Prentice-Hall, 1994, 416 pp.

NOBLE, Ben; DANIEL, James, Á*lgebra lineal aplicada*, México, Prentice-Hall, 1994, 592 pp.

SOTO, Prieto M. J.; Vicente Córdoba J. L. Á*lgebra lineal*, México, Prentice-Hall, 1995, 301 pp.

BOUCHERON, Du, L.B. *Álgebra lineal interactiva*, México, Mc Graw-Hill, 1995, 431 pp.

GODINEZ, C., Héctor, F.; HERRERA, C. J. Abel, *Álgebra lineal teoría y ejercicios*, México, UNAM, 1990, 405 PP.

LIPSCHUTZ, Seymour, Á*lgebra Lineal*, México, Mc Graw-Hill, 1971, 336 pp.

Actividades de aprendizaje

A.1.1. Resuelve los ejercicios impares de las páginas 180 a 182 del libro *Álgebra lineal* de Sthepen H. Friedberg. por el método de suma y resta

A.1.2. Resuelve los ejercicios pares de las páginas 180 a 182 del libro *Álgebra lineal* de Sthepen H. Friesdberg por el método de igualación.

A.1.3. Resuelve los ejercicios impares de las páginas 180 a 182 del libro *Álgebra lineal* de Sthepen H. Friesdberg por el método de Gauss-Jordan.

Cuestionario de autoevaluación

1. ¿Qué es una ecuación lineal?
2. ¿Qué es una ecuación lineal homogénea?
3. ¿Qué es una ecuación lineal con solución no trivial?
4. ¿En qué consiste el método de Gauss-Jordan?
5. Explique el método de sustitución.
6. ¿En qué consiste el método de reducción?
7. ¿En qué consiste método de igualación?
8. ¿En qué consiste el método de suma y resta?
9. Explique si el método de Gauss-Jordan para obtener soluciones no triviales.
10. Explique el método de eliminación gaussiana.

Examen de autoevaluación

1. Encuentre la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss-Jordan.

$$2x + 3y = 9$$
$$4x + 2y = 18$$

a) $x = 4.5$, $y = 1$
b) $x = 4.5$, $y = 0$
c) $x = 0$, $y = 4$
d) $x = 0$, $y = 4.5$
e) $x = 5$, $y = 4$

2. Al resolver el sistema de ecuaciones por el método de reducción, qué solución se obtiene:

$$2\,x + y = 2$$
$$2\,x + 2y = 4$$

a) $x = 0$, $y = 0$
b) $x = 2$, y = 0
c) $x = 0$, $y = 1$
d) $x = 2$, $y = 2$.
e) $x = 1$, $y = 1$

3. Al resolver el sistema de ecuaciones, por el modo de igualación, qué solución se obtiene:

$$x + 2\,y = 2$$
$$2x + 2y = 2$$

a) $x = 1$, $y = 1$
b) $x = 0$, $y = 1$
c) $x = 0$, $y = 2$
d) $x = 3$, $y = -1$
e) $x = -1$, $y = 2$

4. Al resolver el sistema de ecuaciones, por el modo de sustitución:

$$x + 2\,y = 2$$
$$2x + 3y = 2$$

a) $x = 2$, y = 0
b) $x = 0$, $y = 2$
c) $x = 0$, $y = 1$
d) $x = 2$, $y = -2$
e) $x = -2$, $y = 2$

5. Al resolver el sistema de 2 ecuaciones con dos incógnitas:

$$3x_1 + 2x_2 = 7$$
$$4x_1 - 2x_2 = 0$$

Por el método de gauss-jordan se obtiene

a) $x_1 = 1$, $x_2 = 0$
b) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$
c) $x_1 = 2$, $x_2 = .5$
d) $x_1 = -1$, $x_2 = 5$
e) $x_1 = 0$, $x_2 = 3.5$

6. Al resolver el sistema de ecuaciones con dos incógnitas:

$$4x_1 - 2x_2 = 0$$
$$2x_1 - 2x_2 = -4$$

Se obtiene:

a) $x_1 = 2$, $x_2=4$
b) $x_1 = -2$, $x_2=4$.
c) $x_1 = 0$, $x_2=0$.
d) $x_1 = 2$, $x_2=0$
e) $x_1 = 1$, $x_2=2$

7. Al resolver el sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas:

$$3x_1 + 2x_2 = 6$$
$$3x_1 - 2x_2 = 0$$

Por el método de reducción se obtiene

a) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$
b) $x_1 = 0$, $x_2 = 0$
c) $x_1 = 1$, $x_2 = 1.5$
d) $x_1 = 1.5$, $x_2 = .5$
e) $x_1 = .5$, $x_2 = 2$

8. Al resolver el sistema de 2 ecuaciones con dos incógnitas,

$$3x_1 + 4x_2 = 12$$
$$2x_1 - 2x_2 = 2$$

por el método de igualación se obtiene:

a) $x_1 =$ 0, $x_2=10$

b) $x_1 = -10$, $x_2=10$

c) $x_1 = -8$, $x_2=9$

d) $x_1 = -9$, $x_2=8$

e) $x_1 = 80$, $x_2=9$

9. Al resolver el sistema de w ecuaciones con dos incógnitas

$$4x_1 - 2x_2 = 0$$

$$2x_1 - 3x_2 = -4$$

por el método de sustitución se obtiene:

a) $x=-1,$ $x_2 = -2$

b) $x_1 =1.$ $x_2 = 2$

c) $x_1 =1$, $x_2 = -2$

d) $x_1 =2,$ $x_2 = -1$

e) $3.5 \leq x_1 \leq 4.5, 5 \leq x_2 \leq 7$

10. Al resolver el sistema de2 ecuaciones con dos incógnitas:

$$4x_1 - 2x_2 = 0$$
$$x_1 - 2x_2 = -3$$

Por el método de Gauss-Jordan se obtiene

a) $X_1 = 1,$ $X_2 = 2$

b) $X_1 = 1,$ $X_2 = 0$

c) $X_1 = 0,$ $X_2 = 2$

d) $X_1 = ,$ $X_2 = 1$

e) $X_1 = 1,$ $X_2 = -2$

TEMA 2. ESPACIOS VECTORIALES

Objetivo particular

El alumno reconocerá los diferentes conceptos involucrados en el tema de espacios vectoriales, así como la manera de aplicar sus propiedades para verificar su autenticidad. Además de aplicar dichos conocimientos para la solución de problemas en el campo de la informática.

Temario detallado

Introducción

Muchas situaciones de la vida real requieren de conceptos como velocidad aceleración o fuerza, los cuales tienen que ver con una magnitud y una dirección. Dentro de las matemáticas existen entes que representan estas magnitudes en cierta dirección y se conocen con el nombre de vectores. Con los cuales se pueden realizar diferentes operaciones y la aplicación de muchos conceptos.

2.1 Vectores en el plano

Para empezar nuestro estudio de espacios vectoriales necesitamos la definición de vector, el cual podemos definir como: El segmento de recta dirigido de un punto U a otro punto V.

Sea UV el segmento o vector; se conoce a U como punto inicial y a V como punto terminal.

Cualquier vector en el plano tiene las siguientes propiedades: magnitud, dirección y sentido.

La magnitud de cualquier vector *v* se define de la siguiente manera:

$$|v| = \sqrt{a_2 + b_2}$$

y la dirección se puede definir como el ángulo θ (respecto al eje *x*) de tal forma que si v= (a,b) y $0<\theta<2\pi$ entonces.

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

Sea A = (x,y) el cual representa una matriz de 2 x 1 de modo que

a= $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, donde *x* e *y* son números reales y se denominan componentes del vector.

Los vectores en el plano tienen las siguientes características.

- Sea a=$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ y b=$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ a y b son iguales si y sólo si $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$
- Se define la suma de vectores como

  a+b= $\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$

  * Si a= $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ representa un vector y α es un escalar, entonces

  αa= $\begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix}$

Ejemplo

Si a= $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ representa un vector y 3 es un escalar, entonces

3a= $\begin{bmatrix} 3(1) \\ 3(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

2.2 El producto vectorial y las proyecciones en R^2

Se define el producto vectorial entre *a* y *b* donde a = (x_1, y_1) y b =(x_2, y_2) como:

a.b = $x_1x_2 + y_1y_2$ donde a.b es un escalar

Ejemplo:

Sean *x* y *z* dos vectores *x* = (1,2) y *z* = (3,4) entonces su producto vectorial es:

xz= (1,2) (3,4) = 1(3) + 2(4) = 3 + 8 = 11

Se define una proyección en R^2 entre *a* y *b* y considerándolos como dos vectores diferentes de cero, entonces la proyección de *a* sobre b es un vector que se define como:

$$\text{Proy}_b a = \frac{a.b}{|b|2} b$$

La componente de *a* en la dirección de *b* es $\frac{a..b}{|b|}$

Donde se cumple que:

i. La proy_ba es paralela a *b*

ii. a-proy_ba es ortogonal a *b*

Ejemplo: (s8)

Calcular la $proy_b a$ considerando los vectores a=(1,2) y b=(2,3)

Calculamos ab=(1,2)(2,3)=1(2)+2(3)= 2 + 6 = 8

¡b!$=(2^2+3^2)^{½}=(4+9)^{½}= (13)^{½}$

Al cuadrado el término anterior es igual a 13.

$proy_b a$= (8/13)(2,3)

Ejemplo:

Calcular la a-$proy_b a$ considerando los vectores a=(1,1) y b=(2,3)

Calculamos ab=(1,1)(2,3)=1(2)+1(3)= 2 + 3 = 5

¡b!$=(2^2+3^2)^{½}=(4+9)^{½}= (13)^{½}$

Al cuadrado el término anterior es igual a 13.

$proy_b a$= (5/13)(2,3)

(1,1)-(5/13)(2,3)=(1-2(5/13),1-(5/13)3)=(1-10/13,1-15/13)=(-3/13,2/13)=

=(1/13)(-3,2)

2.3 Vectores en el espacio

Los vectores en el espacio son todas las ternas ordenadas de números reales, es decir,

$$R^3= (x,y,z) \quad x,y,z$$

Así pues, un vector en el espacio es:

$$a = (a_1, a_2, a_3) \qquad b = (b_1\ b_2, b_3)$$

y cumple con las siguientes propiedades:

1) a + b es único y a + b $\in$ R^3

2) a + (b + c) = (a + b) +c

3) 0+ a = a, donde 0 = (0,0,0)

4) –a + a = 0 donde –a = ($-a_1$,$-a_2$,$-a_3$)

5) a + b = b + a

6) αa es único y αa $\in$ R3

7) α (a+b) = αa + αb

8) (α+β)a = αa + βa

9) α(βa) = ($\alpha\beta$)a

10) a=a

Donde la magnitud de cualquier vector será:

$$a=\sqrt{a_1 + a_2 + a_3}$$

Y la distancia entre dos vectores a y b estará representada por:

$$ab=\sqrt{(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3)}$$

Como en R^2 también podemos encontrar en el espacio el ángulo entre dos vectores a=(x_1, y_1, z_1) y b=(x_2, y_2, z_2) de la siguiente manera:

Coseno θ= $\frac{a..b}{|ab|}$ $_2$b

De igual forma se define la proyección de *a* sobre *b*, como:

$\text{Proy}_b a = \frac{a..b}{|b|}$

Ejemplo: (s10)

Calcular la $\text{proy}_b a$ considerando los vectores a=(2,2) y b=(0,3)

Calculamos ab=(2,2)(2,3)=2(0)+2(3)= 0 + 6 = 6

$¡b!=(0^2+3^2)^{½}=(0+9)^{½}= (9)^{½}=3$

$\text{proy}_b a$= 6/3=2

2.4 El producto cruz de dos vectores

Se define el producto cruz o producto vectorial entre u y v (denotado como uxv) como:

$$uxv \ =(b_1c_2 - c_1b_2)i + (c_1a_2 - a_1c_2)j + (a_1b_2 - b_1a_2)k$$

Donde el resultado será otro vector y además sólo se encuentra definido en R^3. Una forma más sencilla de calcular el producto cruz es por medio de determinantes, asĺ pues,

$$uxv = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Propiedades del producto cruz

θ ux0 = 0xu = 0

θ uxv = -(vxu)

θ $(\alpha u)xv = \alpha(uxv)$

θ ux (v+w) = (uxv)+(uxw)

- θ (uxv).w = u.(vxw)
- θ u.(uxv) = v.(uxv) = 0
- θ si u y v son paralelos entonces uxv=0

Nota: ux (vxw) ≠ (uxv) xw

El vector uxv es un vector ortogonal tanto a u como a v

Ejemplo:

Verificar que los vectores u y v son paralelos U=i+j+k y v=2i+2j+2k

Uxv=(1(2)-1(2))i+(1(2) - 1(2)) j + (1(2) - 1(2))k = (2 – 2)i+(2-2)j+(2-2)k=

=0i+0j+0k=0

2.5 Subespacio vectorial

Iniciaremos definiendo qué es un espacio vectorial.

Un espacio vectorial es un conjunto de vectores (v1,v2,….,vn) que cumplen con las siguientes propiedades:

Si x y w son dos vectores de un espacio vectorial V entonces existen operaciones + y x .

1) x + w= w+x.
2) x+(w+t)=(x+w)+t.
3) Existe un único elemento 0 talque x+0=0+x=x.
4) Para cada x existe un w talque x+w=w+x=0.
5) Si k es cualquier número real entonces k (x+w)=kx+kw.
6) Si k, d son dos números reales entonces (k+d)x=kx+dx.
7) Si k, d son dos números reales entonces k(dx)=(kd)x.
8) Existe un número 1 tal que 1 (x)= x.[1]

[1]Véase, Bernard Kolman, (1981), Á*lgebra lineal*, Bogotá, Fondo Educativo Interamericano.

Ejemplo: Sean x=(1,2), w=(1,1), t=(0,1) y números reales k=2 y d=3

1) x+w=w+x

(1,2)+(1,1)=(1+1,2+1=(1+1,1+2)=(1,1)+(1,2)

2) (1,2)+((1,1)+(0,1))= (1,2)+(1+0,1+1)=(1+1+0,2+1+1)=(1+1,2+1)+(0.1)= ((1,2)+(1,1))+(0,1)

3) (1,2)+(0,0)=(1+0,2+0)=(1,2)

4) (1,2)+(-1,-2)=(1-1,2-2)=(-1+1,-2+2)=(0,0)

5)2((1,2)+(1,1))=2(1+1,2+1)=(2(1)+2(1),2(2)+2(1))=(2(1),2(2))+(2(1),2(1))= 2(1,2)+2(1,1)

6) (2+3)(1,2)=((2+3)(1),(2+3)(2))=(2(1),2(2))+(3(1),3(2))=2(1,2)+3(1,2)

7) 2(3(1,2))=2(3(1),3(2))=(2(3)(1),2(3)(2))=((2(3))(1),(2(3))(2))=(2(3))(1,2)

8) 1x=1(1,2)=((1)1,(1)2)= (1,2)

Un subespacio vectorial de V si S es un subconjunto de V y en sí es un espacio vectorial respecto a la adición y multiplicación definidas en V. Además deberá cumplir las siguientes condiciones:

- $\forall$ u, v $\in$ S: u+v $\in$ S
- $\forall$ $\alpha\in$ k, v $\in$ S: αv $\in$ S

2.6 Combinaciones lineales y espacio generado

Un vector es una combinación lineal de los vectores v1, v2,…, vn, puede ser expresado de la forma:

$$w = a_1v_1+a_2v_2+\ldots+ a_nv_n$$

Donde $a_1,a_2,\ldots,a_n$ son escalares.

Ejemplo:

Supónganse que se tienen dos vectores cualesquiera (2,-1,0) y (3,8,8), y escalares 4 y 6 respectivamente

Entonces la combinación se representa por la suma de los vectores multiplicados por sus respectivos escalares

4(2,-1,0) + 6(3,8,8) = (8,-4,0) + (18,48,48) = (26,44,48)

Sea V un espacio vectorial sobre *k*, y sea

$$G = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$$

Un conjunto de vectores de V. Se dice que G es un generador de V si para todo vector $x \in V$ existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ tales que

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m$$

El espacio generado es el conjunto de combinaciones lineales de $v_1, v_2, \ldots, v_m$, es decir,

$\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} = \{ v{:}v = a_1v_1+a_2v_2+\ldots+a_mv_m\}$

Ejemplo.

Sean {(1,2) , (3,4),(6,7)} un conjunto de vectores y 2, 3 y 6 tres escalares respectivamente.

Entonces si existe una *x* tal que

x= 2 (1,2) + 3 (3,4) + 6 (6,7) entonces es un generador de V

x= (2,4) + (9,12) + (36,42) = (2+9+36,.4+12+42) = (47,58)

2.7 Independencia lineal

Un conjunto de vectores v1, v2, v3 y vn es linealmente independiente, si existen escalares c1,c2,c3 y cn que una combinación lineal de dichos vectores con los anteriores escalares respectivamente, esta última operación da cero y los escalares son todos iguales a cero entonces se trata de una combinación lineal la cual es linealmente independiente.

i) S es linealmente independiente si la igualdad

$$a1v1+a2v2+\ldots+anvn = 0$$

Sólo se satisface con a1 = a2 = … = an = 0

- **Dependencia lineal**

Sea S = {v1, v2,…, vn} un conjunto de vectores:

i) S es linealmente dependiente si existen escalares a1, a2, … , an, no todos iguales a cero, tales que:

a1v1+a2v2+…+anvn = 0

Nota:

1. Todo conjunto que contiene al vector 0 es linealmente dependiente.
2. Si S es un conjunto linealmente independiente entonces cualquier subconjunto de S es linealmente independiente.

2.8 Bases y dimensión

Un conjunto de vectores es una base de un espacio vectorial V si:

i) Genera a V

ii) Es linealmente independiente

Si B = {v1, v2, … , vn} es una base de V, entonces cualquier otra base de dicho espacio está formada por n vectores, es decir, dos bases cualesquiera de V tienen igual número de vectores.

- **Dimensión**

Si B = {v1, v2,…, vn} es una base de V, se dice que V es de dimensión *n*, es decir, es el número de elementos en una base de V.

Si V es un espacio vectorial de dimensión n, cualquier conjunto linealmente independiente formado por *n* vectores de V es una base de dicho espacio.

Si V es un espacio vectorial de dimensión *n* y S es un subespacio de V, entonces:

dim S $\leq$ n

por lo que si dimS=n entonces S = V.

Ejemplo:

Sean a y b dos vectores que generan a R^2, a=(1,2) y b=(1,3), entonces consideremos a todos los vectores del espacio vectorial como x=(x,y) y escalares a1 y b1.

X=a1 a + b1 b = a1 (1,2) + b1 (1,3) = (a1 + b1, 2 a1+ 3b1) =(x,y)

B1 = y-2x

A1= 3x-y

Como x e y pueden tomar cualquier valor, por lo tanto los vectores a y b generan R^2 y su dimensión es igual al número de vectores y como son 2, su dimensión es dos.

Bibliografía del tema 2

FLOREY, Francis, *Fundamentos de álgebra lineal y aplicaciones*, México, Prentice-Hall, 1994, 416 pp.

GROSMAN, Stanley Y., *Álgebra lineal*, México, Mc Graw-Hill, 1996, 634 pp.

HOFFMAN, Kenneth, y Ray KUNZE, *Álgebra Lineal*, México, Prentice-Hall, 1994, 416 pp.

NOBLE, Ben, y James DANIEL, *Álgebra lineal aplicada*, México, Prentice-Hall, 1994, 592 pp.

SOTO, Prieto M. J. y Vicente Córdoba J. L., *Álgebra lineal,* México, Prentice-Hall, 1995, 301 pp.

BOUCHERON, Du, L.B., *Álgebra lineal interactiva*, México, Mc Graw-Hill, 1995, 431 pp.

GODINEZ, C., Héctor, F., y Abel C.J. HERRERA, *Álgebra lineal teoría y ejercicios*, México, UNAM, 1990, 405 PP.

LIPSCHUTZ, Seymour, *Álgebra lineal*, México, Mc Graw-Hill, 1971, 336 pp.

Actividades de aprendizaje

A.2.1. Resolver los problemas pares de la página 60 a la 61 del libro ÁLGEBRA LINEAL Sthepen H. Friedberg.

A.2.2. Resolver los problemas impares de la página 113 a la 115 del libro *Álgebra Lineal* de STRANG.

Cuestionario de autoevaluación

1. Explica el concepto de vector
2. ¿Qué es el producto vectorial?
3. Explica con un ejemplo a qué valor se llega cuando los vectores son paralelos al aplicar el producto cruz
4. ¿Qué es la proyección *a* en dirección *b*?
5. ¿En qué consiste la última propiedad de los espacios vectoriales?
6. ¿Qué es la dimensión de un espacio vectorial?
7. ¿Qué es un espacio vectorial?
8. ¿Qué es un subespacio vectorial?
9. ¿Qué es la independencia lineal?
10. ¿Qué es la dependencia lineal?

Examen de autoevaluación

1. Supónganse que tienen dos vectores cualesquiera (2,1,1) y (3,2,0) y escalares 2 y 3 respectivamente, calcular el vector resultante de la combinación lineal de ambos.

a) (12, 3, 4)
b) (13, 8, 2)
c) (1, 5, 2)
d) (12, 8, 2)
e) (13, 7, 2)

2. Supónganse que se tienen dos vectores cualesquiera (3, 2, 1) y (1, 2, 1) y escalares 2 y 1 respectivamente, calcular el vector resultante de la combinación lineal de ambos.

a) (7, 6, 3)
b) (6, 6, 2)
c) (1, 5, 2)
d) (5, 8, 2)
e) (5, 7, 2)

3. Calcular el producto interno de los siguientes vectores cualesquiera (2,1.1) y (3,2,0)

a) 9
b) 8
c) 10
d) 7
e) 11

4. Calcúlese el producto interno de los siguientes vectores cualesquiera (2,2.1) y (3,2,1)

a) 9
b) 8
c) 10
d) 7
e) 11

5. Calcular la magnitud del siguiente vector (3, 4, 1):

a) 24
b) 25
c) 26
d) 27
e) 28

6. Calcular la magnitud del siguiente vector (5, 2, 1):

a) 28
b) 29
c) 30
d) 31
e) 32

7. Calcular la proyección de a sobre b con a=(1,2) y b=(1,0)

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

8. Calcule la proyección de a sobre b con a=(1,2) y b=(3,4)

a) 11/4
b) 11/2
c) 11/5
d) 11/3
e) 11/6

9. Calcule la proyección de b sobre a con a=(2,3) y b=(3,4)

a) 18/2
b) 18/3
c) 18/4
d) 18/5
e) 18/6

10. Calcule la proyección de *b* sobre *a* con *a* = (4, 2) y *b*= (11, 0)

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

TEMA 3. TRANSFORMACIONES LINEALES

Objetivo particular

El alumno aplicará el concepto de transformación lineal y sus propiedades, para utilizarlas en diferentes operaciones que le ayuden a resolver problemas de la vida real.

Temario detallado

3.1 Definición y ejemplos
3.2 Propiedades: imagen y Kernel
3.3 Representación matricial de una transformación lineal
3.4 Isomorfismos

Introducción

En la vida actual es muy importante resolver problemas utilizando las matemáticas.

Cuando se trabaja con espacios vectoriales surgen situaciones en las cuales es de utilidad usar las transformaciones lineales para la solución de problemas, una parte importante es la representación matricial de una transformación lineal.

A continuación se tiene una simbología utilizada que se utilizara en las transformaciones lineales:

Una letra minúscula a,b,…… representa un vector

Una letra mayúscula A,B, ….. un espacio vectorial y también subespacios vectoriales

Vectores entre llaves { a,b,…. } una base generadora

Representa una transformación lineal con su dominio y contradominio $T: V \rightarrow W$

Representa la dimensión de un espacio vectorial   dim(V)

3.1 Definición y ejemplos

Definimos una **transformación lineal** T de un espacio vectorial R sobre un espacio vectorial S a una función que asigna a cada vector $r \in R$ un único vector. Es decir, si R y S son espacios vectoriales una función $T: R \rightarrow S$ recibe el nombre de transformación.

Ejemplo:

Definamos la función $T: R^3 \rightarrow R^2$ definida bajo la regla T(***x, y, z***) = (***x, y***) así se tiene que:

S sustituye la ***x*** por el 8 y la ***y*** por el 5.

T (8, 5, 9) = (8,5)

Ejemplo2:

Sea $T: R^3 \rightarrow R^2$ definida por:

Del lado de la derecha de la igualdad, primero se sustituye la z por 2 y enseguida la z multiplicada por 2.

T (x, y, z) = (z, 2z), entonces cualquier transformación sería:

(2, 1, 4) = (4, 8)

Una transformación es lineal si cumple:

i. $T(v1 + v2) = T(v1) + T(v2)$

ii. $T(\alpha v1) = \alpha T(v1)$

Propiedades de las transformaciones lineales.

- Si $T: R \rightarrow S$ es una transformación lineal, entonces, $T(0) = 0$

- Sea T: R $\rightarrow$ S una transformación lineal. Si C = $\{$r1, r2, … , rn$\}$ es una base de R, entonces el conjunto G = $\{$T(r1), T(r2), … , T(rn) $\}$ es un generador.

3.2 Propiedades: imagen y Kernel

Propiedades de las transformaciones lineales: imagen y núcleo.

Consideremos en primer lugar a la transformación de R^3 en R^2, definida por:

S (x, y, z) = (y, 3y)

La imagen de cualquier vector bajo esta transformación es una pareja ordenada cuya segunda coordenada es el triple de la primera.

Al conjunto de todos esos vectores se le conoce como "**imagen**" de la transformación S.

Una vez definida la imagen de una transformación, nos introduciremos a la definición de núcleo.

Se llama **núcleo** de una transformación al conjunto de vectores cuya imagen es el vector cero.

3.3 Representación matricial de una transformación lineal

La representación matricial de una transformación lineal nos indica la relación existente entre ambas para que una transformación lineal encontrar su representación matricial.

Consideremos la transformación T: R3 a R2 definida por

T(x, y, z) = (x+2y, 3x-z)

Tratemos de encontrar una matriz A tal que el producto de ésta por cualquier vector del dominio nos proporcione la imagen de dicho vector bajo la transformación T, es decir, una matriz A que cumpla,

Av = T(v)

Como v es un vector de R3 y T(v) es un vector de R2 la igualdad anterior sólo podrá lograrse mediante una matriz A de 2x3. En consecuencia, la matriz a tendrá la forma:

A = $\begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \end{bmatrix}$ y satisfacer la igualdad

$$\begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a221 & a22 & a23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & + & 2y \\ 3x & - & z \end{bmatrix}$$

Es decir,

a11x + a12y + a13z = x + 2y y a21 x + a22y + a23z = 3x - z

lo cual es válido para los valores

a11 = 1, a12 = 2, a13 = 0

a21 = 3, a22 = 0, a23 = -1

por lo que nuestra matriz A es de la forma:

A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

A esta matriz se le conoce como **matriz asociada a la transformación T**.

Una vez calculada nuestra matriz asociada, estudiemos las imágenes de los vectores de la base canónica, es decir,

R = $\{$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$\}$,

bajo la transformación T definida con anterioridad tenemos que:

T(1, 0, 0) = (1, 3)

T(0, 1, 0) = (2, 0)

T (0, 0, 1) = (0, -1),

Éstos elementos no son más que los vectores columna que integran la matriz asociada T, por lo cual, podemos concluir que, para obtener la matriz asociada a una transformación basta con calcular las imágenes de los vectores que integran la base canónica del dominio.

Para toda transformación lineal de Rn en Rm, existe una matriz a de mxn que cumple Tx = Ax para toda x $\in$ Rn.

Definición. Sea T: Rn $\rightarrow$ Rm una transformación lineal. Entonces existe una matriz única A de mxn tal que

Tx = Ax para toda x.

3.4 Isomorfismos

Para introducirnos en el estudio de los isomorfismos debemos tener claras algunas definiciones que se presentan a continuación.

Definición. Sea T: V$\rightarrow$ W una transformación lineal, se dice que T es uno a uno (notación 1 - 1) si ocurre:

Tv1 = Tv2 $\Rightarrow$ v1 = v2

es decir, si todo vector w en la imagen de T es de a lo sumo un vector en V.

Definición. Sea T: V $\rightarrow$ W una transformación lineal. Se dice que T es sobre, si para toda w $\in$ W existe al menos una v $\in$ V tal que Tv = w. Es decir, T es sobre:

si y solo si la imagen de T = W.

Para dejar aún más claros estos conceptos, tomemos en cuenta la siguiente definición.

Sea T: V$\rightarrow$ W una transformación lineal, supongamos que dimV = dimW = n, entonces

1. si T es 1 - 1, entonces T es sobre
2. si T es sobre, entonces T es 1 - 1.

Se dice que la transformación lineal T: V $\rightarrow$ W es un isomorfismo si T es 1 - 1 y es sobre dos espacios vectoriales V y W son isomorfos si existe un isomorfismo T de V sobre W. (notación V $\cong$ W).

Ejemplo:

Sea T: $R^3 \rightarrow$ P2 definida por $T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a+bx+cx^2$. Supongamos que $T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 = 0+0x+0x^2$. Entonces a = b = c = 0. Es decir, núcleo de T = 0 y t es 1 - 1.

Bibliografía del tema 3

FLOREY, Francis, *Fundamentos de Algebra Lineal y Aplicaciones*, México, Prentice-Hall, 1994, 416 pp.

FRIEDBERG, S. Algebra Lineal, México, PRENTICE-HALL, 1982, 543 páginas.

GROSMAN, Stanley Y. *Álgebra Lineal*, México, Mc Graw-Hill, 1996, 634 pp.

HOFFMAN, Kenneth y Kunze Ray. *Álgebra Lineal*, México, Prentice-Hall, 1994, 416 pp.

NOBLE, Ben y Daniel, James. *Álgebra Lineal Aplicada*, México, Prentice-Hall, 1994, 592 pp.

SOTO, Prieto M. J. y Vicente Córdoba J. L. *Álgebra Lineal*, México, Prentice-Hall, 1995, 301 pp.

BOUCHERON, Du, L.B. *Álgebra Lineal Interactiva*, México, Mc Graw-Hill, 1995, 431 pp.

GODINEZ, C., Héctor, F. y HERRERA, C. J. Abel, *Álgebra Lineal Teoría y Ejercicios*, México, UNAM, 1990, 405 PP.
LIPSCHUTZ, Seymour, *Álgebra Lineal*, Mèxico, Mc Graw-Hill, 1971, 336 pp.

Actividades de aprendizaje

A.3.1. Investiga en Internet al menos cinco páginas de Internet que contengan ejemplos de aplicación de las transformaciones lineales, e indique su dirección.

A.3.2. Resuelve los ejercicios impares de las páginas 92 y 95 del libro de Friedberg, S. Algebra Lineal, citado en la bibliografía

A.3.3. Resuelve los ejercicios pares de las páginas 92 y 95 del libro de Friedberg, S. Algebra Lineal, citado en la bibliografía

Cuestionario de autoevaluación

1. ¿Cuál es el concepto transformación lineal?
2. ¿Qué es un isomorfismo?
3. ¿Qué es el kernel de una transformación lineal?
4. ¿Qué es el núcleo de una transformación lineal?
5. Describe un ejemplo de una matriz que represente una transformación lineal.
6. Desarrolla un ejemplo de una transformación lineal y su correspondiente matriz.
7. Desarrolla un ejemplo del kernel de una transformación lineal.
8. Describe un ejemplo de un isomorfismo.
9. Desarrolla un ejemplo del núcleo de una transformación lineal.
10. Explica mediante un ejemplo la dimensión de una transformación lineal.

Examen de autoevaluación

1. Encuentra la solución de la siguiente transformación T(x,y,z)=(2x,y,z) si (1,2,3)

a) (2, 2, 3)
b) (1, 2,6)
c) (2, 0,1)
d) (1, 1,2)
e) (1, 1,3)

2. Encuentra la solución de la siguiente transformación T(x,y,z)=(x,y,3z) si (1,2,1)

a) (1, 1, 3)
b) (1, 2, 3)
c) (1, 2, 1)
d) (2, 2, 3)
e) (1, 1, 3)

3. Encuentra la solución de la siguiente transformación T(x,y,z)=2(x,y,3z) si (1,1,1)

a) (1, 1, 3)
b) (1, 2, 1)
c) (2, 2, 3)
d) (2, 2, 3)
e) (1, 1, 3)

4. Encuentra la solución de la siguiente transformación T(x,y,z)=2(x,y3z) si (1,2,1)

a) (2, 4, 6)
b) (1, 1, 3)
c) (1, 2, 1)
d) (2, 2, 3)
e) (1, 1, 3)

5. Encuentre la solución de la siguiente transformación T(x,y,z)=(x,y+z) si (1,2,1)

a) (1,3)
b) (1,1)
c) (2,3)
d) (1,3)
e) (1,3)

6. Encuentre la solución de la siguiente transformación T(x,y,z)=(x+z,z) si (1,2,1)

a) (1,3)
b) (3,1)
c) (1,1)
d) (2,3)
e) (3,3)

7. Encuentre la solución de la siguiente transformación T(x,y,z)= (x+2,y+z) si (1,2,1)

a) (3, 3)
b) (1, 3)
c) (1, 1)
d) (2, 3)
e) (3, 3)

8. Encuentre la solución de la siguiente transformación T(x,y)= (x+2,y) si (1,2)

a) (1, 3)
b) (1, 1)
c) (2, 3)
d) (3, 2)
e) (3, 3)

9. Encuentre la solución de la siguiente transformación T(x,y)= (x,2y) si (1,2)

a) (1, 4)
b) (1, 3)
c) (1, 1)
d) (2, 3)
e) (3, 3)

10. Encuentre la solución de la siguiente transformación T(x,y)= 3(x,2y) si (1,2)

a) (3,12)
b) (1,3)
c) (1,1)
d) (2,3)
e) (3,3)

TEMA 4. PRODUCTO INTERNO

Objetivo particular

El alumno utilizará los conceptos de producto interno, ortogonalidad y su aplicación en la solución de problemas utilizando las matemáticas.

Temario detallado

4.1 Ortogonalidad

4.2 Aplicaciones del producto interno

4.3 Transformaciones lineales

Introducción

Hoy en día la solución de problemas utilizando las matemáticas se realiza cada vez con más frecuencia. Por lo tanto el uso del concepto de producto interno y ortogonalidad para la solución de problemas, comprende una herramienta más eficiente para la solución de problemas reales.

4.1 Ortogonalidad

Empezamos por definir **ortogonalidad**, la cual se refiere a vectores perpendiculares y **ortonormal** se refiere a vectores perpendiculares y que tengan norma o longitud igual a uno.

- **Proceso de Gram-Schmidt**

El proceso de Gram-Schmidt es una metodología que utiliza gran parte de los conceptos vistos en los temas 1, 2 y 3 del Álgebra Lineal, que permite calcular una nueva base de vectores, a partir de los cuales es más fácil realizar cálculos sobre estos vectores.

El proceso de Gram-Schmidt nos sirve para obtener un conjunto de vectores que sea una base S de una base espacio vectorial V, tal que S sea ortonormal, es decir ortogonal y con una norma igual a uno. Sea V un espacio con producto interno y sea G=$\{$v1,...vn$\}$ un generador de V. El conjunto G0=$\{$w1,...wn$\}$ donde:

w1 = v1

wi=vi- $\sum_{k=1}^{i-1} \frac{(vi.wk)}{(wk.wk)}$ wk, para i=2,3,...,n

es un generador de V.

Observaciones

- Si G es una base de V entonces Go es una base ortogonal de V.
- Para obtener una base ortonormal a partir de una base ortogonal B=$\{$w1,..wr$\}$ bastará con multiplicar cada uno de los vectores (w_i con i=1,n), e B por el escalar $\frac{1}{\|wi\|}$

Una base ortonormal es un conjunto de vectores que forman una base, y estos son ortogonales con una norma igual a uno

Ejemplo:

Obtengamos una base ortonormal del espacio V generado por:

v1 = (1, 0, -1)

v2 = (-2, 1, 1)

v3 = (-1, 1, 0),

Primero obtendremos un generador ortogonal de dicho espacio, para ello hacemos

w1 = v1 = (1, 0, -1)

w2 = v2 - $\frac{v2.w1}{w1.w1}$ w1 = (-2, 1, 1) - $\frac{-3}{2}$ (1, 0, -1) = (2, 1, 1)

$\frac{-3}{2}$ (1, 0, -1)= (-2, 1, 1) –(-3/2,0,3/2)=(-2+3/2,1-0,1-3/2)=(-1/2,0,-1/2)=

1/-2(1,0,1)

w3=v3- $\frac{v3.w1}{w1.w1}$ w1 = (-1, 1, 0) - $\frac{-1}{2}$ (1, 0, -1) = -1,1, 0)+1/2(1,0.,1)=

(-1,1,0)+(1/2,0,1/2)=(-1+1/2,1+0,0+1/2)=(-1/2,1,1/2)

por lo tanto

Go = $\{(1, 0, -1), (\frac{-1}{2}, 0, \frac{-1}{2}), (\frac{-1}{2}, 1, \frac{1}{2})\}$

Es un generador ortogonal de V y el conjunto

4.2 Aplicaciones del producto interno

Producto interno de dos vectores

Supóngase para R^3 el producto interno entre dos vectores

a= $\begin{pmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \end{pmatrix}$ b= $\begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \end{pmatrix}$ es representado como a b y está dado por:

a.b=a1b1 + a2b2 + a3b3.

Generalizando:

a= $\begin{pmatrix} a1 \\ a2 \\ \vdots \\ an \end{pmatrix}$ b= $\begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ \vdots \\ bn \end{pmatrix}$

a.b= a1b1 + a2b2+ .... +anbn

El **producto interno** es llamado también producto punto o producto escalar. Se puede ver, que el producto interno entre dos vectores siempre tendrá como resultado un escalar, es decir, un número.

El producto interno frecuentemente se efectúa entre un vector renglón y un vector columna. Ejemplo:

c= (1, 2,4) d= $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c.d= 1(1)+2(2)+4(1) = 1 + 4 + 4 = 9

4.3 Transformaciones lineales

Definimos una **transformación lineal** T de R en S a la función que asigna a cada vector r $\in$ R un único vector Tr $\in$ S. Es decir, si R y S son espacios vectoriales una función T: R $\rightarrow$ S recibe el nombre de transformación.

Ejemplo:

Definamos la función T: $R^3 \rightarrow R^2$ definida bajo la regla T(x, y, z) = (x, y) así pues se tiene que:

S sustituye la x por el 8 y la y por el 5.

T (8, 4, 9) = (8, 4)

Ejemplo2:

Sea T: $R^3 \rightarrow R^2$ definida por:

Del lado de la derecha de la igualdad primero se sustituye la z por 2 y enseguida la z multiplicada por 2.

T (x, y, z) = (z, 2z), entonces cualquier transformación sería:

(2, 1, 4) = (4, 8)

Bibliografía del tema 4

FLOREY, Francis, *Fundamentos de Álgebra Lineal y Aplicaciones*, México, Prentice-Hall, 1994, 416 pp.

FRIEDBERG, S. Algebra Lineal, México, PRENTICE-HALL, 1982, 543 páginas.

GROSMAN, Stanley Y., *Álgebra Lineal*, México, Mc Graw-Hill, 1996, 634 pp.

HOFFMAN, Kenneth y KUNZE Ray, *Álgebra Lineal*, México, Prentice-Hall, 1994, 416 pp.

NOBLE, Ben y DANIEL, James, *Álgebra Lineal Aplicada*, México, Prentice-Hall, 1994, 592 pp.

SOTO, Prieto M. J. y Vicente Córdoba J. L. *Álgebra Lineal*, México, Prentice-Hall, 1995, 301 pp.

BOUCHERON, Du, L.B*. Álgebra Lineal Interactiva*, México, Mc Graw-Hill, 1995, 431 pp.

GODINEZ, C., Héctor, F. y HERRERA, C. J. Abel, *Álgebra Lineal Teoría y Ejercicios*, México, UNAM, 1990, 405 PP.

LIPSCHUTZ, Seymour, *Álgebra Lineal*, México, Mc Graw-Hill, 1971, 336 pp.

Actividades de aprendizaje

A.4.1. Investiga en Internet al menos cuatro páginas de Internet que contengan ejemplos de aplicación de las transformaciones lineales, e indique su dirección.

A.4.2. Investigue en Internet al menos cinco páginas de Internet que contengan ejemplos de aplicación de las determinantes e indique su dirección.

A.4.3. Resuelve los ejercicios pares de las páginas 385 y 389 del libro de Friedberg, S. Algebra Lineal.

A.4.4. Resuelve los ejercicios impares de las páginas 385 y 389 del libro de Friedberg, S. Algebra Lineal.

Cuestionario de autoevaluación

1. ¿Qué significa producto interno?
2. ¿Con qué otro nombre se conoce al producto interno?
3. ¿En qué consiste el proceso de Grand Smith?
4. ¿Qué se obtiene en el proceso de Grand Smith?
5. Da un ejemplo de vectores ortogonales de dos dimensiones.
6. Da un ejemplo de vectores ortogonales de tres dimensiones.
7. Da un ejemplo de vectores ortonormales de dos dimensiones.
8. Explica con un ejemplo de vectores ortonormales de tres
9. Explica el concepto de ortogonalidad.
10. Define el concepto de ortonormalidad.

Examen de autoevaluación

1. Encuentre el producto interno de los siguientes vectores i (1,2,3) y (2,2,3)

a) 14
b) 15
c) 16
d) 17
e) 18

2. Encuentre el producto interno de los siguientes vectores i (1,2,1) y (2,2,3)

a) 9
b) 10
c) 11
d) 12
e) 13

3. Encuentre el producto interno de los siguientes vectores i (1,2,3) y (1,1,0)

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 3

4. Indique el factor de normalidad para que los siguientes vectores sean normales (1,2,3) y (3,2,3)

a) .25
b) .5
c) .3
d) .2
e) .4

5. Indique el factor de normalidad para que los siguientes vectores sean normales (1, 2,0) y (5,2,3)

a) .45
b) .33
c) .25
d) .66
e) .11

6. Indique el factor de normalidad para que los siguientes vectores sean normales (1,2, 0) y (5,10,3)

a) .20
b) .25
c) .33
d) .50
e) .75

7. Obtener el vector que complemente con el siguiente vector (1,1,2) de tal manera k sean ortogonales

a) (-1,1,2)
b) (0,-1,-1)
c) (0,0,0)
d) (-2,3,0)
e) (-1,-3,3)

8. Encuentre la solución de (x,y) donde los vectores (x+2,y) y (1,2) son ortogonales.

a) (-2,0)
b) (0,0)
c) (-1,1)
d) (-2,2)
e) (1,-1)

9. Encuentre la solución de x y y donde los vectores (x+3,y+1) si (1,2) son ortogonales.

a) (1,-3)
b) (-3,-1)
c) (1,-1)
d) (-2,3)
e) (3,-3)

10. Encuentre la solución de x **y** y donde los vectores (x+1,y-2) si (1,1) son ortogonales.

a) (-1,2)
b) (-1,2)
c) (1,-1)
d) (2,-1)
e) (1,-2)

TEMA 5. MATRICES

Objetivo particular

El alumno utilizará el concepto de matriz y aplicará sus operaciones, como la suma, la multiplicación y otras, para resolver problemas que utilicen matrices.

Temario detallado

5.1 Operación con matrices

5.2 Inversa y transpuesta de una matriz cuadrada

Introducción

La introducción de las matrices al conocimiento matemático es una contribución que comparten tres grandes matemáticos: William R. Hamilton (1805-1865), James J. Sylvvester (1814-1897) y Arthur Cayley (1821-1895).

Hamilton utilizó las matrices en un artículo publicado en 1853 donde las consideró desde el punto de vista de las transformaciones lineales y analizó sus propiedades.

El término ‘matriz’ se utilizó por primera vez por Sylvester en 1850, para designar un arreglo rectangular de números a partir del cual se pueden formar determinantes, entendiendo por determinantes un número, mientras que la matriz es un conjunto ordenado de números.

Correspondió a Cayley (1821-1895) sentar definitivamente las bases de la teoría de matrices mediante un artículo “A Memoire on the Theory of Matrices”, así como el manejo de espacios de *n* dimensiones sobre matrices, vectores y espacios vectoriales ha desarrollado notablemente hasta convertirse una de las más extensas de las matemáticas.

5. Matrices

Una matriz es un conjunto de renglones o columnas ordenadas de mxn, donde m es el número de renglones y n el número de columnas.

$$\begin{bmatrix} a11 & a12 & \dots & a1n \\ a21 & a22 & \dots & a2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ am1 & am2 & \dots & amn \end{bmatrix}$$

Un arreglo horizontal es [a11 a12 ..... a1n] y un arreglo vertical es

$$\begin{bmatrix} a11 \\ a21 \\ : \\ am1 \end{bmatrix}.$$

5.1 Operación con matrices

Dentro de las primeras operaciones tenemos las elementales, las cuales se llevan a cabo sobre los renglones o columnas de una matriz.
Las operaciones que se pueden ejecutar son las siguientes:

- El intercambio de dos columnas o renglones de la matriz.
- La multiplicación de cualquier renglón o columna de la matriz por un valor constante diferente de cero.
- La suma de cualquier múltiplo constante de un renglón o columna de la matriz otro renglón o columna de la misma matriz.
- Otras de las operaciones de matrices, son la suma, resta, multiplicación por un escalar y multiplicación de matrices.
- Suma de matrices

Supóngase que se tienen dos matrices A y B, entonces la suma de ellas se representa por A + B:

La adición se lleva a cabo sumando cada uno de los elementos de su misma posición, de ambas matrices, y colocando el resultado en la matriz resultante y en la misma posición de los elementos sumados.

Sean A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} a11 & a12 & \dots & a1n \\ a21 & a22 & \dots & a2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ am1 & am2 & \dots & amn \end{bmatrix}$$

y

$$B = \begin{bmatrix} b11 & b12 & \dots & b1n \\ b21 & b22 & \dots & b2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ bm1 & bm2 & \dots & bmn \end{bmatrix}$$

La suma estará representada por:

$$A + B = \begin{bmatrix} a11 & a12 & \dots & a1n \\ a21 & a22 & \dots & a2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ am1 & am2 & \dots & amn \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b11 & b12 & \dots & b1n \\ b21 & b22 & \dots & b2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ bm1 & bm2 & \dots & bmn \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a11+b11 & a12+b12 & \dots & a1n+b1n \\ a21+b21 & a22+b22 & \dots & a2n+b2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ am1+bm1 & am2+bm2 & \dots & amn+bmn \end{bmatrix}$$

Ejemplo del cálculo de la suma de las matrices A y B:

Tenemos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

y $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix}$

Resta de matrices

Supóngase B, entonces la resta de matrices está representada por A-B.

Y la sustracción se lleva a cabo restando a cada uno de los elementos de la matriz A, cada uno de los elementos de la matriz B de su misma posición de ambas matrices y colocando el resultado en la matriz resultante y en la misma posición de los elementos restados.

Sean A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} a11 & a12 & \dots & a1n \\ a21 & a22 & \dots & a2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ am1 & am2 & \dots & amn \end{bmatrix}$$

Y

$$B = \begin{bmatrix} b11 & b12 & \dots & b1n \\ b21 & b22 & \dots & b2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ bm1 & bm2 & \dots & bmn \end{bmatrix}$$

La resta 3e realiza de la siguiente manera:

$$A - B = \begin{bmatrix} a11 & a12 & \dots & a1n \\ a21 & a22 & \dots & a2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ am1 & am2 & \dots & amn \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b11 & b12 & \dots & b1n \\ b21 & b22 & \dots & b2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ bm1 & bm2 & \dots & bmn \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a11 - b11 & a12 - b12 & \dots & a1n - b1n \\ a21 - b21 & a22 - b22 & \dots & a2n - b2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ am1 - bm1 & am2 - bm2 & \dots & amn - bmn \end{bmatrix}$$

Ejemplo del cálculo la resta de las matrices A y B siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Y

La resta es igual a la Multiplicación por un escalar. Supóngase que se tiene una matriz A y un escalar k constante, entonces, la multiplicación de una matriz por un escalar se representa con kA. La multiplicación se lleva a cabo multiplicando cada uno de los elementos de la matriz por el escalar y el resultado se pone en la misma posición de la matriz resultante.

Sean A una matriz y k un escalar, entonces el producto escalar de la matriz sería:

$$A = \begin{bmatrix} a11 & a12 & \dots & a1n \\ a21 & a22 & \dots & a2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ am1 & am2 & \dots & amn \end{bmatrix}$$

Y k el escalar.

La multiplicación por un escalar se realiza de la siguiente manera:

$$kA = \begin{bmatrix} ka11 & ka12 & \dots & ka1n \\ ka21 & ka22 & \dots & ka2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ kam1 & kam2 & \dots & kamn \end{bmatrix}$$

Ejemplo del cálculo de la resta de las matrices A y B es el siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Y el escalar 4.

$$4A = \begin{bmatrix} 4(1) & 4(1) & 4(1) \\ 4(3) & 4(1) & 4(2) \\ 4(1) & 4(1) & 4(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 12 & 4 & 8 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Multiplicación de matrices

Supóngase que se tienen dos matrices A y B, para poder realizar la multiplicación de estas dos matrices primero se debe comprobar que el número de columnas de la matriz A sea igual al número de renglones de la matriz B.

Suponiendo que se tiene una matriz A con n renglones y m columnas entonces la matriz B deberá tener m renglones y el número de columnas puede variar digamos k, entonces la matriz resultante será una matriz con n renglones y k columnas.

Sean A una matriz de nxm y B una matriz de mxk

$$A = \begin{bmatrix} a11 & a12 & ... & a1m \\ a21 & a22 & ... & a2m \\ ... & ... & ... & ... \\ an1 & an2 & ... & anm \end{bmatrix}$$

Y

$$B = \begin{bmatrix} b11 & b12 & ... & b1k \\ b21 & b22 & ... & b2k \\ ... & ... & ... & ... \\ bm1 & bm2 & ... & bmk \end{bmatrix}$$

La multiplicación de A por B se realiza de la siguiente manera:

$$AxB = \begin{bmatrix} a11 & a12 & ... & a1m \\ a21 & a22 & ... & a2m \\ ... & ... & ... & ... \\ an1 & an2 & ... & anm \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} b11 & b12 & ... & b1k \\ b21 & b22 & ... & b2k \\ ... & ... & ... & ... \\ bm1 & bm2 & ... & bmk \end{bmatrix} =$$

A

$$AxB = \begin{bmatrix} a11(b11) + a12(b21) + ... + a1m(bm1) & .... & ... & a11(b1k) + a12(b2k) + ... + a1m(mk) \\ a21(b11) + a22(b21) + ... + a2m(bm1) & . & ... & a21(b1k) + a22(b2k) + ... + a2m(bmk) \\ ... & ... & ... & ... \\ an1(b11) + an2(b21) + ... + anm(bm1) & ... & ... & an1(1k) + an2(b2k) + ... + anm(bmk) \end{bmatrix}$$

Ejemplo del cálculo de la multiplicación de las matrices A y B que se muestran a continuación:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

y

$$B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

La multiplicación se realiza de la siguiente manera:

$$AxB=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}x\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1(2)+1(2)+1(0) & 1(1)+1(1)+1(1) & 1(2)+1(2)+1(1)\\ 3(2)+1(2)+2(0) & 3(1)+1(1)+2(1) & 3(2)+1(2)+2(1)\\ 1(2)+1(2)+1(0) & 1(1)+1(1)+1(1) & 1(2)+1(2)+1(1)\end{bmatrix}$$

5

$$AxB=\begin{bmatrix}2+2+0 & 1+1+1 & 2+2+1\\ 6+2+0 & 3+1+2 & 6+2+2\\ 2+2+0 & 1+1+1 & 2+2+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 3 & 5\\ 8 & 6 & 10\\ 4 & 3 & 5\end{bmatrix}\text{M}$$

5.2 Inversa y transpuesta de una matriz cuadrada

La matriz inversa es de suma importancia en el Álgebra Lineal y su aplicación en el área administrativa.

Para el cálculo de la inversa se hará utilizando el método de Gauss-Jordan.

Este método requiere de los siguientes procesos para su obtención:

- Encontrar en el extremo izquierdo de la matriz, la columna que no esté integrada de únicamente ceros.
- De ser necesario, se intercambiará el renglón superior con otro cualquiera, con el propósito de que el elemento localizado cumpla con la condición del paso anterior.
- Si el elemento diferente de cero, encontrado en el proceso 1, es un valor

cualquiera a, entonces se deberá multiplicar todo ese renglón por 1/a a efecto de que el primer elemento tome un valor de uno.

- A continuación se suma o resta, múltiplos apropiados del primer renglón a los demás renglones de tal manera que la columna encontrada en el proceso 1, todos los elementos por abajo del primer uno tengan un valor de cero.
- Descartar por el momento al primer renglón, y volver a aplicar el proceso inicial a la submatriz obtenida, iniciando con el proceso 1, hasta obtener una matriz unitaria.
- Empezando por el último renglón, se avanza hacia arriba, sumando múltiplos apropiados de cada renglón a los renglones que están arriba de ella, de tal manera que se cumpla la condición estipulada en el proceso 4, hasta obtener la forma reducida escalonada.[2]

Ejemplo de la obtención de la inversa de una matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Inicio del cálculo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como el valor del renglón uno columna uno es 1, se cumple con esa parte.

El siguiente paso sería hacer cero el tres del segundo renglón y el uno del 3er renglón, ambos de la primera columna.

Para hacer cero el tres, multiplicamos por -2 el primer renglón de la matriz del lado derecho anterior y lo sumamos al segundo renglón de la misma matriz

Para hacer cero el uno, multiplicamos por -1 el primer renglón de la matriz del lado derecho anterior y lo sumamos al tercer renglón de la misma matriz

Todos los cálculos realizados anteriormente se aplican a la matriz del lado izquierdo anterior.

[2] Véase, O. Pineda, (1998), *Álgebra Lineal: Un Enfoque Económico y Administrativo*, México, IPN.

Quedando así:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{A}$$

Como el valor del renglón dos y columna dos es -1 y debe ser 1 se multiplica por -1.

Quedando como sigue:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como el valor del renglón dos y columna dos es uno, enseguida hay que hacer el uno del renglón uno y columna dos y -1 del renglón tres y columna dos.

El siguiente paso sería hacer cero el uno del primer renglón de la columna dos, para ello al renglón uno se le resta el renglón dos de la matriz anterior.

Para hacer cero el -1 del renolón tres y columna dos, sumamos renglón uno y el tres de la matriz anterior.

Todos los cálculos realizados anteriormente se aplican a la matriz del lado izquierdo anterior.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como el valor del renglón tres columna tres es dos, hay que hacerlo primero uno, para ello multiplicamos ese renglón por 1 ó 2.

Todos los cálculos realizados anteriormente se aplican a la matriz del lado izquierdo anterior.

Quedando así:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Como el valor del renglón tres de la columna tres es uno, se cumple con esa parte.

El siguiente paso sería hacer cero el uno negativo del renglón uno y columna tres y el dos del renglón dos y columna tres de la matriz derecha anterior.

Para hacer cero el -1, al renglón uno le restamos el renglón tres de la matriz anterior.

Para hacer cero el dos, multiplicamos por -2 el tercer renglón de la matriz del lado derecho anterior y lo sumamos al primer renglón de la misma matriz.

Todos los cálculos realizados anteriormente se aplican a la matriz del lado izquierdo anterior.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.5 & .5 & .5 \\ 1 & 0 & -1 \\ .5 & -.5 & .5 \end{bmatrix} \text{U}$$

Donde la matriz inversa es:

$$\begin{bmatrix} -1.5 & .5 & .5 \\ 1 & 0 & -1 \\ .5 & -.5 & .5 \end{bmatrix}$$

1 Matriz Transpuesta

La matriz transpuesta está dada por una matriz en la cual se intercambian los renglones por columnasl dando como resultado la matriz transpuesta.

$$A = \begin{bmatrix} a11 & a12 & ... & a1m \\ a21 & a22 & ... & a2m \\ ... & ... & ... & ... \\ an1 & an2 & ... & anm \end{bmatrix} \text{M}$$

Su transpuesta es:

$$\begin{bmatrix} a11 & a12 & ... & a1n \\ a21 & a22 & ... & a2n \\ ... & ... & ... & ... \\ am1 & am2 & ... & amn \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Obtención de la matriz transpuesta de A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La transpuesta es.

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Bibliografía del tema 5

FLOREY, Francis, *Fundamentos de Álgebra Lineal y Aplicaciones*, México, Prentice-Hall, 1994, 416 pp.

FRIEDBERG, S. Algebra Lineal, México, PRENTICE-HALL, 1982, 543 páginas.

GROSMAN, Stanley Y., *Álgebra Lineal*, México, Mc Graw-Hill, 1996, 634 pp.

HOFFMAN, Kenneth y Kun:e Ray, *Álgebra Lineal*, México, Prentice Hall, 1994, 416 pp.

NOBLE, Be. y DANIEL, James, *Álgebra Lineal Aplicada*, México, Prentice-Hall, 1994, 592 pp.

SOTO, Prieto M. J. y Vicente Córdoba J. L. *Álgebra Lineal*, México Prentice-Hall, 1995, 301 pp.

Du BOUCHERON, L.B., *Álgebra Lineal Interactiva*, México, Mc Graw-Hill, 1995, 431 pp.

GODINEZ, C., Héctor, F. y Herrera, C. J. Abel, *Álgebra Lineal Teoría y Ejercicios*, México, UNAM, 1990, 405 PP.

LIPSCHUTZ, Seymour, *Álgebra Lineal*, México, Mc Graw-Hill, 1971, 336 pp.

Actividades de aprendizaje

A.5.1. Investiga en Internet al menos seis páginas de Internet que contengan ejemplos de aplicación de las transformaciones lineales, e indique su dirección.

A.5.2. Resolver los ejercicios pares de las páginas 108 y 111 del libro de Friedberg, Algebra Lineal.

A.5.3. Resolver los ejercicios impares de las páginas 108 y 111 del libro de Friedberg, Algebra Lineal.

Cuestionario de autoevaluación

1. ¿Qué significado tiene el concepto matriz?
2. ¿Qué es una matriz transpuesta?
3. Da un ejemplo de una matriz transpuesta de 3x3.
4. Da un ejemplo de una matriz transpuesta de 4x4.
5. ¿Cómo se lleva a cabo la suma de matrices?
6. ¿Cómo se lleva a cabo la resta de matrices?
7. ¿Cómo se lleva a cabo la multiplicación por un escalar de una matriz?
8. ¿Cómo se lleva a cabo la multiplicación de dos matrices?
9. ¿Cuáles son las características que deben tener las matrices a multiplicar?
10. ¿Cuántos renglones y columnas tiene el resultado de multiplicar dos matrices?

Examen de autoevaluación

Indica si las siguientes aseveraciones son verdaderas (V) o falsas (F)

1. Indica si la siguiente matriz C es la suma de las matrices A y B.

$$\textbf{A=}\begin{bmatrix} 2 & 4 & -7 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad \textbf{B=}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \textbf{C=}\begin{bmatrix} 3 & 6 & -6 \\ 0 & -4 & -4 \\ -1 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

a) verdadero
b) falso

Indica si la siguiente matriz C es la suma de las matrices A y B.

$$\text{A=}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{B=}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{c\}}\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

a) verdadero
b) falso

2. Indica si la siguiente matriz C es la resta de las matrices A y B

A= $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -7 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ **B=** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ **C=** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & -3 & -3 \\ -3 & -4 & 4 \end{bmatrix}$

a) verdadero
b) falso

3. Indica si la siguiente matriz C es la suma de las matrices A y B

A= $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ **`B=** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ **C=** $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

a) verdadero
b) falso

4. Indica si la siguiente matriz C es la multiplicación de las matrices A y B

A= $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ **B=** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ **C=** $\begin{bmatrix} 3 & 10 & 9 \\ 2 & 5 & 4 \\ 8 & 16 & 18 \end{bmatrix}$

a) verdadero
b) falso

5. Indica si la siguiente matriz C es la multiplicación de las matrices A y B

A= $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **B=** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **C=** $\begin{bmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$

a) verdadero
b) falso

6. Indica si la siguiente matriz C es la multiplicación por un escalar 3 de la matriz A

A= $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ **c=** $\begin{bmatrix} 3 & 12 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 12 & 18 \end{bmatrix}$

a) verdadero
b) falso-

7. Indica si la siguiente matriz C es la multiplicación por un escalar 2 de la matriz A

A= $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

a) verdadero
b) falso

8. Indica si la siguiente matriz C es la matriz transpuesta de la A

A= $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ **C=** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

a) verdadero
b) falso

TEMA 6. DETERMINANTES

Objetivo particular

El alumno describirá las definiciones y propiedades que se utilizan en las determinantes, realizando los cálculos necesarios para la obtención de las mismas a través de la regla de Kramer para la obtención de los eigenvalores y los eigenvectores

Temario detallado

6.1 Definiciones y propiedades
6.2 Regla de Kramer
6.3 Eigenvalores, eigenvectores

Introducción

Hoy en día la tecnología avanza rápidamente y por este motivo se requieren de modelos más complhttp://www.monografias.com/trabajos21/deterioro-valor-activos/deterioro-valor-activos.shtmlejos para la solución de problemas utilizando las matemáticas y en particular las determinantes, eingevalores y eingevectores.

6.1 Definiciones y propiedades

Sea A una matriz cuadrada, la determinante de una matriz cuadrada es un valor constante que se calcula con todos los elementos de la matriz, y se utilizara la regla de Sarrus.

$$A = \begin{bmatrix} a11 & a12 & \dots & a1n \\ a21 & a22 & \dots & a2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ an1 & a2n & \dots & ann \end{bmatrix}$$

La determinante de la matriz anterior está representada por det(A) o también |A|.

$$|A| = \det(A) = \begin{vmatrix} a11 & a12 & ... & a1n \\ a21 & a22 & ... & a2n \\ ... & ... & ... & ... \\ an1 & an2 & ... & ann \end{vmatrix}$$

Propiedades:

Si todos los elementos de un renglón (o columna) de una matriz cuadrada se descomponen en dos sumandos, entonces su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en ese mismo renglón los primeros y segundos sumandos, respectivamente, y en las demás los mismos elementos que la determinante inicial.

Si al multiplicar todos los elementos de un renglón de una matriz cuadrada cualquiera por un valor constante, la determinante será un múltiplo de dicho valor constante.

Si A y B son dos matrices cuadradas cualesquiera, entonces la determinante del producto de las matrices A y B es igual al producto de cada una de las determinantes.

Si se intercambian dos renglones paralelos de una matriz cuadrada, su determinante cambia de signo con respecto a la determinante original.

Una matriz cuadrada que tiene un renglón con todos los elementos iguales a cero, su determinante es igual a cero.

Una matriz cuadrada que tenga dos renglones paralelos iguales, su determinante es igual a cero.

Si dos renglones paralelos de una matriz cuadrada son proporcionales, su determinante es igual a cero.

Si un renglón o columna de una matriz cuadrada es una combinación lineal de los restantes renglones o columnas. Su determinante es igual a cero.

Si un renglón de una matriz cuadrada se le suma otra paralela, su determinante se mantiene igual.

Si a un renglón de una matriz cuadrada se le suma un múltiplo escalar de otro renglón paralelo, el valor de la determinante no cambia.

Para calcular la determinante de una matriz cuadrada utilizaremos la regla de Sarrus.[3]

Regla de Sarrus

Para su ejemplificación utilizaremos una matriz de orden 4, el cálculo para cualquier otra es igual, sólo se adapta el proceso para el orden establecido.

$$|A| = \det(A) = \begin{vmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21 & a22 & a23 & a24 \\ a31 & a32 & a33 & a34 \\ a41 & a42 & a43 & a44 \end{vmatrix}$$

A la determinante anterior se le aumentan 4-1 renglones, que son los primeros (en el caso general n-1).

[3] O, Pineda, (1998), *Álgebra Lineal: Un Enfoque Económico y Administrativo*, México, IPN, p. 135.

$$\begin{vmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21 & a22 & a23 & a24 \\ a31 & a32 & a33 & a34 \\ a41 & a42 & a43 & a44 \\ a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21 & a22 & a23 & a24 \\ a31 & a32 & a33 & a34 \end{vmatrix}$$

A partir de la determinante anterior se multiplican los elementos de la diagonal, empezando por los cuatro elementos de la izquierda.

$a11a22a33a44 + a21a32a43a14 + a31a42a13a24 + a41a12a23a34$ ……………...(1)

Enseguida se realiza el mismo proceso pero a partir de los cuatro elementos de la derecha, con la diagonal hacia la izquierda.

$a14a23a32a41 + a24a33a42a11 + z34a43a12a21 + a44a13a22a31$.......................(2)

A la resultante de (1) se le resta la resultante de dos (2) y con ese valor obtenemos la determinante.

Ejemplo:

$$|A| = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Det(A)= 1(1)(2)(1)+2(2)(2)1+1(1)(1)1+3(0)(1)1- (1(1)(2)3+1(2)(1)1+1(2)(0)2+1(1)(1)1)= 2+8+1+0- (6+2+0+1) =11-9= 2

6.2 Regla de Kramer

La regla de Kramer es un proceso que nos permite calcular la solución de un sistema de con n ecuaciones y con n incógnitas. AX=B

$$\begin{bmatrix} a11 & a12 & \ldots & a1n \\ a21 & a22 & \ldots & a2n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ an1 & a2n & \ldots & ann \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \\ b4 \end{bmatrix}$$

La regla de Kramer consiste en encontrar las soluciones para cada una de las variables:

$$x1 = \frac{|A1|}{|A|} \quad , \quad x2 = \frac{|A2|}{|A|} \quad , \ldots\ldots\ldots\ldots, \quad xn \quad = \quad \frac{|An|}{|A|}$$

Donde |A| es la determinante del sistema.

Y |A1| es el cofactor 1 de la matriz A.

Y en general |Ai| es el cofactor i-esimo de la matriz A (i=1,n)

Donde |Ai| se obtiene sustituyendo la matriz de coeficientes B en la i-esima columna, dependiendo del cofactor que se esté calculando.

$$|A| = \det(Ai) = \begin{vmatrix} a11 & b1 & \ldots & a1n \\ a21 & b2 & \ldots & a2n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ an1 & bn & \ldots & ann \end{vmatrix}$$

Las determinantes se calculan con la regla de Sarrus, vista en el punto 5,1.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Primero calculamos la determinante del sistema.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(1)1 + 2(1)1 + 1(2)1 - [1(1)1 + 1(1)1 + 1(2)(2)] = 1 + 2 + 2 - [1 + 1 + 4] = 5 - 6 = -1$$

$$\det(A1) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(1)1 + 4(1)1 + 6(2)1 - [1(1)6 + 1(1)2 + 1(2)(4)] = 2 + 4 + 12 - [6 + 2 + 8] = 18 - 16 = 2$$

$$\det(A2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 1(4)1 + 2(6)1 + 1(2)1 - [1(4)1 + 1(6)1 + 1(2)(2)] = 4 + 12 + 2 - [4 + 6 + 4] = 18 - 14 = 4$$

$$\det(A3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 1(1)6 + 2(1)2 + 1(2)4 - [2(1)1 + 4(1)1 + 6(2)(2)] = 6 + 4 + 8 - [2 + 4 + 24] = 18 - 30 = -12$$

Las soluciones son:

$x1 = \dfrac{2}{-1} = -2$, $x2 = \dfrac{4}{-1} = -4$ y $x3 = \dfrac{-12}{-1} = 12$

6.3 Eigenvalores, eigenvectores

Eingenvalores

Los eigenvalores son valores que se restan a la diagonal de una matriz, para que su valor sea igual a cero.

Si tenemos una matriz A:

$$A=\begin{bmatrix} a11 & a12 & ... & a1n \\ a21 & a22 & ... & a2n \\ ... & ... & ... & ... \\ an1 & a2n & ... & ann \end{bmatrix}$$

Entonces su determinante será:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a11 & a12 & ... & a1n \\ a21 & a22 & ... & a2n \\ ... & ... & ... & ... \\ an1 & a2n & ... & ann \end{vmatrix}$$

Para obtener los eigenvalores k1, k2,…., kn hacemos lo siguiente:

$$\begin{vmatrix} a11-k1 & a12 & ... & a1n \\ a21 & a22-k2 & ... & a2n \\ ... & ... & ... & ... \\ an1 & a2n & ... & ann-kn \end{vmatrix}=0$$

Donde k1, k2,….., kn son los eigenvalores.

Ejemplo: Calcular los eigenvalores de la siguiente matriz A

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-k & 1 \\ 1 & 2-k \end{bmatrix}=0$$

Y la determinante nos da,

=(1-k)(2-k)-1=0

$=1-2k+k^2-1=-2k+k^2=k(k-2)=0$

De aquí obtenemos dos eigenvalores cero y dos.

Eigenvectores

Un eigenvector es un vector asociado a una matriz, el cual se obtiene con la ayuda de los eigenvalores.

Es decir que para su cálculo, primero hay que considerar los eigenvalores de la matriz.

Para la obtención de los eigenvectores se tienen que encontrar los valores para el siguiente vector:

$$\begin{bmatrix} a1 & a2 & \ldots & an \end{bmatrix}$$

De tal manera que se dé la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} a11-k & a12 & \ldots & a1n \\ a21 & a22-k & \ldots & a2n \\ .. & \ldots & \ldots & \ldots \\ an1 & an2 & \ldots & ann-k \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \\ a4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \\ a4 \end{bmatrix}$$

Donde a1,a2, ……, an son valores constantes cualesquiera.

Ejemplo. Calcular los eigenvectores de la matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Primero obtenemos los eigenvalores.

$$\begin{bmatrix} 1-k & 1 \\ 1 & 2-k \end{bmatrix} = 0$$

Y la determinante nos da.

=(1-k)(2-k)-1=0

$=1-2k+k^2-1=-2k+k^2=k(k-2)=0$
A

De aquí obtenemos dos eigenvalores cero y dos.

Para obtener los eigenvectores.

$$\begin{bmatrix} 1-k & 1 \\ 1 & 2-k \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} a1 \\ a2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a1 \\ a2 \end{bmatrix}$$

Tenemos que para k=0

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} a1 \\ a2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a1 + a2 \\ a1 + 2a2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a1 \\ a2 \end{bmatrix}$$

Esto implica que a1+a2=a1 implica que a2=a1-a1=0, o sea, a2=0

Sustituyendo en a1+2 a2=a2 nos da que a1+2(0)=0 y por lo tanto a1=0

Y tenemos un vector (0,0) o solución trivial.

Para k=2 tenemos que:

Tenemos que para k=0

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} a1 \\ a2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a1 + a2 \\ a1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a1 \\ a2 \end{bmatrix}$$

Esto implica que -a1+a2=a1; implica que a2=a1+a1=2 a1 o sea a2= 2 a1

Sustituyendo en a1=a2

Para que ambas se cumplan a2= 2 a1 y a1=a2 la solución debe ser la trivial

Por lo tanto la única solución que tiene es la trivial que es el eigenvector (0,0).

Bibliografía del tema 6

1. FLOREY, Francis, *Fundamentos de Álgebra Lineal y Aplicaciones*, México, Prentice-Hall, 1994, 416 pp.
2. FRIEDBERG, S. Algebra Lineal, México, PRENTICE-HALL, 1982, 543 páginas.
3. GROSMAN, Stanley Y., *Álgebra Lineal*, Mèxico, Mc Graw-Hill, 1996, 634 pp.
4. HOFFMAN, Kenneth y KUNZE Ray, *Álgebra Lineal*, México, Prentice-Hall, 1994, 416 pp.
5. NOBLE, Ben y DANIEL, James, *Álgebra Lineal Aplicada*, México, Prentice-Hall, 1994, 592 pp.
6. SOTO, Prieto M. J. y Vicente Córdoba J. L. *Álgebra Lineal*, México, Prentice-Hall, 1995, 301 pp.
7. BOUCHERON, Du, L.B. *Álgebra Lineal Interactiva*, México, Mc Graw-Hill, 1995, 431 pp.

8. GODINEZ, C., Héctor, F. y HERRERA, C. J. Abel, *Álgebra Lineal Teoría y Ejercicios*, México, UNAM, 1990, 405 PP.
9. LIPSCHUTZ, Seymour, Á*lgebra Lineal*, México, Mc Graw-Hill, 1971, 336 pp.
10. SWOKOWSKI, Earl. *Matrices y determinantes*. Grupo editorial iberoamérica, México, 1986.

Actividades de aprendizaje

A.6.1.Resuelve los ejercicios impares de las páginas 194 y 196 del libro de Friedberg,. Algebra Lineal.

A.6.2. Resuelve los ejercicios pares de las páginas 194 y 196 del libro de Friedberg,. Algebra Lineal.

A.6.3. Investiga en Internet al menos cinco páginas de Internet que contengan ejemplos de aplicación de las determinantes, e indique su dirección.

Cuestionario de autoevaluación

1. ¿Qué significado tiene la palabra 'determinante'?
2. ¿Cuáles son las propiedades de una determinante?
3. Desarrolla un ejemplo de una determinante igual a cero.
4. Desarrolla un ejemplo de una determinante mayor a cero.
5. Desarrolla un ejemplo de una determinante menor a cero.
6. Explica como se lleva el cálculo de una determinante por el método de Sarrus.
7. Da un ejemplo de una eingevalor a partir de una matriz de 2x2.
8. Da un ejemplo de una eingevalor a partir de una matriz de 3x3.
9. Da un ejemplo de una eingevector a partir de una matriz de 2x2.
10. Da un ejemplo de una eingevector a partir de una matriz de 3x3.

Examen de autoevaluación

1. Calcula la determinante si la siguiente matriz A es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) -3
b) -2
c) -1
d) 0
e) 1

2. Calcula la determinante si la siguiente matriz A es:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) -3
b) -2
c) -1
d) 0
e) 1

3. Calcula la determinante si la siguiente matriz A es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) -2
b) -1
c) 0
d) 1
e) 2

4. Calcula la determinante si la siguiente matriz A es:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) -3
b) -2
c) -1
d) 0
e) 1

5 Calcula la solución del siguiente sistema de ecuaciones por la regla de Kramer.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) x1=2.5, x2=0 y x3=0
b) x1=2.5, x2=0 y x3=.5
c) x1=0, x2=0 y x3=2.5
d) x1=2.5, x2=2.5 y x3=0
e) x1=2.5, x2=0 y x3=2.5

6. Calcula la solución del siguiente sistema de ecuaciones por la regla de Kramer

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

a) x1=5.5, x2=-5.5 y x3=0
b) x1=-5.5, x2=0 y x3=5.5
c) x1=0, x2=5.50 y x3=5.5
d) x1=5.5, x2=-5.5 y x3=0
e) x1=0, x2=0 y x3=5.5

7. Encuentre *los eigenvalores de la siguiente matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) k=3, k=0

b) K=3, k=2

c) K=2, k=0

d) k=-3, k=2

e) k=3, k=-2

8. Encuentre *los eigenvalores de la siguiente matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

a) k=1, k=0

b) K=5, k=1

c) K=1, k=5

d) k=-5, k=1

e) k=5, k=-1

9. Encuentre *el eigenvector para la siguiente matriz A*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) (0,0)

b) (1,4)

c) (1,1)

d) (4,4)

e) (4,1)

10. Encuentre *la el eigenvector para la siguiente matriz A*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

a) (3,2)

b) (2,3)

c) (3,3)

d) (2,2)

e) (0,0)

TEMA 7. Practicas en el laboratorio de informática

Objetivo particular

El alumno utilizará los conceptos y propiedades de sistema de ecuaciones, vectores, transformación lineal, producto interno, matrices y determinantes para desarrollar modelos matemáticas con el uso de la hoja Excel y de esta manera resolver problemas de la vida real.

Temario detallado

7.1. Caso práctico sistema de ecuaciones
7.2. Caso práctico de vectores
7.3. Caso practico de transformación lineal
7.4. Caso practico de producto interno
7.5. Caso practico de matrices
7.6. Caso practico de determinantes

Introducción

En el desarrollo de este tema se muestran todos los conocimientos adquiridos durante el semestre y algunos otros de otras materias que en su conjunto, hacen que le alumno sea capaz de resolver problemas combinándolos con el uso de la computadora.

7.1. Caso práctico sistema de ecuaciones

Supóngase que el importe de una compra de cuatro refrescos chicos y cinco refrescos grandes es por $94.00, si se realiza una nueva compra por dos refrescos chicos y uno refresco grande y el importe de esta compre es por $26.00. ¿Cuales el precio del refresco chico y grande?

Para solucionar este ejercicio utilizaremos la hoja Excel

Paso 1. Escribamos en un renglón y celdas diferentes los valores del número de refrescos chicos en una celda y los grandes en la siguiente y después el valor del importe de esa compra.

	A	B	C	D	E
1					
2		4	5	94	
3					

Paso 2. En un segundo renglón los valores de la segunda compra de la misma manera que el primer renglón, es decir los valores del numero de refrescos chicos en una celda y los grandes en la siguiente y después el valor del importe de la segunda compra.

	A	B	C	D	E
3					
4		2	1	26	
5					

Paso 3. Transformamos el primer renglón multiplicándolo por el número de refrescos chicos adquiridos en la segunda compra.

	A	B	C
5			
6			
7		=B4*B2	
8			

	A	B	C	D
5				
6			=B4*C2	
7				

	A	B	C	D	E
5					
6				=B4*D2	
7					

Resultado

	A	B	C	D	E
5					
6		8	10	188	
7					

Paso 4. Transformamos el segundo renglón multiplicándolo por el número de refrescos chicos adquiridos en la primera compra.

	A	B	C
7			
8		=B2*B4	
9			

	A	B	C	D
7				
8			=B2*C4	
9				

	A	B	C	D	E
7					
8				=B2*D4	
9					

Resultado

	A	B	C	D	E
7					
8		8	4	104	
9					

Paso 5. De los dos renglones resultantes de los pasos 3 y 4, al renglón obtenido en el paso 3 se le resta el renglón obtenido en el paso 4. Aquí da como resultado en la celda correspondiente a los refrescos chicos el valor de cero y en las otras celdas no necesariamente un valor igual a cero.

	A	B	C
9			
10		=B6-B8	
11			

	A	B	C	D
9				
10			=C6-C8	
11				

	A	B	C	D	E
9					
10				=D6-D8	
11					

Resultado

	A	B	C	D	E
9					
10		-	6	84	
11					

Paso 6. Del resultado obtenido en la diferencia del importe de las compras (obtenido en el paso 5), este se divide entre valor obtenido correspondiente a los refrescos grandes, este cociente representa el precio del refresco grande.

	A	B	C
11			
12		=D10/C10	
13			

Resultado

	A	B	C
11			
12		14	
13			

Paso 7. Para obtener el precio del refresco chico se multiplicara la celda que contiene el precio del refresco grande (celda paso 6) por el numero de refrescos comprados en la primera compra (celda del paso 1), el producto anterior se le resta al importe de la primera compra (celda paso 1) y la resultante de esta diferencia se divide entre el numero de refrescos chicos comprados en la primera compre (celda paso 1).

	A	B	C
13			
14		=B12*C2	
15			

Resultado

	A	B	C
13			
14		70	
15			

A la compra total se le resta el valor anterior

	A	B	C
15			
16		=D2-B14	
17			

Lo dividimos entre el número de refrescos chicos comprados la primera vez

	A	B	C
17			
18		=B16/B2	
19			

Resultado

	A	B	C
17			
18		6	
19			

Los valores obtenidos en los pasos sweis y siete son el resultado buscado en la presente práctica.

7.2. Caso práctico de vectores

Supóngase que el importe del ingreso de tres diferentes productos es de $4,000, $5,000 y $3,000 respectivamente y el importe del costo variable es de $1,000, $2,000 y $1,000 ¿calcular la utilidad por artículo?

Para solucionar este ejercicio utilizaremos la hoja Excel, y además consideraremos que los importes de los ingresos, costos y utilidad representan un vector cada uno de ellos.

Paso 1. Pon en un renglón y celdas diferentes los valores del importe de cada uno de los ingresos de cada de los productos.

	A	B	C	D	E
1					
2		4,000	5,000	3,000	
3					

Paso 2. En un renglón y celdas diferentes los valores del importe de cada uno de los costo de cada uno de los productos.

	A	B	C	D	E
3					
4		1,000	2,000	1,000	
5					

Paso 3. Realiza la resta de los ingresos y costos obteniendo de esta manera la utilidad de cada uno de los productos (se resta la celda del renglón del paso uno menos la del renglón del paso 2 y así sucesivamente).

	A	B	C
5			
6		=B2-B4	
7			

	A	B	C	D
5				
6			=C2-C4	
7				

	A	B	C	D	E
5					
6				=D2-D4	
7					

Resultado

	A	B	C	D	E
5					
6		3,000	3,000	2,000	
7					

El vector anterior es la respuesta solicitada que nos muestra las utilidades de cada producto.

7.3. Caso practico de transformación lineal

Supóngase que una empresa tiene su centro de distribución de uno de sus artículos en el estado de México y para distribuirlo a toda la republica tiene cuatro bodegas distribuidas para la mejor eficiencia, la empresa divide en cuatro zonas diferentes zona sur-este, sur-oeste, nor-este y nor-oeste, si el porcentaje de acuerdo a la demanda de cada zona es la siguiente 11%, 26%, 35% y 28% respectivamente. ¿Cual es la cantidad que se deberá enviar a cada zona si la planta produce 100,000 unidades mensuales de dicho artículo?

Para solucionar este ejercicio utilizaremos la hoja Excel, y además consideraremos que los porcentajes de cada una de las zonas forman una matriz.

Paso 1. Primero escribe en un renglón y una celda la cantidad de unidades que produce la empresa en un mes, en este caso 100,000 unidades.

	A	B	C
1			
2		100,000	
3			

Paso 2. En un renglón y celdas diferentes los valores de los porcentajes de la zona sur-este y sur-oeste respectivamente.

	A	B	C	D
3				
4		0.11	0.26	
5				

Paso 3. En un renglón y celdas diferentes los valores de los porcentajes de la zona nor-este y nor-oeste respectivamente.

	A	B	C	D
5				
6		0.35	0.28	
7				

Paso 4. En un renglón y celdas diferentes los valores de los porcentajes de la zona sur-este y sur-oeste respectivamente multiplicados por la celda del paso numero uno.

	A	B	C
7			
8		=B2*B4	
9			

	A	B	C	D
7				
8			=B2*C4	
9				

En conjunto tenemos

	A	B	C	D
7				
8		11,000	26,000	
9				

Paso 5. Colocamos en otro renglón y celdas diferentes los valores de los porcentajes de la zona nor-este y nor-oeste respectivamente multiplicados por la celda del paso numero uno.

	A	B	C
9			
10		=B2*B6	
11			

	A	B	C	D
9				
10			=B2*C6	
11				

En conjunto tenemos

	A	B	C	D
9				
10		35,000	28,000	
11				

Los renglones resultantes de de los pasos cuatro y cinco forman la matriz resultante de la transformación lineal

	A	B	C	D
8		11,000	26,000	
9				
10		35,000	28,000	
11				

La matriz anterior es la respuesta solicitada que nos muestra las cantidades demandadas por zona.

7.4. Caso practico de producto interno

Supóngase que una empresa requiere para la fabricación de uno de sus artículos tres diferentes metales (cobre, plata, oro), si las cantidades requeridas son las siguientes en kg, 2.4, 1.8 y .2 respectivamente y el precio en kg de cada uno de los metales es de \$18, \$160, \$9.800. ¿Calcular la utilidad por articulo?

Para solucionar este ejercicio utilizaremos la hoja Excel, y además consideraremos que las cantidades requeridas de fabricación y de precios de materiales representan un vector cada uno de ellos.

Paso 1. Primero escribe en un renglón y celdas diferentes las cantidades en kg de los diferentes metales se requieren para la fabricación de dicho articulo.

	A	B	C	D	E
1					
2		2.4	1.8	0.2	
3					

Paso 2. En un renglón y celdas diferentes los valores del precio por kg de cada uno de los metales.

	A	B	C	D	E
3					
4		18	160	9,800	
5					

Paso 3. Realiza la multiplicación de cada cantidad de metal por su precio y se coloca en un nuevo renglón (se multiplica cada celda del renglón del paso uno por la celda del renglón del paso 2 y así sucesivamente).

	A	B	C
5			
6		=B2*B4	
7			

	A	B	C	D
5				
6			=C2*C4	
7				

	A	B	C	D	E
5					
6				1960	
7					

Lo anterior nos da el siguiente vector

	A	B	C	D	E
5					
6		43.2	288	1960	
7					

Paso 4. Cada una de las celdas del renglón del paso tres se suman, dando como resultado el costo total del mencionado articulo.

	A	B	C
7			
8		=B6+C6+D6	
9			

El resultado es

	A	B	C
7			
8		2,291.20	
9			

La valor del paso cuatro es la respuesta solicitada que nos muestra el costo total del artículo en cuestión.

7.5. Caso practico de matrices

Supóngase que el una empresa desea saber el requerimiento mínimo de dos procesos deferentes que son indispensables para la fabricación de dos artículos diferentes. Considerando que el articulo numero uno requiere de un minuto en cada proceso y el articulo dos de uno y dos minutos respectivamente, si se requieren fabricar 1,000 unidades del articulo uno y 2,100 del dos. ¿Cuales son los requerimientos en minutos para cada proceso?

Para solucionar este ejercicio utilizaremos la hoja Excel.

Paso 1. Anota en un renglón y celdas diferentes los valores del numero de minutos requeridos por cada articulo en el proceso uno.

	A	B	C	D
1				
2		1	1	
3				

Paso 2. Escribe en un renglón y celdas diferentes los valores del numero de minutos requeridos por cada articulo en el proceso dos.

	A	B	C	D
3				
4		1	2	
5				

Paso 3. Después, en un renglón y celdas diferentes los valores del número de unidades a fabricar por cada artículo.

	A	B	C	D
5				
6		1,000	2,100	
7				

Paso 4. Multiplicamos los valores del renglón del paso tres por el renglón del

paso uno (celda por celda respectivamente se multiplican y después ambos resultados se suman siendo esta suma el resultado del numero de minutos requeridos en el proceso uno).

	A	B	C
7			
8			
9		=B2*B6	
10			

	A	B	C
7			
8			
9		1,000	
10			

	A	B	C	D
7				
8				
9			=C2*C6	
10				

	B	C	D
7			
8			
9		2,100	
10			

Resultado

	A	B	C	D
7				
8				
9		1,000	2,100	
10				

La suma es

	A	B	C
10			
11			
12		=B9+C9	
13			

Calculo es

	A	B	C
10			
11			
12		3,100	
13			

Paso 5. Multiplicamos los valores del renglón del paso tres por el renglón del paso dos (celda por celda respectivamente se multiplican y después ambos resultados se suman siendo esta suma el resultado del numero de minutos requeridos en el proceso dos).

	D	E	F
5			
6		=B4*B6	
7			

	E	F
4		
5		
6	1,000	
7		

	F	G	H
4			
5			
6		=C4*C6	
7			

	F	G	H
4			
5			
6		4,200	
7			

Sumando los resultados anteriores

	D	E	F
10			
11			
12		=E6+F6	
13			

La suma nos da

	D	E	F
10			
11			
12		5,200	
13			

Los valores obtenidos en los pasos cuatro y cinco son el resultado buscado en la presente práctica.

7.6. Caso practico de determinantes

Supóngase que el importe de una compra de cinco refrescos chicos y cuatro refrescos grandes es por $90.00, si se realiza una nueva compra por dos refrescos chicos y uno refresco grande y el importe de esta compra es por $25.00. ¿Cuales el precio del refresco chico y grande?

Para solucionar este ejercicio utilizaremos la hoja Excel.

Paso 1. Primero colocamos en un renglón y celdas los diferentes valores del numero de refrescos chicos en una celda y los grandes en la siguiente y después el valor del importe de esa compra.

	A	B	C	D	E
1					
2		5	4	90	
3					

Paso 2. A continuación escribe en un segundo renglón los valores de la segunda compra de la misma manera que el primer renglón, es decir los valores del número de refrescos chicos en una celda y los grandes en la siguiente y después el valor del importe de la segunda compra.

	A	B	C	D	E
3					
4		2	1	25	
5					

Paso 3. Calculamos la determinante del sistema como sigue, multiplicamos la primera celda del renglón del paso uno por la segunda celda del renglón del paso dos, a lo anterior le restamos el producto de la segunda celda del paso uno por la primera celda del renglón del paso dos, el resultado es la determinante del sistema.

	A	B	C
5			
6		=B2*C4-C2*B4	
7			

	A	B	C
5			
6		-3	
7			

Paso 4. Calculamos la determinante del refresco chico como sigue, multiplicamos la tercera celda del renglón del paso uno por la segunda celda del renglón del paso dos, a lo anterior le restamos el producto de la segunda celda del paso uno por la tercera celda del renglón del paso dos, el resultado es la determinante del refresco chico.

	A	B	C
7			
8		=D2*C4-C2*D4	
9			

	A	B	C
7			
8		-10	
9			

Paso 5. Calculamos la determinante del refresco grande como sigue, multiplicamos la primera celda del renglón del paso uno por la tercera celda del renglón del paso dos, a lo anterior le restamos el producto de la tercera celda del paso uno por la primera celda del renglón del paso dos, el resultado es la determinante del refresco grande.

	A	B	C
9			
10		=B2*D4-D2*B4	
11			

	A	B	C
9			
10		-55	
11			
12			

Paso 6. Se divide la determinante del paso cuatro entre la determinante del paso tres dando como resultado el precio del refresco chico.

	A	B	C	D	E
11					
12					
13		Refresco chico=		=B8/B6	
14					

	A	B	C	D	E
11					
12					
13		Refresco chico=		3.33333333	
14					

Paso 7. Se divide la determinante del paso cinco entre la determinante del paso tres dando como resultado el precio del refresco grande.

	A	B	C	D	E
14					
15					
16		Refresco grande=		=B10/B6	
17					

	A	B	C	D	E
14					
15					
16		Refresco grande=		18.3333333	
17					

Los valores obtenidos en los pasos seis y siete son el resultado buscado en la presente práctica.

RESPUESTAS A LOS EXÁMENES DE AUTOEVALUACIÓN

MATEMATICAS I

	Tema 1	Tema 2	Tema 3	Tema 4	Tema 5	Tema 6
1.	b	b	a	b	F	b
2.	c	a	b	a	F	d
3.	b	b	d	e	V	e
4.	e	e	a	a	F	d
5.	b	c	e	b	F	b
6.	a	c	b	a	F	a
7.	c	b	a	c	V	b
8.	c	c	d	a	F	b
9.	a	d	a	b	F	a
10.	a	c	a	a	V	e