UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

AUTOR: ANTONIO CAMARGO MARTÍNEZ

Matemáticas financieras		Clave: 1154
Plan: 2005		Créditos: 8
Licenciatura: Contaduría		Semestre: 1
Área: Matemáticas		Hrs. Asesoría: 4
Requisitos: Ninguno		Hrs. Por semana: 4
Tipo de asignatura:	Obligatoria (x)	Optativa ( )

Objetivo general de la asignatura

El alumno evaluará los modelos financieros aplicando los principios matemáticos referentes a la variación del dinero en el tiempo.

Temario oficial (horas sugeridas 64)

1. Interés simple (8 hrs.).
2. Interés compuesto (12 hrs.).
3. Anualidades (18 hrs.).
4. Amortización (12 hrs.).
5. Depreciación (8 hrs.).
6. Aplicaciones (6 hrs.).

Introducción

En esta asignatura el estudiante investigará lo relativo a Matemáticas financieras.

La matemática financiera es una de las áreas más útiles e importantes de la matemática aplicada la que comprende diversos modelos matemáticos relacionados con los cambios cuantitativos que se producen en sumas de dinero que constituyen los capitales.

La realidad financiera y comercial actual, demanda cada vez más un mayor número de profesionistas capacitados para brindar la asesoría y orientación adecuada a quienes tengan necesidad de obtener créditos, préstamos o financiamientos y, por otra parte, a los que disponen de capitales para su inversión, todo ello con el objetivo de obtener los mejores beneficios en tasas de interés o de rendimiento.

El conocimiento de la matemática financiera proporciona la posibilidad de su aplicación en operaciones bancarias o bursátiles, en temas económicos y en muchas áreas de finanzas permitiendo al administrador financiero tomar decisiones acertadas con rapidez y oportunidad. También se considera una base fundamental en los análisis de proyectos de inversión para la toma de decisiones.

En el **tema I** se estudiará el concepto del **valor del dinero** en el tiempo y se conocerán los elementos básicos de **operaciones financieras** a interés simple, las diversas manifestaciones de capital como valor presente, monto futuro, tasa de interés y plazo o tiempo. También se resolverán **situaciones financieras** por medio de ecuaciones de valor equivalente. Se conocerán las operaciones de descuento de intereses o cobrados por anticipado y de las usuales de factoraje.

En el **tema 2** se estudiarán las **variables de las operaciones financieras** más frecuentes en nuestro medio, usualmente establecidas a interés compuesto. Se conocerán las diferencias con el interés simple y se obtendrán las fórmulas para determinar el valor presente, el valor futuro, las tasas de interés (nominal, efectiva, equivalentes), y el plazo o tiempo en este tipo de operaciones. Finalmente se resolverán **situaciones de cambio de obligaciones** por medio de ecuaciones de valor equivalente.

En el **tema 3** se abordarán los diversos **tipos de anualidades** que se utilizan en el campo financiero, desde las simples: ordinarias, anticipadas, y diferidas, hasta las de tipo general. Se conocerán las diversas **fórmulas** que se utilizan en cada **situación financiera** para determinar el valor de la renta, la tasa de interés y el plazo de la operación, así como su valor actual o presente y el monto futuro.

En el **tema 4** se analizarán los principales **sistemas de amortización de financiamientos**, préstamos o créditos que se otorgan a ciertas tasas de interés y plazos. Mediante tablas se conocerá el comportamiento de las variables de interés, así como los saldos de capital en cualquier periodo que se desee. Se estudiarán diferentes situaciones de este tipo de operaciones como es el de pago fijo periódico, con amortización uniforme, o sistema de pagos desiguales para cubrir deudas contraídas. Se conocerán los mecanismos adecuados para elaborar tablas de amortización de créditos y tablas de fondo de amortización.

En el **tema 5** se investigarán los 2 principales **métodos de depreciación de activos** como es el de la **línea recta** y de **suma de dígitos**. Se observará el registro en libros mediante tablas de depreciación y su comportamiento dentro de la vida útil del activo. Se conocerán las fórmulas correspondientes y su aplicación.

El **tema 6** está relacionado con algunas **aplicaciones de la matemática financiera** en la emisión de bonos y obligaciones, sus principales características y uso práctico, así como su funcionamiento y la metodología para calcular los valores de emisión, de redención y de compraventa de estos títulos de inversión.

Tema 1. Interés simple

Objetivo particular

Al terminar la unidad el estudiante debe diferenciar entre monto, interés, tasa de interés, tiempo y capital, así como hacer los cálculos respectivos para obtener cada concepto. Deberá utilizar las herramientas necesarias para la reestructuración de una o varias deudas, conocer como cambia el valor del dinero en el transcurso del tiempo.

Temario detallado

1. Interés simple.

- 1.1 Concepto.
- 1.2 Monto, capital, tasa de interés y tiempo.
- 1.3 Tipo de interés simple (clasificación).
- 1.4 Descuento bancario o simple.
- 1.5 Ecuación de valor.

Introducción

Desde que se inventó la moneda o el uso de la misma, el hombre ha tratado de utilizarla de la mejor manera, el dinero pasó a formar parte importante de la vida de las personas. Con él se podía y se puede realizar todo tipo de transacciones.

El día de hoy ha adquirido una mayor importancia ya que, afortunada o desafortunadamente, todo se mueve través de ese medio. Por tal motivo, se ha visto la manera de utilizarlo de la mejor manera posible dado que, al mismo tiempo que abunda en lo general, es muy escaso en lo particular, y por lo mismo es menester el que se sepa manejar y aprovechar a su máxima utilidad. Al estar las personas relacionadas con el uso y manejo del dinero es necesario comprender de una forma clara y sin complejidades cómo el dinero puede ganar, perder o cambiar de valor con el transcurso del tiempo, debido a la inflación; para ello debemos saber emplear en particular las matemáticas financieras. Además

su manejo es trascendental porque la economía de cualquier nación está basada en el crédito y para tomar una decisión acertada es necesario tomar en cuenta que a través del tiempo el valor del dinero puede tener variaciones.
La matemática financiera proporciona los elementos y metodología para trasladar en el tiempo y de manera simbólica los capitales que intervienen en cualquier operación de carácter financiero y comercial, quitando o agregando intereses.

En la actualidad las actividades económicas se basan en el concepto de interés o intereses y significan la cantidad que se paga por hacer uso del dinero solicitado en préstamo o crédito o, la cantidad que se recibe como rendimiento obtenido al invertir un capital en una entidad financiera.

Por lo anterior, un capital que se invierte o se presta, deberá acrecentarse en el tiempo y de esta forma contrarrestar los efectos negativos inflacionarios para conservar por lo menos el poder adquisitivo o valor del dinero y en su caso aspirar a recibir una ganancia legítima en términos reales.

1.1. Concepto

El **interés** es la cantidad que debe pagar una persona por el uso del dinero tomado en préstamo.

En una operación matemática financiera intervienen básicamente tres elementos fundamentales: el capital, la tasa de interés y el tiempo o plazo.

a) **Capital**: Es una cantidad o masa de dinero localizada en una fecha o punto inicial de una operación financiera. Se le conoce también como principal.
b) **Tasa de interés**: Es la razón de los intereses devengados en un lapso de tiempo entre el capital inicial. Se expresa en tanto por uno o en tanto por ciento.
c) **Tiempo**: Es el número de unidades de tiempo que transcurren entre la fecha inicial y final en una operación financiera. Se conoce también como plazo.

Un **diagrama de valor-tiempo** se utiliza para representar gráficamente la operación financiera situando en el eje horizontal el o los periodos de tiempo y en el eje vertical el capital inicial, el monto de intereses y en su caso el capital final.

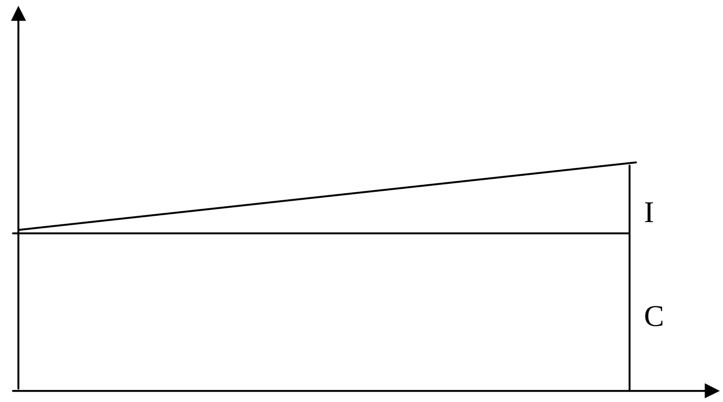


Figura 1.1 Diagrama de valor- tiempo

1.1.1. Inversión de dinero a interés simple.

El **interés simple** es aquel que se calcula sobre un capital inicial que permanece invariable en el tiempo y los intereses se manejan por separado y se retiran de la operación financiera. En consecuencia el interés que se obtiene en cada intervalo unitario de tiempo es siempre el mismo.

1.1.2 Los objetivos de las inversiones.

En su aspecto lucrativo será incrementar lo más posible el **capital inicial** (C) invertido en un determinado lapso de tiempo, a una tasa de interés determinada, para obtener un **monto futuro** (M). Por otra parte se pueden retirar los intereses generados para una diferente utilización y se puede también retirar o no el capital inicial.

1.1.3. Nomenclatura:

C Representa el capital inicial, llamado también principal. Suele representarse también por las letras A o P (valor presente).

M Representa el capital final, llamado también monto o dinero incrementado. Es el valor futuro de C.

I Es el monto de intereses generados en un determinado periodo de tiempo y es la diferencia entre M y C.

i Es la tasa de interés y representa el costo o rendimiento de un capital ya sea producto de un préstamo o de una cantidad que se invierte.

n Es el lapso (años, meses, días) que permanece prestado o invertido un capital.

NOTA: para aplicar las fórmulas y resolver los problemas, los datos de tiempo (*n*)

y la tasa de interés (*i*) deben referirse a una misma unidad de tiempo.

Ejemplos

Si la tasa es anual y el tiempo 5 años, *n* = 5.

Si la tasa es anual y el tiempo 7 meses, sustituimos *n* por 7/12.

Si la tasa es mensual y el tiempo 2 años, consideramos *n* por 24 meses.

En el mismo caso, si la tasa es trimestral y el tiempo 3 años, convertiremos los años a trimestres: *n* = 12.

En conclusión, siempre convertiremos las unidades de tiempo a las unidades a que hace referencia la tasa.

A continuación, se analiza la fórmula general del interés: $I = Cin$ en una serie de problemas de cálculo del interés (*I*), capital (*C*), tasa de interés (*i*) y tiempo (*n*). (Es importante que realices tus propios cálculos para que compruebes cómo se llegó a los resultados).

Cálculo del interés (*i*)

Ejercicio 1. ¿Qué interés produce un capital de \$40,000.00 en 1 año 7 meses y 21 días, al 24% anual?

Fórmula: $I = Cin$ Datos: $C = 40,000$

$i = 0.24$

$n = 1\ año, 7\ meses\ 21\ días$

$$I = Cin$$

Solución:

$$n = 1 año = 360\ días$$
$$7\ meses = 210\ días$$
$$21\ días = 21\ días$$
$$Total\ de\ días = 591\ días$$

$$I = 40,000 \times \frac{0.24}{360} \times 591 = 15,760.00$$

De la fórmula de interés:

$I = Cin$ ……………………………………………………………………………… (1)[1]

se extraen las que sirvan para calcular el capital (*C*), tasa de interés (*I*) y tiempo (*n*), despejando cada una de esas variables de la fórmula de interés (*I*):

Capital (C)…… $C = \frac{I}{in}$ ……………………… ……………………………………………(2)

Tasa de interés (i) $i = \frac{I}{Cn}$ ……………………………………………………… ……………(3)

Tiempo....(*n*)……… $n = \frac{I}{Ci}$ ………………………………………………………………………(4)

[1] Se presenta una numeración para las fórmulas para facilitar su manejo.

1.2. Monto, capital, tasa de interés y tiempo.

Financiamientos a interés simple.

Las **economías modernas** se desarrollan entre otros aspectos, con base en financiamientos o créditos a corto, mediano y largo plazo. La palabra **crédito** proviene del latín "*credere*" que significa creer o confiar por lo cual muchas operaciones financieras se realizan en base de confianza y credibilidad de que el deudor pagará a tiempo su préstamo.

1.2.1. Cálculo de los valores presentes a interés simple.

Es importante conocer el capital inicial equivalente a un monto futuro o a un monto de intereses preestablecidos. Se le conoce también como valor "actual" o valor "presente".

Cálculo del capital (*C*):

Ejercicio 2. ¿Qué capital (*C*), con tasa de interés del 12% anual (*i*), produce intereses de $15,000.00 (*I*) en 10 meses (*n*)?

Fórmula: $C = \frac{I}{in}$

Datos:
$I = 15,000$
$i = 0.12$
$n = 10 \ meses$

Solución: $$C = \frac{15,000}{0.12 \times \frac{10}{12}} = 150,000.00$$

1.2.2. Fórmulas para calcular el valor presente de una inversión a interés simple:

Si se conoce el monto futuro y los intereses: $C = A = M - I$ ....(5)

Si se conoce el monto futuro, tasa y tiempo: $C = A = \dfrac{M}{1+in}$ ....(6)

Se puede usar indistintamente ”C” o “A” para designar un valor presente o valor actual.

Ejercicio 3. ¿Cuál es el capital (C) que produjo un monto (M) de $135,000.00, a una tasa (i) de 14% anual durante nueve meses?

Fórmula: $C = \dfrac{M}{1+in}$

Datos:
$M = 135,000$
$i = 0.14$
$n = 9$

Solución: $C = \dfrac{135,000}{1+0.14\times\dfrac{9}{12}} = 122,171.94$

Ejercicio 4. ¿Cuál es el precio de un televisor que se paga con un anticipo de un 20% y un documento a 3 meses de $4,200.00 si la tasa es igual a TIIE+1.5 puntos porcentuales (ppc) y el día de la compra el valor de la TIIE es del18.5%? (La TIIE significa tasa de interés interbancario de equilibrio y es fijada diariamente como resultado de las cotizaciones de los fondos faltantes y sobrantes entre los bancos comerciales y el banco central)

$a)\ Calculo\ del\ valor\ actual:$

Fórmula: $A = \dfrac{M}{1+in}$

Datos:
$M = 4,200$
$i = 0.185 + 0.015 = 0.20$
$n = 3$

Solución:
$$A = \frac{4,200}{1+0.20\times 3}$$
$$A = 4,000$$

$b)\ \text{Pr}ecio\ del\ televisor::$

Fórmula:

$$P = 4{,}000 + 0.20 \times 4{,}000$$
$$P = 5{,}000$$

1.2.3. Determinación de la tasa generada en una inversión.

La **tasa de interés** en una **operación financiera** significa un **costo** si se trata de un préstamo y un **rendimiento** si se refiere a una inversión de capital. Por consiguiente, será fundamental para la toma de decisiones, conocer a qué tasa de interés se deberá colocar un dinero si se requiere obtener un monto futuro establecido y en un tiempo determinado. O cuál es el costo del dinero si se obtiene un préstamo de cierta cantidad y se conviene pagar otra superior o muy superior en un determinado lapso de tiempo.

1.2.4. Fórmulas para calcular la tasa de interés de una inversión a interés simple:

Si se conoce el monto futuro, el capital inicial y el tiempo: $i = \dfrac{\frac{M}{C} - 1}{n}$ ....(7)

Si se conoce el capital inicial, el monto de intereses y el tiempo: $i = \dfrac{I}{Cn}$ ....(8)

Cálculo de la tasa de interés (*i*)

Ejercicio 5. ¿Cuál es la tasa de interés (i) a la que ha estado invertido un capital de \$110,000.00 (C) que durante dos años y 5 meses (n) produjo \$39,875.00 de interés (I)?

Fórmula: $i = \dfrac{I}{Cn}$

Datos:

$C = 110{,}000$
$I = 39{,}875$
$n = 2 \text{ años } 5 \text{ meses} = 29 \text{ meses}$

Solución: $i = \dfrac{39,875}{110,000 \times 29} = 0.0125 = 1.25\%$

i = ?

C = $110,000.00

I = $39,785.00

t = 2 años y 5 meses = 29 meses

i = I / Ct = 39875 / (110000 x 29) = 0.0125 = 1.25% mensual

Si el interés es de 1.25% cada mes, corresponde a 1.25 x 12 = 15% anual.

NOTA: si la tasa de interés es la incógnita, la unidad de tiempo será la que se maneje en la variable tiempo.

Ejercicio 6. Cuál es la tasa de interés simple anual si con $2,300.00 se liquida un préstamo de $2,000.00 en un plazo de:

a) 6 meses,

b) 5 meses.

c) Interpretar resultados.

$a)\ Plazo\ a\ 6\ meses:$

Fórmula: $i = \dfrac{\frac{M}{C} - 1}{n}$

Datos: $M = 2{,}300$, $C = 2{,}000$, $n = 6$

Solución: $i = \dfrac{\frac{2{,}300}{2{,}000} - 1}{6} = 0.025 \quad mensual$

$i = 0.025 \times 12 = 0.30 = 30\% \quad anual$

$b)\ Plazo\ a\ 5\ meses::$

Fórmula: $i = \dfrac{\frac{M}{C} - 1}{n}$

Datos: $M = 2{,}300$, $C = 2{,}000$, $n = 5$

Solución: $$i=\frac{\frac{2{,}300}{2{,}000}-1}{5}=0.03 \quad mensual$$
$$i=0.03\times 12=0.36=36\% \quad anual$$

$c)$ *Interpretación*:

Aumenta 6 puntos porcentuales (ppc) la tasa de interés (o sea un 20%) al reducirse un mes el plazo inicial de esta operación financiera.

1.2.5. Cálculo del tiempo requerido para que una inversión genere cierto rendimiento.

El mayor o menor tiempo de pago de una operación financiera representa un mayor o menor costo para un deudor o un mayor o menor rendimiento si se trata de una inversión. Por lo tanto la relación entre tiempo y tasa es muy estrecha y va en proporción directa si es una inversión o inversa si se trata de un financiamiento. Se supone que en una economía débil el poder contar con más tiempo significará mayor oportunidad de pago o de acumulación de capital.

1.2.6. Fórmulas para calcular el tiempo o plazo en una inversión a interés simple:

Si se conoce el monto futuro, el capital inicial y la tasa de interés:

$$n=\frac{\frac{M}{C}-1}{i} \quad \text{..........} \quad (9)$$

Si se conoce el capital inicial, el monto de intereses y la tasa de interés:

$$n=\frac{I}{Ci} \quad \text{..........} \quad (10)$$

Cálculo del tiempo (*n)*

Ejercicio 7. ¿Qué tiempo (n) habrá estado invertido un capital de $85,000.00 (C) que produjo un interés de $35,700.00 (I) a una tasa anual de 21% (i)?

Fórmula: $n = \dfrac{I}{Ci}$

Datos: $C = 85,000$ $I = 35,700$ $i = 0.21$

Solución: $n = \dfrac{35,700}{85,000 \times 0.21} = 2 \text{ años}$

NOTA: cuando se pide la tasa de interés en años, automáticamente la tasa saldrá anualizada. Es decir, toma la unidad de tiempo que maneja la tasa de interés.

Ejercicio 8. En cuanto tiempo se acumularían $50.000.00 si el día de hoy se invierten $40,000.00 a una tasa:

a) del 0.5% mensual.

b) Si se obtiene una tasa de rendimiento del 1% mensual, ¿qué pasa con el tiempo?

$a)\ Tasa\ 0.5\%\ mensual:$

Fórmula: $n = \dfrac{\frac{M}{C} - 1}{i}$

Datos: $M = 50,000$ $C = 40,000$ $i = 0.005$

Solución: $n = \dfrac{\frac{50,000}{40,000} - 1}{0.005}$

$$n = 50\ meses = 4.166667\ años = 4\ años,\ 2\ meses,\ 0\ días$$

$b)\ Tasa\ 1.0\%\ mensual:$

Fórmula: $n = \dfrac{\frac{M}{C} - 1}{i}$

Datos: $M = 50,000$ $C = 40,000$ $i = 0.01$

Solución: $n = \dfrac{\dfrac{50{,}000}{40{,}000} - 1}{0.01}$

$n = 25 \ meses = 2.083333 \ años = 2 \ años, 1 \ meses, \ 0 \ días$

1.2.7. Monto de un capital utilizando interés simple.

.Se conoce por monto a la suma del capital (*C*) más el interés (*I*). (También se le denomina valor futuro, valor acumulado o valor nominal).

Fórmulas para calcular el monto futuro de una inversión a interés simple:

Si se conoce el capital y monto de intereses:

$M = C + I$ .... (11)

Si se conoce el capital, tasa y tiempo: $M = C + Cin$ o sea: $M = C(1 + in)$ .... (12)

por lo que el monto de intereses I partir de M y C : $I = M - C$ ....(13)

En función de la fórmula del monto, puede ser necesario calcular el capital, el tiempo o la tasa; en tal caso, se procederá a despejar la incógnita de la fórmula básica.

A continuación –mediante ejercicios– se analizan las fórmulas anteriores. (Conviene que realices los cálculos, para que comprendas cómo se resolvieron cada una de las literales).

Cálculo del monto (*M*)

Ejercicio 9. Si usamos los datos del ejercicio 1, y sabiendo de antemano que el monto (M) relativo es $55,760.00, comprobamos nuestra nueva fórmula:

Fórmula: $M = C(1 + in)$ Datos:

$C = 40{,}000$

$i = 0.24$

$n = 1 año, 7 \, meses \, 21 días = 591 \ días$

Solución: $M = 40,000(1+\frac{0.24 \times 591}{360}) = 55,760$

Ejercicio 10. En una cuenta bancaria se invierten $56,000.00 ganando intereses del 12.3% anual.

a) ¿Cuál es su capital futuro en 3 años y los intereses ganados?

b) Calcular los intereses ganados.

c) Interpretación.

$a)\ Capital\ \ futuro:$

Fórmula: $M = C(1+in)$

Datos:
$C = 56,000$
$i = 0.123$
$n = 3$

Solución:

$$M = 56,000(1+0.123 \times 3)$$
$$M = 56,000 \times 1.369$$
$$M = 76,664$$

$b)\ Intereses\ \ ganados:$

Fórmula: $I = M - C$

Solución:

$$I = 76,664 - 56,000$$
$$I = 20,664$$

$c)\ Interpretación:$

El monto de intereses en 3 años representa el 36.9% sobre el capital invertido.

1.3. Tipos de interés simple (clasificación)

En operaciones financieras se puede considerar 2 tipos de interés simple:

a) Tiempo ordinario o aproximado.

b) Tiempo real o exacto.

En el 1er. caso el tiempo es el bancario en el cual se utilizan meses de 30 días y año de 360 días.

En el 2° caso el tiempo será año de 365 días y meses de acuerdo a días calendario según los que contengan los meses en estudio.

Ejercicio 11. Obtener el monto a interés ordinario que se acumula al 15 de octubre si el 25 de marzo anterior se depositaron $15,000.00 en una cuenta bancaria que abona TIIE + 2.4 ppc. (valor de la TIIE es del 21.1%)

Fórmula: $M = C(1+in)$ Datos: $C = 15,000$ $i = 0.235$

Solución:

Cálculo de *n:*	*Mes*	*días*
	Del 25 al 30 marzo	5
	De abril a septiembre (6 meses)	180
	Del 1° al 15 octubre	15
Total:		200

$$M = 15,000(1+\frac{200}{360}\times 0.235 = 16,958.33$$

$$I = M - C = 16,958.33 - 15,000 = 1,958.33$$

$c)$ *Interpretación*:

El monto futuro aumenta con respecto al capital inicial en $1,958.33, lo que representa un 13.06% más

Ejercicio 12. Del ejercicio anterior obtener su monto futuro considerando tiempo real o exacto.

Fórmula: $M = C(1+in)$ Datos: $C = 15,000$ $i = 0.235$

Solución:	Cálculo de *n:*	*Mes*	*días*
	Del 25 al 30	marzo	6
		abril	30

	mayo	31
	junio	30
	julio	31
	agosto	31
	septiembre	30
Del 1° al 15	octubre	15
Total		204

$$M = 15,000(1 + \frac{204}{365} \times 0.235 = 16,970.14$$

$$I = M - C = 16,970.14 - 15,000 = 1,970.14$$

$c)$ *Interpretación*:

El monto futuro aumenta con respecto al capital inicial en $1,970.14 lo que representa un 13.13% más. En relación al tiempo ordinario el monto es mayor en 0.07ppc.

1.4. Descuento bancario o simple

1.4.1. Conceptos básicos del interés cobrado por anticipado.

En ciertas operaciones de **crédito bancario** se acostumbra cobrar el **monto de intereses** en el momento mismo de otorgar un préstamo o crédito. También en transacciones comerciales a **proveedores o clientes**.

Al interés cobrado por anticipado se le llama descuento y la cantidad de dinero que recibe el solicitante del crédito, una vez descontado el monto de intereses se le llama **valor efectivo**.

Con objeto de indicar explícitamente que en un préstamo los intereses se cobrarán de una manera anticipada, la tasa de interés cambia de nombre a tasa de descuento.

Se distingue el descuento racional porque la tasa de descuento se aplica sobre la cantidad inicial del préstamo y se cobra en ese momento. Se llama también **descuento real**. Se utilizan las mismas fórmulas de interés simple.

1.4.2. El descuento bancario.

Es una operación financiera que por lo general se realiza por una institución bancaria, empresas de factoraje, cuyo objetivo es comprar documentos, por lo general pagarés, en forma anticipada o sea antes de su vencimiento descontando cierta cantidad calculada mediante una tasa de descuento la cual se aplica sobre el valor nominal del pagaré.

El verbo **descontar** significa el acto de obtener o pagar dinero en efectivo a cambio de un documento de importe más elevado a pagar en el futuro.

1.4.3. Los conceptos de valor nominal y valor líquido.

En general los documentos que dan lugar a **operaciones de factoraje** son los **giros** y los **pagarés**.

El tenedor de un pagaré no puede exigir el cobro del mismo antes de la fecha de su vencimiento por lo tanto, si desea hacerlo efectivo antes de dicha fecha, lo puede vender a una institución bancaria, empresa o institución de factoraje, o a cualquier persona física o moral que lo acepte. Entonces el nuevo deudor se convierte en beneficiario.

El **valor nominal** de un pagaré es la suma del capital del préstamo más los intereses acumulados a su vencimiento.

El **valor líquido** de un pagaré es su valor nominal menos el descuento. Es la cantidad que efectivamente recibe el prestatario.

Por lo tanto, el **descuento** es la disminución que se hace a una cantidad que se paga antes de su vencimiento. Es decir, es el cobro hecho con anticipación a una cantidad con vencimiento futuro; esto significa que la persona que compra el derecho de cobrar esa cantidad futura efectúa un préstamo por el cual exige un interés, ya que debe transcurrir el tiempo anticipado para recuperar su inversión.

A ese interés se le llama descuento: cuando el inversionista (quien compra el documento que ampara la cantidad futura) adquiere en una cantidad menor un valor nominal que vence en el futuro. Asimismo a una cantidad que tiene un vencimiento en un plazo futuro le corresponde un valor actual. A la diferencia entre ambos se le llama descuento.

1.4.4. Nomenclatura:

M Valor nominal del documento.

C Valor comercial, valor de descuento o valor efectivo.

D Es la cantidad que se descuenta del valor nominal del pagaré.

d Es la tasa de descuento que actúa sobre el valor nominal del pagaré.

r Tasa de rendimiento de un préstamo descontado intereses por adelantado.

n Es el lapso de tiempo faltante entre la fecha de negociación del documento y la fecha de su vencimiento.

Fórmulas de descuento simple bancario.

Descuento simple: $D = Mdn$ .... (13)

$$D = \frac{Cdn}{1 - dn} \text{ .... (14)}$$

Valor comercial o de descuento: $C = M - D$ .... (15)

$C = M - Mdn$ .... (16)

$C = M(1 - dn)$ .... (17)

Tasa de descuento: $d = \frac{1 - \frac{C}{M}}{n}$ .... (18)

Tiempo o plazo de descuento: $n = \frac{1 - \frac{C}{M}}{d}$ ....(19)

Descuento real o justo: $D_r = M - \frac{M}{1 + in}$ .... (20)

Ejercicio 13. Se tiene un documento con valor nominal de \$50,000.00 y una tasa de descuento del 2.5% mensual

Datos: $M = 50,000$
$d = 0.025$

Además, se cuenta con los datos de la tabla siguiente:

Tiempo	Descuento comercial	Descuento real o justo
	$D = Mdn$	$D_r = M - \frac{M}{1 + in}$
1 mes	1,250.00	1,219.51
2 meses	2,500.00	2,380.95
4 meses	5,000.00	4,545.45
6 meses	7,500.00	6,521.74
1 año	15,000.00	11,538.46

La tabla anterior nos revela la diferencia entre los descuentos. El descuento comercial es el **interés del valor nominal** (*M*), ya que calcula el descuento no sobre el capital invertido, sino sobre la suma de éste más los intereses; por lo tanto el descuento se calcula a una tasa mayor que la del problema, pues al disminuir al valor nominal el descuento, se obtendrá una cantidad menor al valor actual. Por ende, el descuento se rige por una tasa mayor de la que se da en el problema.

Ejercicio 14. ¿Cuál es el valor descontado de un documento con valor nominal de $50,000.00 y una tasa de descuento del 2.5% mensual, si se descuentan 6 meses antes de su vencimiento?

Fórmula: $C = M(1 - dn)$ Datos: $M = 50,000$, $i = 0.025$, $n = 6$

Solución:

$$C = 50,000(1 - 0.025 \times 6) = 42,500$$

Se puede utilizar el descuento de la tabla anterior correspondiente a 6 meses y se aplica a la fórmula: $C = M - D$

Por lo tanto: $C = 50,000 - 7,500 = 42,500$

Con descuento real o justo (*Dr*), se tiene:

Fórmula: $D_r = M - \frac{M}{1 + in}$ Datos: $C = 50,000$, $i = 0.025$, $n = 6$

Solución: $D_r = 50,000 - \frac{50,000}{1 + 0.025 \times 6} = 6,521.74$

$$C = M - D_r = 50,000 - 6,521.74 = 43,478.26$$

Interpretación:

Existe una diferencia entre el valor de descuento comercial y el justo de $1,248.46 lo que representa un (2.5%) menos.

Ejercicio 15. Una persona solicita un préstamo quirografario por $120,000 a un plazo de 90 días y le cobran una tasa de descuento del 25.0%.

a) Calcular a cuanto asciende el descuento; obtener el valor efectivo.

b) Si la tasa de descuento baja 5 ppc. cuales son los nuevos valores?

c) Interpretar resultados.

$a)\ Descuento\ al\ 25\%:$

Fórmula: $D = Mdn$ Datos: $M = 120{,}000$; $d = 0.25$; $n = \frac{90}{360} = 0.25$

Solución: $D = 120{,}000 \times 0.25 \times 0.25 = 7{,}500$

$a_1)\ Valor\ efectivo:$

Fórmula: $C = M - D$ Datos: $M = 120{,}000$; $D = 7{,}500$

Solución: $C = 120{,}000 - 7{,}500 = 112{,}500$

$b)\ Descuento\ al\ 20\%:$

Fórmula: $D = Mdn$ Datos: $M = 120{,}000$; $d = 0.20$; $n = \frac{90}{360} = 0.25$

Solución: $D = 120{,}000 \times 0.25 \times 0.20 = 6{,}000$

$b_1)\ Valor\ efectivo:$

Fórmula: $C = M - D$ Datos: $M = 120{,}000$; $D = 6{,}000$

Solución: $C = 120{,}000 - 6{,}000 = 114{,}000$

$c)\ Interpretación:$

Si la tasa de descuento baja 5 ppc. (20%), el valor en efectivo aumenta sólo en un 1.33%.

Ejercicio 16. La tasa de descuento de pagarés en un banco es actualmente del 22.4%. Si el valor nominal de un pagaré es de $19,500.00 con fecha de vencimiento dentro de 3 meses:

a) Calcular la cantidad descontada y el valor comercial o valor de descuento del documento.

b) Calcular el valor de descuento real.

c) Comparar e interpretar resultados.

$a)\ Descuento\ al\ 22.4\%:$

Fórmula: $D = Mdn$

Datos: $M = 19{,}500$, $d = 0.224$, $n = \frac{90}{360} = 0.25$

Solución: $D = 19{,}500 \times 0.224 \times 0.25 = 1{,}092$

$a_1)\ Valor\ comercial:$

Fórmula: $C = M - D$

Datos: $M = 1{,}9{,}500$, $D = 1{,}092$

Solución: $C = 19{,}500 - 1{,}092 = 18{,}408$

$b)\ Descuento\ real:$

Fórmula: $C = \dfrac{M}{1+in}$

Datos: $M = 19{,}500$, $i = 0.224$, $n = \dfrac{90}{360} = 0.25$

Solución: $C = \dfrac{19{,}500}{1+0.224 \times 0.25} = 18{,}465.91$

$c)$ *Interpretación* :

Existe una diferencia de $57.91 que representa una pérdida del 0.314%.

Cálculo del tiempo

Ejercicio 17. Indicar con qué tiempo de anticipación se descontó un documento cuyo valor nominal es $50,000.00. Se recibió un valor descontado de $42,500.00, con descuento comercial y a una tasa de descuento de 2.5% mensual.

Fórmula: $n = \dfrac{1-\dfrac{C}{M}}{d}$

Datos: $M = 50{,}000$, $C = 42{,}500$, $d = 0.025$

Solución: $n = \dfrac{1-\dfrac{42{,}500}{50{,}000}}{0.025} = 6\ meses$

Cálculo de la tasa

Ejercicio 18. A qué tasa descuento se aplicó un documento con valor nominal de \$60,000.00, si se descontó faltando 5 meses para su vencimiento y por el cual se obtuvo un valor descontado de \$53,500.00, con descuento comercial.

Fórmula: $d = \dfrac{1 - \dfrac{C}{M}}{n}$ Datos: $M = 60,000$ $C = 53,500$ $n = 5 \; meses$

Solución: $d = \dfrac{1 - \dfrac{53,500}{60,000}}{5} = 0.0217 = 2.17\% \; mensual$

$d = 0.0217 \times 12 = 0.26 = 26.0\% \; anual$

1.4.5. Equivalencia entre tasa de interés y descuento simple.

En la práctica del descuento, además de permitir al prestamista disponer inmediatamente de los intereses cobrados por anticipado, hace que la tasa de interés que se está pagando por el préstamo sea mayor que la de descuento.

Esta tasa de interés se conoce como **tasa de rendimiento** y su calculo es independiente del préstamo descontado. Sólo está en función de la tasa de descuento y del tiempo que dura el préstamo.

1.4.6. Fórmulas de tasa de rendimiento y de descuento simple.

Tasa de rendimiento: $r = \dfrac{d}{1 - dn}$ .... (21)

Tasa de descuento: $d = \dfrac{r}{1 + rn}$ .... (22)

Ejercicio 19. Calcular la tasa de rendimiento de un pagaré cuya tasa de descuento es del 27.5% en un plazo de 6 meses.

Fórmula: $r = \dfrac{d}{1 - dn}$ Datos: $d = \dfrac{0.275}{12} = 0.022917$ $n = 6$

Solución: $$r=\frac{0.022917}{1-0.022917\times 6}=0.026570$$

$$r=0.026570\times 12=0.318840=31.9\%$$

Interpretación:

Existe una diferencia de 4.4 ppc. o sea un 16.0% más entre la tasa de rendimiento y la tasa de descuento.

1.5. Ecuación de valor

Es frecuente en el campo financiero principalmente por razones económicas o de tiempo, cambiar una serie de obligaciones ya pactadas por otro conjunto de obligaciones que puedan permitir a un deudor saldar su deuda. En otras palabras se **renegocia una deuda**.

Una **ecuación de valor** es una igualdad entre dos conjuntos de obligaciones valuadas todas a la misma fecha llamada **fecha focal** o fecha de valuación.

Es importante mencionar que debe precisarse claramente la fecha focal ya que los montos de las obligaciones en los problemas de interés simple varían de acuerdo al tiempo y a diferente fecha focal. Generalmente esta última se refiere a la fecha de liquidación total de la deuda.

En la resolución de estos problemas, se utilizan **gráficas (de tiempo valor)** en las que se representan las **fechas de vencimiento** de las obligaciones originales y cuándo se realizarán los pagos (se puede utilizar tanto el interés simple como el compuesto). En este caso, se lleva a cabo el procedimiento siguiente:

ETAPA 1. **Calcular** el **monto a pagar** de cada una de las obligaciones originales a su vencimiento.

ETAPA 2. Hacer la **gráfica de tiempo-valor** que considere las fechas de vencimiento. Y se colocan, sobre la misma, los montos en la fecha de su vencimiento.

ETAPA 3. En la gráfica de tiempo, se **ubican los pagos parciales** (como las **deudas**, con sus fechas respectivas).

ETAPA 4. Se **determina** en la gráfica la **fecha focal** (de preferencia en donde coincida con algún pago; es recomendable que sea una incógnita, con el fin de realizar el menor número de operaciones).

ETAPA 5. Se **efectúa la solución**; para ello, se trasladan todas las cantidades a la fecha focal (se debe tomar en cuenta que la suma de todos los pagos debe cubrir la suma de las deudas).

ETAPA 6. Se **resuelven las operaciones**.

Ejercicio 20. Al día de hoy una persona tiene las obligaciones siguientes:

a. Un préstamo de $30,000.00, otorgado hace 6 meses, con vencimiento el día de hoy e impuesto con una tasa de 2.5% mensual.

C = $30,000.00

t = Hace 6 meses con vencimiento el día de hoy

i = 2.5% = 0.025 mensual

b. Una deuda por $ 5,000.00 contraída hace tres meses, con vencimiento dentro de 9 meses y con un tipo de interés de 3% mensual.

C = $5,000.00

t = Hace 3 meses con vencimiento dentro de 9 meses.

I = 3% = 0.03 mensual

c. Un compromiso por $50,000.00 contratado hace cuatro meses, con una tasa de 2% mensual y con un vencimiento dentro de 6 meses.

C = $50,000.00

t = Hace 4 meses con vencimiento dentro de 6 meses

i = 2% = 0.02 mensual

d. Una deuda por $10,000.00 contratada hace un mes, con vencimiento dentro de 7 meses y una tasa de 3.5% mensual.

C = $10,000.00

t = Hace un mes con vencimiento dentro de 7 meses

i = 3.5% = 0.035 mensual

Hoy mismo, esta persona decide renegociar sus obligaciones con un rendimiento, en las nuevas operaciones, del 30% anual mediante tres pagos:

- $40,000.00, el día de hoy.
- $35,000.00, dentro de 6 meses.
- El saldo, dentro de 12 meses.

Calcula el importe del saldo utilizando como fecha focal el mes 12.
Solución con interés simple.

ETAPA 1

DEUDA (D)	OPERACIÓN *M = C(1 + in)*	MONTO DE LA DEUDA
a	30000[1 + (0.025)(6)]	$M_1 = 34,500$
b	5000[1 + (0.03)(12)]	$M_2 = 6,800$
c	50000[1 + (0.02)(10)]	$M_3 = 60,000$
d	10000[1 + (0.035)(8)]	$M_4 = 12,800$
	TOTAL EN VALORES ABSOLUTOS	$114,100.00

ETAPA 2

30 50 5 10 M_1 M_3 M_4 M_2

|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

-6 -4 -3 -1 0 2 6 7 9 12

40 35 X

ETAPA 3

30 50 5 10 M_1 M_3 M_4 M_2

|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

-6 -4 -3 -1 0 2 6 7 9 12

40 35 X

ETAPA 4

30 50 5 10 M_1 M_3 M_4 M_2 ***ff***

```
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
```

-6 -4 -3 -1 0 2 6 7 9 12

ETAPA 5

M_{11}
M_{21}
M_{31}
M_{41}

30 50 5 10 M_1 M_3 M_4 M_2

```
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
```

-6 -4 -3 -1 0 2 6 7 9 12

X

40 **35** M_5

M_6

ETAPA 6

i = 30% = 0.025 mensual

DEUDA	OPERACIÓN	RESULTADO
a	M = 34500[1 + (0.025)(12)]	$M_{11} = 44,8500$
b	M = 6800[1 + (0.025)(3)]	$M_{21} = 7,310$
c	M = 60000[1 + (0.025)(6)]	$M_{31} = 69,000$
d	M = 12800[1 + (0.025)(5)]	$M_{41} = 14,400$
	SUMA DE DEUDAS	$135,560.00

PAGO	OPERACIÓN	RESULTADO

a	40000[1 + (0.025)(12)]	$M_5 = 52,000$
b	35000[1 + (0.025)(6)]	$M_6 = 40,250$
c	X	X
	SUMA DE PAGOS	$92,250.00 + X

Σ DEUDAS = Σ PAGOS o sea ecuación de valor:

$$M_{11} + M_{21} + M_{31} + M_{41} = M_5 + M_6 + X$$

135,560 = 92,250 + X

135,560 – 9,2250 = X

43,310 = X

Finalmente, el saldo se liquidará con una cantidad de $43,310.00.

Ejercicio 21. Una persona recibe un préstamo de $60,000.00 a pagar en un plazo de 3 meses y una tasa de interés del 22.0%. Al mes contrae otra deuda de $50,000.00 para pagar en 4 meses a una tasa del 24.0%. Sin embargo al término del primer préstamo no puede pagar y conviene con el acreedor hacer un solo pago dentro de otros 3 meses pero a una tasa del 30.0%.

Por medio de una ecuación equivalente, calcule el valor del pago único considerando la fecha focal al mes 6.

$a)$ *Cálculo del monto de* $60,000 :

Fórmula: $M = C(1+in)$ Datos: $C = 60{,}000$, $i = 0.22$, $n = \frac{3}{12} = 0.25$

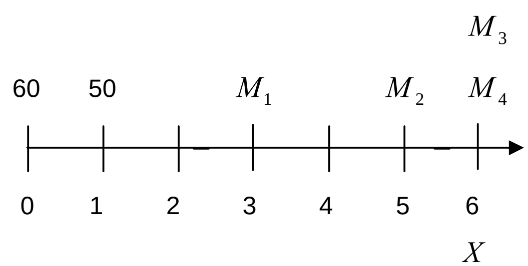
Solución: $M_1 = 60{,}000(1+0.22\times 0.25) = 63{,}300$

$b)$ *Cálculo del monto de* $\$50{,}000$:

Fórmula: $M = C(1+in)$ Datos: $C = 50{,}000$, $i = 0.24$, $n = \frac{4}{12} = 0.333333$

Solución: $M_2 = 50{,}000(1+0.24\times 0.333333) = 54{,}000$

$c)$ *Diagrama de tiempo*:



$d)$ *Ecuación de valor equivalente*: $M_3 + M_4 = X$

Solución:

$$M_3 = M_1(1+0.025\times 3) = 68{,}047.50$$
$$M_4 = M_2(1+0.025\times 1) = 55{,}350.00$$
$$X = 123{,}397.50$$

Una de las principales aplicaciones del Interés simple es realizar depósitos a plazo en los bancos privados o comerciales. Un depósito a plazo es un capital de dinero que se deposita en una cuenta bancaria por una persona física o moral que pretende un monto de intereses por su inversión al termino del plazo pactado. Existen varios tipos de depósito: Las cuentas de ahorro, las cuentas a plazo, los certificados de depósito, los pagares, etc..

Las cuentas de ahorro son instrumentos que se manejan comúnmente en libretas de ahorro y permiten a su titular efectuar retiros de capital con solo solicitarlo, de tal forma que estas cuentas son muy útiles para aquellas persona que desean un rendimiento por sus ahorros, pero requieren una liquidez inmediata..Son una forma segura de depósito de capitales por lo que los intereses que se obtienen son modestos, pero proporcionan retiro inmediato, seguridad y flexibilidad de hacer depósitos y retiro de los mismos en cualquier momento.

Las cuentas de depósito otorgan por lo general mayores tasas de interés que las de ahorro debido a sus restricciones en cuanto a depósitos y retiros. Algunas inversiones solicitan cantidades mínimas de depósito.

Los certificados de depósito son instrumentos del mercado financiero que especifican claramente el monto de los capitales, periodos de capitalización y tasas de interés. En general no son negociables y la institución emisora no tiene la obligación de redimirlos hasta su vencimiento.

Un pagaré es un documento negociable que implica una obligación de pagar el capital prestado más un monto de intereses que se ha pactado a su vencimiento. Pueden ser nominativos o al portador.

Otras aplicaciones del interés simple son en operaciones de instituciones de ahorro y préstamo cuyos beneficios se otorgan a sus socios mediante dividendos anuales.

Bibliografía del tema 1

AYRES F. *Matemáticas financieras* Serie Schauman, McGraw-Hill, México, 1991.

DIAZ Mata A. y V. M., Gómez Aguilera, *Matemáticas financieras,* McGraw-Hill México, 2003.

PORTUS L. *Matemáticas financieras* 3ª. ed., McGraw-Hill, México, 1997.

TOLEDANO Castillo M. A. y Hummmeltine L.E., *Matemáticas financieras*, CECSA, México, 2003.

VILLALOBOS José L., *Matemáticas financieras,* Grupo Editorial Iberoamericano, México, 2001.

VIDAURRI Aguirre Héctor M., *Matemáticas financieras,* Thomson, México, 2004.

Actividades de Aprendizaje

A.1.1. A partir del estudio de la bibliografía específica sugerida, estudiar cada uno de los conceptos principales, sus fórmulas y aplicaciones.

A.1.2. Investigar y realizar por lo menos 3 ejercicios o problemas situacionales de cada uno de los conceptos estudiados utilizando la bibliografía sugerida.

A.1.3. Elaborar un glosario de los principales conceptos matemáticos estudiados.

A.1.4. Elaborar un listado de fórmulas de cada uno de los conceptos matemáticos estudiados.

A.1.5. Investigar las características de las “Unidades de inversión” (UDI’S) y las fórmulas para su cálculo quincenal.

A.1.6. Investigar los sistemas de cálculo de intereses en las tarjetas de crédito de los bancos comerciales.

A.1.7. Estudiar el cálculo del valor comercial el día de su colocación en la Bolsa Mexicana de Valores de los Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES).

A.1.8. Investigar en que consiste el servicio de “factoraje”y como opera el concepto de descuento en su operación.

A.1.9. Examine el comportamiento de los intereses en “compras aplazo” en la adquisición de bienes o servicios.

A.1.10. Visite las páginas www.aulafacil.com, y compare los temas estudiados con la propuesta que se expresa e indique sus conclusiones.

Cuestionario de autoevaluación

1. Explique brevemente los conceptos de valor presente o actual y el monto futuro de capital en operaciones financieras.
2. ¿Qué diferencia existe entre tasa de interés y tipo de interés?
3. En una situación financiera ¿que significa una proporción directa o inversa en la relación tiempo y tasa?
4. ¿Qué es mayor, el capital o el monto de capital?
5. Explique brevemente el concepto de descuento comercial.
6. ¿Cuál es la diferencia entre descuento real y comercial?
7. Defina o explique la diferencia entre valor nominal y valor descontado de un documento.
8. Explique las características del interés y del descuento simple exacto con tiempo aproximado.
9. ¿Qué características tiene el descuento comercial exacto con tiempo aproximado?
10. ¿Qué es más productivo para el inversionista, el interés simple exacto o el ordinario?

Examen de autoevaluación

1. Si invertimos $25,000.00 en una institución financiera que nos otorga una tasa de interés simple del 9% anual, cuanto tendremos dentro de 3 años?

a) $32,375.72

b) $31,500.00

c) $27,250.00

d) $31,750.00

e) $19,685.00

2. Una persona recibió un préstamo y al final de 4 meses deberá pagar un monto futuro de $19,600. Si los intereses causados importan $1,200.00 . ¿Qué cantidad le prestaron?

a) $18,000.00

b) $18,200.00

c) $18,400.00

d) $18,600.00

e) $18,800.00

3. Calcular el interés simple que produce un capital de $13,500.00 a una tasa del 4.25% trimestral durante un año y tres meses.

a) $2,868.75

b) $2,295.00

c) $3,442.50

d) $2,700.00

e) $2,762.50

4. Un empleado obtiene un préstamo por $97,000.00 para liquidarlo 3 años después. Mientras exista la deuda el empleado pagará intereses mensuales a una tasa de interés simple del 18% anual. Calcular el importe del pago de intereses de cada mes.

   a) $1,940.00

   b) $ 1,455.00

   c) $1,185.00

   d) $ 1,425.00

   e) $1,940.00

5. Un capitalista posee $200,00.00 e invierte el 75% a una tasa de interés simple del 2% cada trimestre, y el resto al 3.6% cada semestre, si se conviene en retirar mensualmente los intereses, ¿Cuánto recibirá cada mes de intereses?

   a) $1,291.67

   b) $1,875.00

   c) $ 791.67

   d) $1,300.00

   e) $2,250.00

6. Si se ha prestado la cantidad de $2,000.00 a una tasa del 3.58% cada mes y se ganó un interés de $286.40, ¿cuántos meses transcurrieron?

   a) 1 mes

   b) 2 meses

   c) 3 meses

   d) 4 meses

   e) 5 meses

7. Para disponer de veinte mil pesos dentro de seis meses, con una tasa del 4.2% simple anual, se necesita una inversión de:

   a) $19,193.86

   b) $19,588.64

   c) $16,528.92

d) $14,084.51

e) $20,420.00

8. ¿Cuál es el monto de un documento cuyo vencimiento es seis meses después y que ampara un préstamo por $320,000.00 pesos con recargos del 36% simple anual?

a) $377,600.00

b) $435,200.00

c) $388,900.00

d) $415,700.00

e) $396,800.00

9. Cuál es el valor descontado de un documento cuyo valor es de $34,500.00 si se le aplica una tasa del 8% simple anual, tres meses antes de su vencimiento:

a) $33,810.00

b) $34,230.00

c) $33,823.00

d) $30,450.00

e) $33,451.60

10. Cuál es el valor líquido sobre un documento con valor nominal de $25 000 que vence dentro de 3 meses a una tasa de descuento simple del 9% anual.

a) $24 449.88

b) $24 437.50

c) $19 304.59

d) $24 440.02

e) $24 467.14

Tema 2. Interés compuesto

Objetivo particular

Al finalizar la unidad el estudiante deberá diferenciar entre operaciones financieras realizadas a interés simple y compuesto. Obtendrá la capacidad de calcular el monto de capital, valor presente, interés, tasa de interés, y plazo a interés compuesto. Deberá utilizar las herramientas necesarias para la reestructuración de una o varias deudas efectuando cálculos necesarios para determinar las nuevas obligaciones en tiempo y cantidad.

Temario detallado

2. Interés compuesto

- 2.1 Concepto
- 2.2 Monto, capital, tasa de interés y tiempo
- 2.3 Tasa nominal, tasa efectiva y tasas equivalentes
- 2.4 Ecuación de valor

Introducción

El interés compuesto tiene lugar cuando el deudor no paga, al concluir cada periodo que sirve como base para su determinación, los intereses correspondientes. Así, provoca que los mismos intereses se conviertan en un capital adicional, que a su vez producirá intereses (es decir, los intereses se capitalizan para producir más intereses).

Cuando el tiempo de la operación es superior al periodo al que se refiere la tasa, los intereses se capitalizan: nos encontramos ante un problema de interés compuesto y no de interés simple. En la práctica, en las operaciones a corto plazo, aun cuando los periodos a que se refiere la tasa sean menores al tiempo de la operación y se acuerde que los intereses sean pagaderos hasta el fin del plazo total, sin consecuencias de capitalizaciones, la inversión se hace a interés simple.

Por eso, es importante determinar los plazos en que van a vencer los intereses, para que se puedan especificar las capitalizaciones, y, en consecuencia, establecer el procedimiento para calcular los intereses (simple o compuesto).

NOTA: cuando no se indican los plazos en que se deben llevar a cabo las capitalizaciones, se da por hecho que se efectuarán de acuerdo con los periodos a los que se refiere la tasa. En caso de que la tasa no especifique su vencimiento, se entenderá que ésta es anual, y las capitalizaciones, anuales.

2.1. Concepto

Si al terminar un periodo de tiempo en una inversión a plazo fijo no se retira el capital ni los intereses entonces, a partir del segundo periodo los intereses ganados se integran al capital inicial formándose un nuevo capital para el siguiente periodo el cual generará nuevos intereses y así sucesivamente.

Se dice por lo tanto que los intereses se capitalizan por lo que el capital inicial no permanece constante a través del tiempo, ya que aumentará al final de cada periodo por la adición de los intereses ganados de acuerdo con una tasa convenida. Cuando esto sucede decimos que las operaciones financieras son a **interés compuesto**.

El **interés simple** produce un crecimiento lineal del capital y por el contrario un capital a interés compuesto crece de manera exponencial.

Un gran número de operaciones en el medio financiero se trabajan a **interés compuesto** cuando son a plazos medianos o largos.

2.2. Monto, capital, tasa de interés y tiempo.

El **monto futuro** de una operación a **interés compuesto** es la cantidad que se acumula al final del proceso o lapso de tiempo considerado, a partir de un capital inicial sujeto a determinados periodos de capitalización de intereses.

El **valor presente** o actual de una operación a **interés compuesto** es el capital inicial calculado a partir de un monto futuro y considerando cierto número de periodos de capitalización de intereses.

El periodo convenido para convertir el interés en capital se llama **periodo de capitalización** o **periodo de conversión**. Así, si una operación se capitaliza semestralmente, quiere decir que cada seis meses los intereses generados se agregan al capital para generar nuevos intereses en los siguientes periodos. De igual forma al decir que un periodo de capitalización es mensual se está indicando que al final de cada mes se capitaliza el interés generado en el transcurso del mes.

El interés puede capitalizarse en periodos anuales, sementales, cuatrimestrales, trimestrales, bimestrales, mensuales, semanales, quincenales etc. y el número de veces que el interés se capitaliza en un año se llama **frecuencia de conversión** o **frecuencia de capitalización**.

2.2.1. Nomenclatura.

C Representa el capital inicial, llamado también principal. Suele representarse también por las letras A o P (valor presente).

M Representa el capital final, llamado también monto o dinero incrementado. Es el valor futuro de C.

J Es la tasa nominal de interés calculada para un periodo de un año. Se expresa en tanto por uno o tanto por ciento.

i Es la tasa de interés por periodo de tiempo y representa el costo o rendimiento periodo de capitalización de un capital ya sea producto de un préstamo o de una cantidad que se invierte. Es el cociente de dividir la tasa nominal entre la frecuencia de conversión m

m Es la frecuencia de conversión o de capitalización y representa el número de veces que se capitaliza un capital en un año.

n_a Es el número de años que permanece prestado o invertido un capital.

n Es el número de periodos de que consta una operación financiera a interés compuesto.

Para calcular el monto de un capital a interés compuesto, se determina el interés simple sobre un capital sucesivamente mayor, como resultado que en cada periodo los intereses se van sumando al capital inicial.

Por ejemplo, el caso de un préstamo de $10,000.00, a 18% anual en 6 años; para confrontar el funcionamiento respecto del interés simple, se compara ambos tipos de interés en la siguiente tabla:

	Interés compuesto	Interés simple
Capital inicial	$ 10,000.00	$ 10,000.00
Intereses en el 1.º año	$ 1,800.00	$ 1,800.00
Monto al fin del 1.º año	$ 11,800.00	$ 11,800.00
Intereses en el 2.º año	$ 2,124.00	$ 1,800.00
Monto al fin del 2.º año	$ 13,924.00	$ 13,600.00
Intereses en el 3.º año	$ 2,506.32	$ 1,800.00
Monto al fin del 3.º año	$ 16,430.32	$ 15,400.00
Intereses en el 4.º año	$ 2,957.46	$ 1,800.00
Monto al fin del 4.º año	$ 19,387.78	$ 17,200.00
Intereses en el 5.º año	$ 3,489.80	$ 1,800.00
Monto al fin del 5.º año	$ 22,877.58	$ 19,000.00
Intereses en el 6.º año	$ 4,117.96	$ 1,800.00
Monto al fin del 6.º año	**$ 26,995.54**	**$ 20,800.00**

Como se puede ver, el monto a interés compuesto es mayor por la capitalización de los intereses en cada uno de los plazos establecidos de antemano. Si se sigue este procedimiento, podemos encontrar el monto a interés compuesto; sin embargo, cuando el tiempo de operación es demasiado largo, esta misma solución puede tener errores.

2.2.2. Fórmulas para calcular el monto futuro de una inversión a interés compuesto.

Se conoce el capital, la tasa nominal, la frecuencia de conversión y el plazo de tiempo:

Monto futuro: $M = C(1+i)^n$ .... (23)

Tasa por periodo de capitalización $i = \frac{J}{m}$ .... (24)

N° de periodos de capitalización: $n = n_a \times m$ .... (25)

NOTA: para estudiar el interés compuesto, se utilizan las mismas literales del interés simple. Pero cabe hacer algunas observaciones importantes:

a. En este caso, el tiempo se mide por periodos de capitalización (número de veces que los intereses se convierten o suman al capital en todo el plazo que dura la operación).

b. Se debe tomar en cuenta, nuevamente, que tanto la variable tiempo – que de aquí en adelante se le puede llamar periodo de capitalización (*n*) – como la de tasa de interés (*i*) se manejen en la misma unidad de tiempo.

c. En la tasa de interés pueden aparecer las palabras **convertible**, **compuesto**, **nominal** o **capitalizable**, que se toman como sinónimos e indican el número de veces que se capitalizarán los intereses en un año (frecuencia de conversión).

Ejemplo*:* El 18% convertible mensualmente indica que el 18% que está en forma anual debe ser convertido a forma mensual. Esto se realiza dividiendo el porcentaje entre 12 (número de meses del año): 0.18/12. Si es capitalizable trimestralmente, el resultado es 0.18/4, etcétera.

Ejercicio 1. ¿Cuál es el monto de un capital de $10,000.00, impuesto a interés compuesto a la tasa del 18% anual en 6 años?

Fórmulas:

$$M = C(1+i)^n$$

$$i = \frac{J}{m} \quad n = n_a \times m$$

Datos:

$$C = 10,000$$
$$J = 0.18$$
$$m = 1$$
$$n_a = 6$$

Solución:

$$i = \frac{0.18}{1} = 0.18 \qquad n = 1 \times 6 = 6$$

$$M = 10,000(1+0.18)^6 = 26,995.54$$

El resultado anterior es el mismo que obtuvimos aritméticamente en la tabla anterior. (Observa que la tasa no fue convertida en una unidad de tiempo menor, ya que no se indicaba en ella).

Desde este momento, siempre que se mencione la palabra **interés**, deberá entenderse que se hace referencia al **interés compuesto**.

Ejercicio 2. ¿Cuál es el monto de un capital de $85,000.00, impuesto a un interés compuesto a la tasa del 22% durante 12 años)?

Fórmulas:

$$M = C(1+i)^n$$

$$i = \frac{J}{m} \quad n = n_a \times m$$

Datos:

$$C = 85,000$$
$$J = 0.22$$
$$m = 1$$
$$n_a = 12$$

Solución:

$$i = \frac{0.22}{1} = 0.22 \qquad n = 1 \times 12 = 12$$

$$M = 85,000(1+0.22)12 = 924,138.14$$

Ejercicio 3. Obtener el monto de que se acumula en 3 años de un capital de $65,000.00

a) Si se invierte al 15% compuesto por semestres.

b) Si la tasa disminuye 3 ppc.

c) Interpretar resultados.

$a)\, Tasa\ al\ 15\% :$

Fórmulas:

$$M = C(1+i)^n$$

$$i = \frac{J}{m} \qquad n = n_a \times m$$

Datos:

$$C = 65,000$$
$$J = 0.15$$
$$m = 2$$
$$n_a = 3$$

Solución:

$$i = \frac{0.15}{2} = 0.075 \qquad n = 2 \times 3 = 6$$

$$M = 65,000(1+0.075)^6 = 100,314.60$$

$b)\, Tasa\ al\ 12\% :$

Solución:

$$i = \frac{0.12}{2} = 0.06 \qquad n = 2 \times 3 = 6$$

$$M = 65,000(1+0.06)^6 = 92,203.74$$

$c)\, Interpretación :$

Si la tasa disminuye en 3 ppc., el monto futuro en 3 años también disminuye en un 8.1%.

2.2.3. Fórmulas para calcular el valor presente de una inversión a interés compuesto.

Se conoce el monto futuro de capital, la tasa nominal, la frecuencia de conversión y el plazo de tiempo o número de periodos de capitalización:

$$C = \frac{M}{(1+i)^n} \quad \text{...} \quad (26)$$

o también: $$C = M(1+i)^{-n} \quad \text{...} \quad (27)$$

en donde: $$i = \frac{J}{m} \qquad y \qquad n = n_a \times m$$

Cálculo del capital en función del interés

$$C = \frac{I}{(1+i)^n - 1} \quad \text{...} \quad (28)$$

Comprobemos la fórmula anterior en los ejercicios siguientes.

Ejercicio 4. ¿Qué capital producirá un interés compuesto de \$139,940.56 a los 4 años y a la tasa del 2% bimestral?

Fórmulas: $$C = \frac{I}{(1+i)^n - 1}$$

Datos:

$I = 139,940.56$
$i = 0.02$
$m = 6$
$n_a = 4$

Solución: $$i = 0.02 \qquad n = 4 \times 6 = 24$$

$$C = \frac{19,940.56}{(1+0.02)^{24} - 1} = 230,000.00$$

Ejercicio 5. ¿Cuál es el capital de un valor acumulado de $924,138.14, invertido durante 12 años al 22% anual?

Fórmulas:

$$C = M(1+i)^{-n}$$

$$i = \frac{J}{m} \quad n = n_a \times m$$

Datos:

$$M = 924.138.14$$
$$J = 0.22$$
$$m = 1$$
$$n_a = 12$$

Solución:

$$i = \frac{0.22}{1} = 0.22 \qquad n = 1 \times 12 = 12$$

$$A = 924{,}138.14(1+0.22)^{-12} = 85{,}000.00$$

Ejercicio 6. ¿Qué capital produce un monto de $380,000.00 a los 6 años, si la tasa es del 3.5% trimestral?

Fórmulas:

$$C = M(1+i)^{-n}$$

$$i = \frac{J}{m} \quad n = n_a \times m$$

Datos:

$$M = 380{,}000.00$$
$$i = .035$$
$$m = 4$$
$$n_a = 6$$

Solución:

$$n = 4 \times 6 = 24$$

$$A = 380{,}000.00(1+0.035)^{-24} = 166{,}423.71$$

Ejercicio 7. Calcular el valor actual de un capital futuro de $7,500.00 con vencimiento en 4 años si la tasa de interés es del 14.0%.

a) Con capitalización mensual.

b) Con capitalización bimestral.

c) Con capitalización trimestral.

d) Comparar resultados.

$a)$ *Capitalización mensual*:

Fórmulas: $C = M(1+i)^{-n}$ $i = \frac{J}{m}$ $n = n_a \times m$

Datos: $M = 7{,}500$ $J = 0.14$ $m = 12$ $n_a = 4$

Solución: $i = \frac{0.14}{12} = 0.011667$ $n = 4 \times 12 = 48$

$$A = 7{,}500(1 + 0.011667)^{-48} = 4{,}297.58$$

$b)$ *Capitalización bimestral*:

Solución: $i = \frac{0.14}{6} = 0.023333$ $n = 4 \times 6 = 24$

Datos: $M = 7{,}500$ $J = 0.14$ $m = 6$ $n_a = 4$

$$A = 7{,}500(1 + 0.023333)^{-24} = 4{,}311.72$$

$c)$ *Capitalización trimestral*:

Solución: $i = \frac{0.14}{4} = 0.035$ $n = 4 \times 4 = 16$ Datos: $M = 7{,}500$ $J = 0.14$ $m = 4$ $n_a = 4$

$$A = 7{,}500(1 + 0.035)^{-16} = 4{,}325.29$$

$d)$ *Interpretación*:

La diferencia entre una capitalización bimestral respecto a una mensual es del 0.32%, la trimestral respecto a la bimestral es de un 0.315% y de una trimestral respecto a una mensual es del 0.635%

2.2.4. Fórmulas para calcular el monto de intereses de una inversión a interés compuesto:

$$I = C\left[\left(1+i\right)^{n} - 1\right] \text{...} \quad (28)$$

Ejercicio 8. Apliquemos la fórmula anterior: ¿cuál es el monto de intereses de un capital de $85,000.00, impuesto a un interés compuesto a la tasa del 22% durante 12 años?

Tenemos:

Fórmulas:

$$I = C\left[\left(1+i\right)^{n} - 1\right]$$

$$i = \frac{J}{m} \qquad n = n_a \times m$$

Datos:

$$C = 85,000.00$$
$$i = 0.22$$
$$m = 1$$
$$n_a = 12$$

Solución:

$$n = 12 \times 1 = 12$$

$$I = 85,000.00\left[\left(1+0.22\right)^{12} - 1\right] = 839,138.14$$

A continuación, comprobemos el resultado anterior:

Monto según el ejercicio 1	924,138.14
Menos capital propuesto	85,000.00
Interés según resolución anterior	839,138.14

2.2.5. Fórmulas para calcular la tasa de interés de una inversión a interés compuesto

Se conoce el capital inicial, el monto futuro de capital, la frecuencia de conversión y el plazo de tiempo o número de periodos de capitalización:

$$J = \left(\sqrt[n]{\frac{M}{C}} - 1\right) \times m \text{ ....} \quad (29)$$

siendo: $n = n_a \times m$

Ejercicio 9. Un capital de $18,000.00 ha estado invertido durante 3 años, luego de los cuales dio un monto de $26,000.00, ¿a qué tasa se celebró la operación?

Fórmulas: $J=\left(\sqrt[n]{\frac{M}{C}}-1\right)\times m$

Datos:
$M=26,000$
$C=18,000$
$m=1$
$n_a=3$
$n=1\times 3=3$

Solución:
$$J=\left(\sqrt[3]{\frac{26}{18}}-1\right)\times 1$$
$$J=0.130404=13.04\%$$

Ejercicio 10. Con un capital de $9,500.00 se formó un monto de $13,290.00 a los 2 años, ¿a qué tasa se hizo la inversión?

Fórmulas: $J=\left(\sqrt[n]{\frac{M}{C}}-1\right)\times m$

Datos:
$M=13,290.00$
$C=9,500.00$
$m=1$
$n_a=2$
$n=1\times 2=2$

Solución:
$$J=\left(\sqrt{\frac{13,290}{9,500}}-1\right)\times 1$$
$$J=0.182771=18.3\%$$

Ejercicio 11. Si de una inversión de $50,000.00 se llegan a obtener $80,000.00 al cabo de 5 años a una tasa de interés capitalizable trimestralmente:

a) ¿Cuál es la tasa de interés nominal?;

b) Con capitalización semestral.

c) Interpretación

$a)\ Capitalización\ trimestral$

Fórmulas: $J=\left(\sqrt[n]{\frac{M}{C}}-1\right)\times m$

Datos:
$M=80{,}000$
$C=50{,}000$
$m=4$
$n_a=5$
$n=5\times 4=20$

Solución:
$$J=\left(\sqrt[20]{\frac{80{,}000}{50{,}000}}-1\right)\times 4$$
$$J=0.095114=9.51\%$$

$b)\ Capitalización\ semestral:$

Fórmulas: $J=\left(\sqrt[n]{\frac{M}{C}}-1\right)\times m$

Datos:
$M=80{,}000$
$C=50{,}000$
$m=2$
$n_a=5$
$n=5\times 2=10$

Solución:
$$J=\left(\sqrt[10]{\frac{80{,}000}{50{,}000}}-1\right)\times 2$$
$$J=0.096245=9.62\%$$

$c)\ Interpretación:$

La diferencia entre una capitalización semestral respecto a una trimestral es de 0.11 ppc. o sea el 1,16% más.

2.2.6. Fórmulas para calcular el tiempo o plazo en una inversión a interés compuesto.

Se conoce el capital inicial, el monto futuro de capital, la tasa nominal o la tasa efectiva por periodo y la frecuencia de conversión:

$$n=\frac{Ln\ \frac{M}{C}}{Ln\ (1+i)}=\frac{\log\frac{M}{C}}{\log(1+i)} \quad \text{.. (30)}$$

Se pueden utilizar en estos planteamientos tanto los logaritmos naturales como los logaritmos decimales.

Ejercicio 12. ¿Dentro de cuánto tiempo, un capital de $25,600.00 a la tasa del 2.5% trimestral valdrá $31,970.89?

Fórmulas: $$n=\frac{\log \frac{M}{C}}{\log\left(1+i\right)}$$

Datos:
$$M=31{,}970.89$$
$$C=25{,}600.00$$
$$m=4$$
$$i=0.025$$

Solución: $$n=\frac{\log \frac{58{,}235}{50{,}000}}{\log\left(1+0.007083\right)}$$

$$n=9\ trimeses$$

Ejercicio 13. ¿Dentro de cuánto tiempo una persona que invirtió $115,000.00 obtendrá $139,179.87, como monto a la tasa del 1.75% bimestral?

Fórmulas: $$n=\frac{\log \frac{M}{C}}{\log\left(1+i\right)}$$

Datos:
$$M=139{,}179.87$$
$$C=115{,}000.00$$
$$m=6$$
$$i=0.0175$$

Solución: $$n=\frac{\log \frac{139{,}179.87}{115{,}000.00}}{\log\left(1+0.0175\right)}$$

$$n=11\ bimestres$$

Ejercicio 14. Si de una inversión de $50,000.00 se llega a obtener $58,235.00 a una tasa del 8.5% con capitalización mensual:

a) Obtener el plazo de esta operación en años, meses, y días.

b) Obtener el plazo si la capitalización se modifica a bimestral.

c) Interpretar resultados.

a) Capitalización mensual

Fórmulas: $n = \dfrac{Ln \dfrac{M}{C}}{Ln\ (1+i)}$

Datos:

$$M = 58{,}235$$
$$C = 50{,}000$$
$$m = 12$$
$$J = .085$$
$$i = \frac{0.085}{12} = 0.007083$$

Solución: $n = \dfrac{Ln \dfrac{58{,}235}{50{,}000}}{Ln\ (1+0.007083)}$

$$n = 21.600408\ meses$$
$$n = 1\ año\ \ 9\ meses\ 18\ días$$

$b)$ *Capitalización bimestral*:

Fórmulas: $n = \dfrac{Ln \dfrac{M}{C}}{Ln\ (1+i)}$

Datos:

$$M = 58{,}235$$
$$C = 50{,}000$$
$$m = 6$$
$$J = .085$$
$$i = \frac{0.085}{6} = 0.014167$$

Solución: $n = \dfrac{Ln \dfrac{58{,}235}{50{,}000}}{Ln\ (1+0.014167)}$

$$n = 10.838185 \; bimestres$$
$$n = 1 \; año \; 9 \; meses \; 20 \; días$$

$c)$ *Interpretación* :

La diferencia es mínima de sólo 2 días.

2.3. Tasa nominal, tasa efectiva y tasas equivalentes

La **tasa de interés anual** que se capitaliza m veces en una año se denomina tasa de interés nominal. La **tasa nominal** es la tasa de interés convenida en una operación financiera y se encuentra estipulada en los contratos por lo que también se conoce como **tasa contractual**.

Una **tasa equivalente** muy utilizada en múltiples operaciones financieras es la llamada tasa de interés anual efectiva o simplemente **tasa efectiva**, y se define como la tasa de interés capitalizable una vez al año que equivale a una tasa nominal capitalizable m veces al año. La tasa efectiva es la tasa de rendimiento que se obtiene al cabo de un año debido a la capitalización de intereses por lo tanto la tasa efectiva refleja el efecto de la reinversión. Se le conoce también como **rendimiento anual efectivo**.

Por lo tanto, si un capital se invierte a una tasa de interés capitalizable cada año, el monto compuesto al final del primer año es igual al monto obtenido a interés simple y a un año de plazo. Por lo cual la tasa efectiva anual se puede definir como la **tasa de interés simple** que produce el mismo interés en un año que la tasa nominal capitalizada m veces al año.

2.3.1. Tasas efectivas de interés por periodo de capitalización.

En una operación financiera a interés compuesto, será fundamental calcular la tasa de interés efectiva por cada periodo de capitalización. Ésta se refiere al costo o rendimiento que representa para un capital que se invierte considerando cada periodo de tiempo independientemente del plazo de la operación.

2.3.2. Relación de equivalencia entre tasas nominales y efectivas de Interés.

Las **tasas efectivas** son indicadores que ayudan a inversionistas y asesores financieros a tomar mejores decisiones para la inversión de capitales.

Las **tasas nominal** y **efectivas** son equivalentes cuando producen la misma cantidad de dinero al final del año.

En el interés simple, la tasa del 12% anual es proporcional al 6% semestral, al 3% trimestral y al 1% mensual. Además de la proporcionalidad de las tasas anteriores –ya que en ellas existe la misma relación entre sus valores y los periodos a que se refieren–, son a su vez equivalentes: a pesar de referirse a distintos periodos en igual tiempo, producen un mismo monto. Así, vemos que $100,000.00 al 12% en un año generan un monto de $112,000.00. Y si invertimos el mismo capital al 6% semestral en 2 semestres, formará exactamente el mismo monto:

Capital	$100,000.00
Intereses en el 1er. semestre	6,000.00
Intereses en el 2o. semestre	6,000.00

Monto en 2 semestres	$112,000.00
	==========

Por tanto, $100,000.00 al 1% mensual en 12 meses llegará a convertirse en el mismo monto anterior.

En conclusión: a **interés simple**, las tasas proporcionales son también equivalentes; pero no en el **interés compuesto**, debido a la capitalización de los intereses.

Lo anterior se puede corroborar mediante los cálculos siguientes:

Préstamo de $100,000.00 a las tasas capitalizables que se mencionan

	12 % anual	6% semestral	3% trimestral	1% mensual
Capital	100,000	100,000	100,000	100,000
Interés del periodo	12,000	6,000	3,000	1,000
Monto	112,000	106,000	103,000	101,000
Interés del periodo		6,360	3,090	1,010
Monto		112,360	106,090	102,010
Interés del periodo			3,182.70	1,020.10
Monto			109,272.70	103,030.10
Interés del periodo			3,278.18	1,030.30
Monto			112,550.88	104,060.40
Interés del periodo				1,040.60
Suma				105,101.00
Interés 6.º periodo				1,051.01
Suma				106,152.01
Interés 7.º periodo				1,061.52
Suma				107,213.53
Interés 8.º periodo				1,072.14
Suma				108,285.67
Interés 9.º periodo				1,082.85
Suma				109,368.52
Interés 10.º periodo				1,093.69
Suma				110,462.21
Interés 11.º periodo				1,104.62
Suma				111,566.83
Interés 12º periodo				1,115.67

Monto				112,682.50
TOTAL	112,000	112,360	112,550.88	112,682.50

Si a cada uno de los totales le restamos lo invertido al inicio (el capital), tenemos:

M – C	12,000	12,360	12,550.88	12,682.50

Y si este interés lo dividimos entre lo que se invirtió (C = $100,000.00), nos da:

I / C	0.12 = 12%	0.1236 = 12.36%	0.1255088 = 12.55088%	0.126825 = 12.6825%

Lo anterior demuestra que la tasa efectiva equivalente a una tasa del 12% anual capitalizable semestralmente es de 12.36%. Asimismo, la tasa efectiva equivalente al 12% anual capitalizable por trimestre es 12.55088%. De la misma manera, la tasa del 12% anual capitalizable por mes es equivalente al 12.6825% efectivo.

En conclusión, la **tasa efectiva** se puede obtener dividiendo el interés generado entre el capital inicial.

2.3.3. Fórmula para determinar la tasa efectiva anual (e) a partir de la tasa nominal.

$$e = \left(1 + \frac{J}{m}\right)^m - 1 \quad \text{.......... (31)}$$

2.3.4. Fórmula para determinar la tasa nominal (J) a partir de la tasa efectiva anual.

$$J = \left[(1+e)^{\frac{1}{m}} - 1\right] \times m \quad \text{.......... (32)}$$

Ejercicio15. ¿Cuál es la tasa nominal convertible mensualmente, equivalente al 18.81% efectivo?

Fórmulas: $J = \left[(1+e)^{\frac{1}{m}} - 1\right] \times m$ Datos: $e = 0.1881$, $m = 12$

Solución:

$$J=\left[(1+0.1881)^{\frac{1}{12}}-1\right]\times 12$$

$$J=0.173599=17.36\%$$

Lo anterior significa que la tasa del 17.3599% convertible mensualmente equivale al 18.81% efectivo.

Ejercicio 16. Obtener la tasa nominal si la tasa efectiva anual es del 15.4%:

a) Con capitalización semestral.

b) Con capitalización mensual.

c) Interpretar resultados.

$a)$ *Capitalización semestral*

Fórmulas: $J=\left[(1+e)^{\frac{1}{m}}-1\right]\times m$

Datos: $e=0.154$, $m=2$

Solución:

$$J=\left[(1+0.154)^{\frac{1}{2}}-1\right]\times 2$$

$$J=0.148488=14.8\%$$

$b)$ *Capitalización mensual* :

Fórmulas: $J=\left[(1+e)^{\frac{1}{m}}-1\right]\times m$

Datos: $e=0.154$, $m=12$

Solución:

$$J=\left[(1+0.154)^{\frac{1}{12}}-1\right]\times 12$$

$$J = 0.144092 = 14.4\%$$

$c)$ *Interpretación*:

La diferencia es mínima de 0.4 ppc. que representa el 2.7% menor con la capitalización mensual respecto a la capitalización semestral.

Ejercicio 17. ¿Cuál es la tasa efectiva equivalente al 18% convertible semestralmente?

Fórmulas: $e = \left(1 + \frac{J}{m}\right)^m - 1$ Datos: $J = 0.18$, $m = 2$

Solución:

$$e = \left(1 + \frac{0.18}{2}\right)^2 - 1$$

$$J = 0.1881 = 18.8\%$$

Esto quiere decir que la tasa del 18% convertible semestralmente equivale al 18.81% efectivo.

A continuación, comprobemos que las tres tasas son equivalentes. Para ello, utilizaremos el mismo ejercicio para las tres tasas:

Ejercicio 18. Cuál es el monto de $10,000.00 depositados durante un año si se tienen tres opciones:

a) a una tasa del 18% convertible semestralmente;

b) a una tasa del 17.3599% convertible mensualmente;

c) a una tasa del 18.81% efectivo.

a) a una tasa del 18% convertible semestralmente

Fórmulas: $M = C(1+i)^n$, $i = \frac{J}{m}$ $n = n_a \times m$ Datos: $C = 10,000$, $J = 0.18$, $m = 2$, $n_a = 1$

Solución: $i=\frac{0.18}{2}=0.09 \qquad n=2\times 1=2$

$$M=10,000\left(1+0.09\right)^{2}=11,881.00$$

b) a una tasa del 17.3599% convertible mensualmente:

Fórmulas:

$$M=C\left(1+i\right)^{n}$$

$$i=\frac{J}{m} \qquad n=n_a\times m$$

Datos:

$C=10,000$

$J=0.173599$

$m=12$

$n_a=1$

Solución: $i=\frac{0.173599}{12}=0.014467 \qquad n=12\times 1=12$

$$M=10,000\left(1+0.014467\right)^{12}=11,881.00$$

c) a una tasa del 18.81% efectivo

Fórmulas:

$$M=C\left(1+i\right)^{n}$$

$$i=\frac{J}{m} \qquad n=n_a\times m$$

Datos:

$C=10,000$

$J=0.1881$

$m=1$

$n_a=1$

Solución: $i=\frac{0.1881}{1}=0.18817 \qquad n=1\times 1=1$

$$M=10,000\left(1+0.1881\right)^{1}=11,881.00$$

2.4. Ecuación de valor

En **transacciones comerciales** o **financieras** es frecuente el intercambio de un paquete de obligaciones por otro con distintas condiciones en cuanto a tasas, pagos y vencimientos.

Una **ecuación de valor** es una igualdad que establece que la suma de los valores de un conjunto de deudas es igual a la suma de los valores de otro conjunto de deudas para reemplazar al conjunto original, una vez que sus valores de vencimiento se han trasladado a una fecha común llamada fecha focal o fecha de valuación. Ésta tratándose de operaciones a interés compuesto se puede elegir arbitrariamente ya que los resultados serán idénticos en cualquier fecha focal que se elija.

Las **ecuaciones de valor** son una de las **técnicas** más útiles de las **matemáticas financieras** ya que permiten enfrentar y **solucionar** diversos tipos de **problemas financieros**.

Para resolver estos problemas, se utilizan gráficas (de tiempo valor) en las que se representan las fechas de vencimiento de las obligaciones originales y de pagos, respectivamente. Se recomienda efectuar el procedimiento siguiente el cuál es el mismo que el visto para operaciones de interés simple:

ETAPA 1. **Calcular** el **monto a pagar** de cada una de las obligaciones originales a su vencimiento.

ETAPA 2. Hacer la **gráfica de tiempo-valor** que considere las fechas de vencimiento. Sobre la misma, se colocan los montos en el momento de su vencimiento.

ETAPA 3. Debajo de la gráfica de tiempo, se colocan los **pagos parciales,** al igual que las **deudas**, con sus fechas respectivas.

ETAPA 4. Se **determina** en la gráfica la **fecha focal** (de preferencia en donde coincida con algún pago; es recomendable que sea una incógnita, con el fin de realizar el menor número de operaciones).

ETAPA 5. Se realiza la **solución**. Para ello, se trasladan todas las cantidades a la fecha focal (se debe tomar en cuenta que la suma de todos los pagos debe cubrir la suma de las deudas).

ETAPA 6. Se **resuelven las operaciones**.

Estos pasos o etapas se desarrollarán en el siguiente ejercicio:

Ejercicio 19. El día de hoy una persona tiene las obligaciones siguientes:

a. Un préstamo de $30,000.00, otorgado hace 6 meses, con vencimiento el día de hoy, e impuesto con una tasa del 30% convertible mensualmente.

b. Una segunda deuda por $5,000.00 contraída hace tres meses, con vencimiento dentro de 9 meses y un tipo de interés del 36% capitalizable mensualmente.

c. Un tercer compromiso por $50,000.00 contratado hace cuatro meses, con una tasa del 24% nominal con capitalización mensual y con un vencimiento dentro de 6 meses.

d. Una cuarta deuda por $10,000.00 contratada hace un mes, con vencimiento dentro de 7 meses y una tasa del 42% compuesto mensualmente.

Hoy mismo, decide renegociar sus obligaciones con un rendimiento, en las nuevas operaciones, del 30% anual convertible mensualmente mediante 3 pagos:

- $40,000.00, el día de hoy.
- $35,000.00, dentro de 6 meses.
- El saldo, dentro de 12 meses.

Calcula el importe del saldo utilizando como fecha focal el mes 12.

ETAPA 1

Fórmula: $M = C\left(1+i\right)^{n}$

DEUDA (D)	OPERACIÓN $M = C(1+i)^n$	MONTO DE LA DEUDA
Da	$M_1 = 30,000(1+0.025)^6$	34,790.80
Db	$M_2 = 5,000(1+0.03)^{12}$	7,128.80
Dc	$M_3 = 50,000(1+0.02)^{10}$	60,949.72
Dd	$M_4 = 10,000(1+0.035)^8$	13,168.09
	TOTAL EN VALORES ABSOLUTOS	116,037.41

ETAPA 2

30 50 5 10 M_1 M_3 M_4 M_2

|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

-6 -4 -3 -1 0 2 6 7 9 12

40 35 X

ETAPA 3

30 50 5 10 M_1 M_3 M_4 M_2

|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

-6 -4 -3 -1 0 2 6 7 9 12

40 35 X

ETAPA 4

30 50 5 10 M_1 M_3 M_4 M_2 ***ff***

```
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
-6        -4   -3         -1    0        2                    6    7         9              12
```

ETAPA 5

M_{11}
M_{21}
M_{31}
M_{41}

30 50 5 10 M_1 M_3 M_4 M_2

```
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
-6        -4   -3         -1    0        2                    6    7         9              12
```

X

40 **35** M_5

M_6

ETAPA 6

i = 30% = 0.025 mensual

DEUDA	OPERACIÓN	RESULTADO
a	$M_{11} = 34,790.80(1+0.025)^{12}$	46,789.76
b	$M_{21} = 7,128.8(1+0.025)^{3}$	7,676.94
c	$M_{31} = 60,949.72(1+0.025)^{6}$	70,682.99
d	$M_{41} = 13,168.09(1+0.025)^{5}$	14,898.49
	SUMA DE DEUDAS	140,048.18

PAGO	OPERACIÓN	RESULTADO
a	$M_5 = 40,000(1+0.025)^{12}$	53,795.55
b	$M_6 = 35,000(1+0.025)^{6}$	40,589.27
c	X	X

	SUMA DE PAGOS	94,384.82 + X

Σ DEUDAS = Σ PAGOS

140048.18 = 94384.82 + X

140048.18 – 94384.82 = X

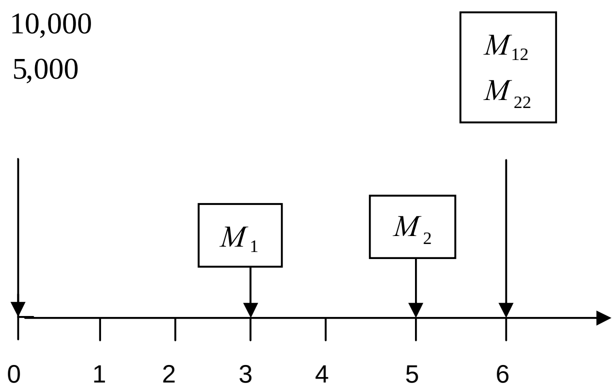
45663.36 = X

Entonces, el saldo se liquidaría con una cantidad igual a $ 45,663.36.

NOTA: En el interés compuesto, no importa la fecha focal que se elija para obtener el resultado, será siempre el mismo. Pero en el interés simple, hay una variación.

Ejercicio 20 . Una persona debe $10,000.00 pagaderos en 3 años con una tasa de interés del 18% convertible trimestralmente. También debe $5,000.00 a pagar en 5 años al 16% con capitalización semestral. Sin embargo el deudor propone efectuar un pago único a realizarse dentro de 6 años. El acreedor acepta pero con una tasa del 20% con capitalización mensual a partir del vencimiento de estas obligaciones. Calcular el valor del pago único que equivalga a la obligación original, planteando las ecuaciones equivalentes a una fecha focal en el año 6.

$a)\,Diagrama\;\;de\;valor:$



X

$b)$ *Ecuación de valor*: $M_{12} + M_{22} = X$

$c)$ *Cálculo de* M_1:

Fórmulas: $M = C(1+i)^n$ $\quad i = \frac{J}{m} \quad n = n_a \times m$

Datos: $C = 10{,}000$ $\quad J = 0.18$ $\quad m = 4$ $\quad n_a = 3$

Solución: $i = \frac{0.18}{4} = 0.045 \qquad n = 4 \times 3 = 12$

$$M_1 = 10{,}000(1 + 0.045)^{12} = 16{,}958.81$$

$c_1)$ *Cálculo de* M_{12}:

Fórmulas: $M = C(1+i)^n$ $\quad i = \frac{J}{m} \quad n = n_a \times m$

Datos: $C = 16{,}958.81$ $\quad J = 0.20$ $\quad m = 12$ $\quad n_a = 3$

Solución: $i = \frac{0.20}{12} = 0.016667 \qquad n = 12 \times 3 = 36$

$$M_{12} = 16{,}958.81(1 + 0.016667)^{36} = 30{,}748.53$$

$d)$ *Cálculo de* M_2:

Fórmulas: $M = C(1+i)^n$ $\quad i = \frac{J}{m} \quad n = n_a \times m$

Datos: $C = 5{,}000$ $\quad J = 0.16$ $\quad m = 2$ $\quad n_a = 5$

Solución: $i = \frac{0.16}{2} = 0.08 \qquad n = 5 \times 2 = 10$

$$M_2 = 5{,}000(1+0.08)^{10} = 10{,}794.62$$

$d_1)$ *Cálculo de* M_{22}:

Fórmulas:

$$M = C(1+i)^n$$

$$i = \frac{J}{m} \quad n = n_a \times m$$

Datos:

$C = 10{,}794.62$
$J = 0.20$
$m = 12$
$n_a = 1$

Solución:

$$i = \frac{0.20}{12} = 0.016667 \qquad n = 12 \times 1 = 12$$

$$M_{22} = 10{,}974.62(1+0.016667)^{12} = 13{,}162.92$$

$c)$ *Fecha focal: año* 6:

$$M_{12} + M_{22} = X$$

$$30{,}748.53 + 13{,}162.92 = X$$
$$X = 43{,}911.40$$

$d)$ *Interpretación*:

Se puede comprobar este resultado efectuando los cálculos a diferentes fechas focales los cuales producirán resultados idénticos.

Las aplicaciones del interés compuesto además de utilizarse en muchas cuentas bancarias trascienden a las áreas de negocios y en los planes de gobierno sirviendo como indicador de la salud de la economía nacional y como parámetro de relación con otros países.

Las tasas de cambio son de gran importancia para el análisis de la economía y sus predicciones de comportamiento futuro.

La ley del interés compuesto se denomina frecuentemente como la ley de crecimiento orgánico debido a que se puede aplicar a cualquier fenómeno cuyo comportamiento en el tiempo se modifique a una tasa constante. Existe un gran número de situaciones de la naturaleza, en la ciencia y en los negocios en los que resulta de suma utilidad el conocimiento de la ley del interés compuesto al aplicarse con propiedad.

Si ciertos fenómenos han experimentado variaciones constantes durante algunos años, las tasas de variación pueden resultar de gran utilidad para efectuar predicciones a corto y mediano plazo.

Bibliografía del tema 2

AYRES F. *Matemáticas financieras* Serie Schauman, McGraw-Hill, México, 1991.

DIAZ Mata A. y V. M., Gómez Aguilera, *Matemáticas financieras,* McGraw-Hill México, 2003.

PORTUS L. *Matemáticas financieras* 3ª. ed., McGraw-Hill, México, 1997.

TOLEDANO Castillo M. A. y Hummmeltine L.E., *Matemáticas financieras*, CECSA, México, 2003.

VILLALOBOS José L., *Matemáticas financieras,* Grupo Editorial Iberoamericano, México, 2001.

VIDAURRI Aguirre Héctor M., *Matemáticas financieras,* Thomson, México, 2004.

Actividades de Aprendizaje

A.2.1. A partir del estudio de la bibliografía específica sugerida estudiar cada uno de los conceptos principales, sus fórmulas y aplicaciones.

A.2.2. Investigar y realizar por lo menos 3 ejercicios o problemas situacionales de cada uno de los conceptos estudiados utilizando la bibliografía sugerida.

A.2.3. Elaborar un glosario de los principales conceptos matemáticos estudiados.

A.2.4. Elaborar un listado de fórmulas de cada uno de los conceptos matemáticos estudiados.

A.2.5. Investigar el concepto de interés compuesto a capitalización continua y sus aplicaciones.

A.2.6. Estudiar el concepto de inflación y los procedimientos de cálculo del Índice Nacional de Precios al Consumidor (INCP).

A.2.7. Investigar las características del índice de precios y cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores (IPC) y la utilización del interés compuesto en su apreciación.

A.2.8. Examinar la aplicación de ecuaciones de valor a interés compuesto en un flujo de caja en construcción de vivienda.

A.2.9. Estudiar una aplicación de ecuaciones de valor a interés compuesto en la reestructuración de un crédito automotriz.

A.2.10. Visite las páginas www.aulafacil.com, y compare los temas estudiados con la propuesta que se expresa e indique sus conclusiones.

Cuestionario de autoevaluación

1. Explique brevemente los conceptos de interés compuesto, periodo de capitalización y frecuencia de conversión de intereses.
2. Diga qué es más productivo, ¿invertir con interés simple o interés compuesto?, ¿por qué?
3. ¿Por qué es más redituable el 30% anual compuesto por meses que el 30% capitalizable por trimestres?
4. ¿Qué será más productivo: 36% compuesto por semestre o 33% compuesto por semanas, ¿Por qué?
5. Explique los conceptos de tasas equivalentes, tasa efectiva y tasa nominal.
6. ¿Cuál es la tasa nominal mensual equivalente al 35% compuesto por trimestres?
7. ¿Qué es más productivo: una inversión al 27% de interés capitalizable por quincenas o el 29% compuesto por cuatrimestres?
8. ¿Cuál es la tasa de interés efectiva que corresponde a un 39% nominal semanal?
9. Explique brevemente los conceptos de ecuación de valor equivalente, fecha focal y diagrama de tiempo.
10. ¿Qué usos tiene un diagrama de tiempo y que datos se representan en él?

Examen de autoevaluación

1. ¿Qué monto recibirá una persona dentro de 4 meses si invierte $45 000.00 durante 4 meses y le otorgan una tasa de interés compuesto mensual del 2%?
   a) $ 48 600.00
   b) $ 41 400.00
   c) $ 41 573.25
   d) $ 48 709.45
   e) $ 52 488.15

2. ¿Cuál es el valor presente de $ 50 000.00 que vencen dentro de 8 meses, si la tasa de interés compuesto es del 1% capitalizable mensualmente?
   a) $ 46 000.00
   b) $ 50 512.25
   c) $ 54 142.83
   d) $ 54 000.00
   e) $ 46 174.16

3. ¿Cuántos meses tardarán $ 25 000.00 en convertirse en $ 38 949.19 a una tasa de interés mensual compuesto del 3%?
   a) 5 meses
   b) 12 meses
   c) 15 meses
   d) 16 meses
   e) 18 meses

4. ¿Qué tasa de interés mensual efectiva permite a un capital de $12 500.00 convertirse en $ 14 292.37 al cabo de 9 meses?

a) 1.5%

b) 1.8%

c) 1.2%

d) 2.0%

e) 1.0%

5. ¿Que monto acumulado tendré dentro de 4 meses si invierto $25 000 a una tasa mensual constante del 0.6%?

a) $ 24 408.89

b) $ 25 600.00

c) $ 25 605.42

d) $ 31 561.92

e) $ 26 142.89

6. Qué capital se requiere en este momento para disponer de $ 300 000.00 dentro de 3 años, si se otorga una tasa de interés compuesto del 15% anual capitalizable mensualmente hora debe invertirse:

a) $191,822.75

b) $176,542.45

c) $197,254.87

d) $186,656.05

e) $206,896.55

7. Cuántas semanas tardará un capital de $1 000.00 en triplicarse, si se considera una tasa de interés nominal del 14% anual convertible semanalmente.

a) 408

b) 324

c) 364

d) 380

e) 356

8. Un inversionista depositó $125 800 en una institución de crédito que otorga un interés compuesto anual del 12% capitalizable mensualmente, con la intención de mantenerlo durante 5 años. Sin embargo al cabo de 3 años retiró $ 60 000. ¿Qué monto tendrá al finalizar el periodo programado de 5 años?

- **a)** $ 201 280.00
- **b)** $ 137 749.12
- **c)** $ 152 356.36
- **d)** $ 148 729.23
- **e)** $ 169 990.12

9. Se recibe mercancía por $25 000 en este momento y $50 000 dentro de 6 meses. Si se pagan $10 000 dentro de un mes. Cuál será su saldo a pagar en el tercer mes si consideramos una tasa de interés compuesto del 18% anual capitalizable mensualmente. Considere como fecha focal el tercer mes.

- **a)** $ 57 367.53
- **b)** $ 63 671.89
- **c)** $ 65 000.00
- **d)** $ 64 523.67
- **e)** $ 63 655.56

10. Una tasa nominal anual del 18% capitalizable trimestralmente equivale a una tasa efectiva anual de:

- **a)** 18.25%
- **b)** 19.25%
- **c)** 20.45%
- **d)** 21.21%
- **e)** 21.00%

Tema 3. Anualidades

Objetivo particular

Al finalizar la unidad el estudiante deberá diferenciar entre los diversos tipos de anualidades, sus características y fórmulas correspondientes para poder obtener el monto futuro de una anualidad, su valor presente o actual, su tasa de interés nominal y efectiva por periodo y anual, así como el número de periodos y plazo de las operaciones. Tendrá la capacidad de interpretar resultados y comparar con otras situaciones financieras para la toma de decisiones.

Temario detallado

3. **Anualidades**.
    - 3.1 Concepto.
    - 3.2 Anualidades vencidas.
    - 3.3 Anualidades anticipadas.
    - 3.4 Anualidades diferidas.

Introducción

En préstamos como en adquisiciones de bienes generalmente los pagos que se efectúan son iguales en intervalos de tiempo, y todo indica que la medida común es un año, a menos que se indique lo contrario, y a veces sucede que son quincenales, mensuales, bimestrales, trimestrales, tanto para tasas como para los pagos en el tiempo, cuando esto pasa, se habla de convertibilidad de las tasas, cuando coincide tiempo y tasa y el pago de la deuda, o bien cuando todos difieren. El cobro quincenal del sueldo, el pago mensual de la renta de la casa o del departamento, los abonos mensuales para pagar un automóvil, el pago anual de la prima de seguro del mismo, los dividendos semestrales sobre las acciones, etc. Es así que hablamos de anualidades.

3.1. Concepto.

Una **anualidad** se define como una serie de pagos generalmente iguales que se realizan a intervalos de tiempo iguales. En su sentido más amplio el concepto anualidad se usa para indicar el pago o depósito de una suma fija a intervalos regulares de tiempo, periodos que pueden ser mensuales, bimestrales, trimestrales, cuatrimestrales, semestrales, etc.

Son ejemplo de anualidades los salarios quincenales o mensuales, los fondos de amortización y depreciación, los pagos a plazos, las pensiones, los pagos de primas de pólizas de seguros de vida, de automóviles, las rentas producidas por los fondos de un fideicomiso, los pagos para amortizar créditos hipotecarios etc.

3.1.1. Clasificación de las anualidades.

Las anualidades se clasifican según ciertos criterios expuestos en la siguiente tabla:

Criterio	Tipo
▪ Intereses	Simples ---------- Generales
▪ Tiempo	Ciertas ---------- Contingentes
▪ Pagos	Ordinarias -------- Anticipadas
▪ Iniciación	Inmediatas ------- Diferidas

Cuadro 3.1. Clasificación de anualidades

Las **anualidades simples** son aquellas en que los periodos de pago coinciden con los periodos de capitalización de intereses. En las generales no coinciden.

En las anualidades ciertas se conocen las fechas del primer pago y del último pago con certeza. En las **contingentes** pueden no conocerse la fecha de iniciación, o la fecha de terminación, o ambas a la vez.

Las **anualidades ordinarias** se llaman también vencidas y es cuando los pagos o depósitos se efectúan ordinariamente al final de cada periodo. En cambio, en las **anualidades anticipadas** los pagos o depósitos se realizan al principio de cada periodo de tiempo.

Las **anualidades inmediatas** son cuando el primer pago se realiza en el primer periodo de la operación financiera y en las diferidas existe un periodo que se llama de “gracia” por lo que se pospone el primer pago o depósito un lapso de tiempo convenido.

3.1.2. Nomenclatura

C Representa el capital inicial, llamado también principal. Suele representarse también por las letras A o P (valor presente).

M Representa el capital final, llamado también monto o dinero incrementado. Es el valor futuro de C.

R Es la renta, depósito o pago periódico.

J Es la tasa nominal de interés calculada para un periodo de un año. Se expresa en tanto por uno o tanto por ciento.

i Es la tasa de interés por periodo de tiempo y representa el costo o rendimiento por periodo de capitalización de un capital ya sea producto de un préstamo una cantidad que se invierte. Es el cociente de dividir la tasa nominal entre la frecuencia de conversión m

m Es la frecuencia de conversión o de capitalización y representa el número de veces que se capitaliza un capital en un año.

n_a Es el número de años que permanece prestado o invertido un capital.

n Es el número de periodos de que consta una operación financiera a interés compuesto.

Finalmente, para estudiar las anualidades, y tomando en cuenta su clasificación, en cada caso, se deberán resolver los problemas siguientes:

a. Determinar el monto (*M*) o valor actual (*C*) de una serie de anualidades.
b. Establecer el valor de la anualidad (renta = *R*) en la etapa del monto o del valor actual.
c. Precisar la tasa (*i*) en función del monto o del valor actual.
d. Determinar el tiempo (*n*) en los problemas de monto y de valor actual (más el tiempo diferido, cuando se trate de esta clase de anualidades).

Es muy importante señalar que lo mismo que en el interés compuesto, en donde las variables *n* (números de pagos) e *i* (tasa de interés), se expresan en la misma medida de tiempo, en las anualidades se agrega una variable, la renta (*R*), que debe estar en la misma medida de tiempo.

3.2. Anualidades vencidas

3.2.1. Monto de una anualidad ordinaria

El monto de las anualidades ordinarias o vencidas es la suma de los montos de todas y cada una de las rentas que se realizan hasta el momento de realizar la última de las mismas.

Ejercicio 1. Una persona decide depositar $5,000.00 al fin de cada mes, en una institución financiera que le abonará intereses del 12% convertible mensualmente: el 1% mensual, durante 6 meses. Se pide calcular y conocer el monto que se llegue a acumular al final del plazo indicado.

CONCEPTO	CANTIDAD
Depósito al final del primer mes	5,000.00
Intereses por el segundo mes (5000 x 0.01)	50.00
Suma	5,050.00
Depósito al final del segundo mes	5,000.00
Monto al final del segundo mes	10,050.00
Intereses por el tercer mes (10050 x 0.01)	100.50
Depósito al final del tercer mes	5,000.00
Monto al final del tercer mes	15,150.50
Intereses por el cuarto mes (15150.50 x 0.01)	151.51

Depósito al final del cuarto mes	5,000.00
Monto al final del cuarto mes	20,302.01
Intereses por el quinto mes (20302.01 x 0.01)	203.02
Depósito al final del quinto mes	5,000.00
Monto al final del quinto mes	25,505.03
Intereses por el sexto mes (25505.03 x 0.01)	255.05
Depósito al final del sexto mes	5,000.00
Monto final (al término del sexto mes)	30,760.08

Ahora bien, si el monto total es igual a la suma de los montos de cada anualidad, llegaremos al mismo resultado:

Monto de la primera renta: $M = 5,000(1.01)^5$	5,255.05
Monto de la primera renta: $M = 5,000(1.01)^4$	5,203.02
Monto de la tercera renta: $M = 5,000(1.01)^3$	5,151.51
Monto de la tercera renta: $M = 5,000(1.01)^2$	5,100.50
Monto de la quinta renta: $M = 5,000(1.01)^1$	5,050.00
Monto de la sexta renta $M = 5,000(1.01)^0$	5,000.00
Monto total	30,760.08

3.2.2. Fórmulas para calcular el monto futuro de una anualidad simple, cierta, ordinaria

Se conoce la renta, la tasa nominal, la frecuencia de conversión y el plazo de tiempo:

$$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad \text{.. (33)}$$

siendo: $i = \dfrac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$

Ejercicio 2. Si se aplica la fórmula anterior a los datos del Ejercicio 1, se tiene:

Fórmulas: $M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$

Datos:
$R = 5,000$
$J = 0.12$
$m = 12$
$n = 6$

Solución: $i = \frac{0.12}{12} = 0.01$

$$M = 5,000\frac{(1+0.01)^6 - 1}{0.01} \qquad M = 30,760.08$$

Ejercicio 3. Calcular el monto futuro de una serie de depósitos semestrales de \$20,000.00 durante 2.5 años en una cuenta bancaria que rinde:

a) El 10% capitalizable semestralmente,

b) El 12% capitalizable semestralmente,

c) Interpretar resultados.

$a)\ Tasa\ 10\%:$

Fórmulas: $M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$

Datos:
$R = 20,000$
$J = 0.10$
$m = 2$
$n_a = 2.5$

$$i = \frac{J}{m} \quad y \quad n = n_a \times m$$

Solución: $i = \frac{0.10}{2} = 0.05 \qquad n = 2 \times 2.5 = 5$

$$M = 20,000\frac{(1+0.05)^5 - 1}{0.05} \qquad M = 110,512.62$$

$b)$ *Tasa* 12% :

Fórmulas: $M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ Datos: $R = 20{,}000$, $J = 0.12$, $m = 2$, $n_a = 2.5$

$$i = \frac{J}{m} \quad y \quad n = n_a \times m$$

Solución: $i = \frac{0.12}{2} = 0.06$ $n = 2 \times 2.5 = 5$

$$M = 20{,}000\frac{(1+0.06)^5 - 1}{0.06} \qquad M = 112{,}741.86$$

$c)$ *Interpretación* :

Existe una diferencia de $2,229.24 lo que representa un 2.02% al aumentar la tasa 2 puntos porcentuales.

3.2.3. Valor actual de una anualidad ordinaria.

Cuando la época del cálculo coincide con la iniciación de la serie de pagos o rentas, el valor equivalente de la serie es actual. El lapso que transcurre entre la fecha de la entrega del valor actual y el vencimiento de la primera anualidad será igual a cada periodo que separa a las demás rentas.

El valor presente o actual de las anualidades ordinarias se puede presentar en alguna de estas dos modalidades:

a. Como el descuento de una serie de anualidades, que vencen escalonadamente y están separadas por intervalos iguales de tiempo.
b. Como la determinación de un capital que, invertido a interés, proporciona una serie de rentas futuras.

Ejercicio 4. Se tienen seis pagarés, con vencimientos escalonados en forma cuatrimestral, cada uno de $25,000.00, y se quieren liquidar, el día de hoy, siendo una tasa del 6% cuatrimestral.

Determinemos el valor actual o presente de cada documento:

OPERACIÓN $C=M\left(1+i\right)^{-n}$		RESULTADO
1era. renta:	$C=25,000\left(1+0.06\right)^{-1}$	23,584.91
2da. renta	$C=25,000\left(1+0.06\right)^{-2}$	22,249.91
3ra. renta	$C=25,000\left(1+0.06\right)^{-3}$	20,990.48
4a. renta	$C=25,000\left(1+0.06\right)^{-4}$	19,802.34
5a. Renta	$C=25,000\left(1+0.06\right)^{-5}$	18,681.45
6a. Renta	$C=25,000\left(1+0.06\right)^{-6}$	17,624.01
VALOR ACTUAL TOTAL		122,933.10

Ahora bien, ¿qué cantidad habrá que invertir al 6% cuatrimestral, para tener derecho a recibir seis rentas de $25,000.00 cada una? Conforme a la resolución anterior, se sabe que el valor actual es de $122,933.10. Comprobemos si con el importe de seis pagos de $25,000.00 cada uno el deudor salda su cuenta.

Capital invertido	122,933.10
Intereses del 1er. cuatrimestre (0.06)	7,375.98
Suma	130,309.08
Menos el pago de la 1a. renta	25,000.00
Saldo al final del 1er. cuatrimestre	105,309.08
Intereses del saldo (0.06)	6,318.55
Suma	111,627.63
Menos el pago de la 2a. renta	25,000.00
Saldo al final del 2o. cuatrimestre	86,627.63

Intereses del saldo (0.06)	5,197.65
Suma	91,825.28
Menos el pago de la 3a. renta	25,000.00
Saldo al final del 3er. cuatrimestre	66,825.28
Intereses del saldo (0.06)	4,009.52
Suma	70,834.80
Menos el pago de la 4a. renta	25,000.00
Saldo al final del 4o. cuatrimestre	45,834.80
Intereses del saldo (0.06)	2,750.09
Suma	48,584.89
Menos el pago de la 5a. renta	25,000.00
Saldo al final del 5o. cuatrimestre	23,584.89
Intereses del saldo (0.06)	1,415.09
Suma	24,999.98
Menos el pago de la 6a. renta	25,000.00
SALDO FINAL	–0.02*

* Por el redondeo de cifras

Dado lo anterior, se debe encontrar el valor actual de cada pago para determinar el valor presente total de la serie de rentas. Podemos decir que el valor actual es igual a la suma de los valores actuales de cada renta.

3.2.4. Fórmulas para calcular el valor presente de una anualidad simple, cierta, ordinaria

$$C = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \quad \text{...} (34)$$

en donde: $i = \frac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$

Ejercicio 5. Utilizando los datos del Ejercicio 4, obtener su valor presente o actual.

Fórmulas: $C = R\,\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

Datos:

$R = 25,000$

$i = 0.06$

$m = 4$

$n = 6$

Solución:

$$C = 25,000\,\frac{1-(1+0.06)^{-6}}{0.06} \qquad C = 122,933.11$$

Ejercicio 6. Cual es el valor en efectivo de una anualidad de $1,000.00 al final de cada 3 meses durante 5 años con un interés del 16% capitalizable trimestralmente. Comprobar calculando el monto futuro de la operación mediante interés compuesto y anualidad e interpretar resultados.

$a)$ *Valor presente*:

Fórmulas: $C = R\,\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

Datos:

$R = 1,000$

$J = 0.16$

$m = 4$

$n_a = 5$

$$i = \frac{J}{m} \qquad y \qquad n = n_a \times m$$

Solución: $i = \dfrac{0.16}{4} = 0.04 \qquad n = 4 \times 5 = 20$

$$C = 1,000\,\frac{1-(1+0.04)^{-20}}{0.05} \qquad C = 13,590.33$$

$b)$ *Comprobación*:

$b_1)$ *Monto de una anualidad*:

Fórmula $\quad i = \frac{J}{m} \quad y \quad n = n_a \times m$

Solución: $\quad i = \frac{0.16}{4} = 0.04 \quad n = 4 \times 5 = 20$

$$M = 1{,}000 \frac{(1+0.04)^{20} - 1}{0.04} \qquad M = 29{,}778.08$$

$b_2)$ *Monto a interés compuesto*:

Fórmulas : $M = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}$

Datos:
$R = 1{,}000$
$J = 0.16$
$m = 4$
$n_a = 5$

: $M = C(1+i)^n$
$i = \frac{J}{m} \quad n = n_a \times m$

Datos:
$C = 13{,}590.33$
$J = 0.16$
$m = 4$
$n_a = 5$

Solución: $\quad i = \frac{0.16}{4} = 0.04 \quad n = 4 \times 5 = 20$

$$M = 13{,}590.33(1+0.04)^{20} = 29{,}778.08$$

$c)$ *Interpretación*:

Los resultados son idénticos al obtener el monto futuro de una anualidad simple, cierta, ordinaria y el monto futuro a interés compuesto.

3.2.5. Fórmulas para calcular la renta de una anualidad simple, cierta, ordinaria.

a) Si se conoce el capital inicial, la tasa de interés nominal o por periodo de capitalización, la frecuencia de conversión y el plazo de tiempo o número de periodos de capitalización:

$$R = \frac{Ci}{1-(1+i)^{-n}} \qquad \text{.. (35)}$$

siendo: $i = \frac{J}{m} \quad y \quad n = n_a \times m$

b) Si se conoce el monto futuro, la tasa de interés nominal o por periodo de capitalización, la frecuencia de conversión y el plazo de tiempo o número de periodos de capitalización:

$$R = \frac{Mi}{(1+i)^{n}-1} \qquad \text{.. (36)}$$

siendo: $i = \frac{J}{m} \quad y \quad n = n_a \times m$

Ejercicio 7. ¿Cuál es la renta mensual que se requiere para obtener \$30,760.08 durante 6 meses si se invierte con el 12% capitalizable mensualmente?

Fórmulas: $R = \frac{Mi}{(1+i)^{n}-1}$

Datos:

$M = 30,760.08$

$J = 0.12$

$m = 12$

$n_a = 0.5$

$$i = \frac{J}{m} \quad y \quad n = n_a \times m$$

Solución: $i = \frac{0.12}{12} = 0.01 \qquad n = 12 \times 0.5 = 6$

$$R = \frac{30,760.08 \times 0.01}{(1+0.01)^6 - 1} \qquad R = 5,000.00$$

Ejercicio 8. Una empresa debe de pagar dentro de 6 meses la cantidad de \$200,000.00. Para asegurar el pago el contralor propone por liquidez reunir un fondo con depósitos mensuales que paga el 10% capitalizable mensualmente.

a) Obtener el valor de los depósitos.

b) ¿Cuál es el valor acumulado al 4° mes?

c) Interpretar resultados.

a) Calculo de R

Fórmulas: $R = \frac{Mi}{(1+i)^n - 1}$

Datos:

$M = 200,000.00$

$J = 0.10$

$m = 12$

$n_a = 0.5$

$$i = \frac{J}{m} \quad y \quad n = n_a \times m$$

Solución: $i = \frac{0.10}{12} = 0.008333 \qquad n = 12 \times 0.5 = 6$

$$R = \frac{200,000 \times 0.008333}{(1+0.018)^6 - 1} \qquad R = 32,645.61$$

$b)$ *Cálculo al* 4° *mes*:

Fórmulas: $M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$

Datos:

$R = 32,645.61$

$J = 0.10$

$m = 12$

$n_a = 0.333333$

$$i = \frac{J}{m} \quad y \quad n = n_a \times m$$

Solución: $i=\dfrac{0.10}{12}=0.008333$ $n=12\times 0.333333=4$

$$M=32{,}645.61\frac{(1+0.008333)^{4}-1}{0.008333} \qquad M=132{,}223.80$$

$c)$ *Interpretación* :

Es posible calcular con base en valor de la renta obtenido, cualquier monto en algún mes determinado.

Ejercicio 9. Una persona adquiere a crédito una computadora en 4 meses.

Calcular el pago mensual si el precio de contado es de $19,750.00.

a) A una tasa de interés del 21.6%.

b) Si la tasa aumenta en 2 pcc.

c) Interpretar resultados.

$a)$ *Tasa* 21.6% :

Fórmulas: $R=\dfrac{Ci}{1-(1+i)^{-n}}$

Datos:
$C=19{,}750.00$
$J=0.216$
$m=12$
$n_a=0.333333$

$$i=\frac{J}{m} \quad y \quad n=n_a\times m$$

Solución: $i=\dfrac{0.216}{12}=0.018$ $n=12\times 0.333333=4$

$$R=\frac{19{,}750\times 0.018}{1-(1+0.018)^{-4}} \qquad R=5{,}161.67$$

$b)\ Tasa\ 23.6\%:$

Fórmulas: $$R=\frac{Ci}{1-(1+i)^{-n}}$$

Datos:

$C = 19{,}750.00$
$J = 0.236$
$m = 12$
$n_a = 0.333333$

$$i=\frac{J}{m} \quad y \quad n=n_a\times m$$

Solución: $$i=\frac{0.236}{12}=0.0196667 \qquad n=12\times 0.333333=4$$

$$R=\frac{19{,}750\times 0.0196667}{1-(1+0.0196667)^{-4}} \qquad R=5{,}182.62$$

$c)\ Interpretación:$

Existe una diferencia de $20.95 lo que representa un 0.41% al aumentar la tasa 2 puntos porcentuales.

3.2.6. Fórmulas para calcular el tiempo o plazo en una anualidad simple, cierta, ordinaria:

a) Si se conoce el capital inicial, la renta, la tasa nominal o la tasa efectiva por periodo y la frecuencia de conversión:

$$n=\frac{Ln\ \dfrac{1}{1-\frac{C}{R}i}}{Ln\ (1+i)} \quad \text{...} \ (37)$$

en donde: $$i=\frac{J}{m}$$

b) Si se conoce el monto futuro, la renta, la tasa nominal o la tasa efectiva por periodo y la frecuencia de conversión:

$$n=\frac{Ln\left(\frac{M}{R}i+1\right)}{Ln\,(1+i)} \quad \text{.. (38)}$$

en donde: $i=\frac{J}{m}$

Ejercicio 10. ¿Cuántos pagos deben realizarse para llegar a acumular $30,760.08 si se depositan $5,000.00 mensuales, con una tasa de interés del 12% compuesto mensual?

Fórmulas: $n=\frac{Ln\left(\frac{M}{R}i+1\right)}{Ln\,(1+i)}$

Datos:

$M=30,760.08$

$R=5,000.00$

$J=0.12$

$m=12$

$$i=\frac{J}{m} \quad y \quad n=n_a\times m$$

Solución: $i=\frac{0.12}{12}=0.01$

$$n=\frac{Ln\left(\frac{30,760.08}{5,000}0.01+1\right)}{Ln\,(1+0.01)}=6\ meses$$

Ejercicio 11. Cuántos pagos bimestrales vencidos de $1,550.00 se tendrían que hacer para saldar una deuda pagadera hoy de $8,000.00 si el 1er. pago se realiza dentro de 2 meses y el interés es del 2.75% bimestral.

a) Expresar el resultado en años, meses y días.

b) Calcular el monto del pago último (2 casos: 4 pagos de $1,550.00 y un 5° pago mayor de esta cantidad o 5 pagos de $1,550.00 y uno 6° menor).

c) Comprobar estos resultados con base en sus respectivos valores actuales.

$a)\ N°\ de\ pagos\ y\ plazo:$

Fórmulas:

$$n=\frac{Ln\ \dfrac{1}{1-\frac{C}{R}i}}{Ln\ (1+i)}$$

Datos:

$C=8{,}000.00$

$R=1{,}550.00$

$i=0.0275$

$m=6$

$$n=\frac{Ln\ \dfrac{1}{1-\frac{8{,}000}{1{,}550}0.0275}}{Ln\ (1+0.0275)}$$

Solución:

$$n=5.642592\ \ bimestres$$

$$n=0\ años\ 11\ meses\ 9\ días$$

$b)\ Monto\ último\ pago:$

$b_1)\ 4\ pagos\ iguales\ y\ uno\ mayor:$

Fórmulas:

$$M=R\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

Datos:

$R=1{,}550.00$

$i=0.0275$

$n=5$

Solución:

$$M_1=\frac{(1+0.0275)^5-1}{0.0275}=8{,}188.13$$

Valor del adeudo después de 5 bimestres:

Fórmulas: $M = C(1+i)^n$ Datos: $C = 8{,}000.00$, $i = 0.0275$, $n = 5$

Solución: $M_2 = 8{,}000(1+0.0275)^5 = 9{,}162.19$

Diferencia $M_1 - M_2 = 9{,}162.19 - 8{,}188.13 = 974.06$

Ultimo pago: $R + (M_1 - M_2) = 1{,}550.00 + 974.06 = 2{,}524.06$

Conclusión:

Serán entonces 4 pagos de $1,550.00 y uno mayor de $2,524.06

$b_2)$ 5 *pagos iguales y uno menor*:

Fórmulas: $M = C(1+i)^n$ Datos: $C = 974.06$, $i = 0.0275$, $n = 1$

Solución: $M_3 = 974.06(1+0.0275)^1 = 1{,}000.84$

Ultimo pago: $\$1{,}000.84$

Conclusión:

Serán entonces 5 pagos de 1,550.00 y uno menor de $1,000.84

3.2.7. Fórmulas para calcular la tasa de interés de una anualidad simple, cierta, ordinaria.

Debido a que la tasa de interés se encuentra en el numerador y en el denominador de las formulas de monto y valor actual de una anualidad simple, cierta, ordinaria, no se puede despejar por lo que se usa para su calculo, el **procedimiento** llamado de **prueba** y **error a base de iteraciones sucesivas**.

También se puede utilizar una calculadora programable, calculadora financiera o una computadora con software financiero.

a) Si se conoce el capital inicial, la renta, la frecuencia de conversión y el plazo de tiempo o número de periodos de capitalización:

$$\frac{C}{R}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad (39)$$

siendo: $i=\frac{J}{m}$ y $n=n_a\times m$

b) Si se conoce el monto futuro, la renta, la frecuencia de conversión y el plazo de tiempo o número de periodos de capitalización:

$$\frac{M}{R}=\frac{(1+i)^{n}-1}{i} \qquad (40)$$

siendo: $i=\frac{J}{m}$ y $n=n_a\times m$

Ejercicio 12. ¿A qué tasa se aplicó una serie de 6 pagos mensuales de $5,000.00 cada uno, para acumular, al final de los mismos, $30,760.08 ?

Fórmulas: $\frac{M}{R}=\frac{(1+i)^{n}-1}{i}$

Datos:
$M=30,760.08$
$R=5,000.00$
$m=1$
$n=6$

Solución:

$$\frac{30,760.08}{5,000}=6.152016=\frac{(1+i)^{6}-1}{i}$$

$$Si \;\; i = 0.005 \qquad \frac{1.005^{6}-1}{0.005} = 6.075502$$

$$Si \;\; i = 0.012 \qquad \frac{1.012^{6}-1}{0.012} = 6.182906$$

$$Si \;\; i = 0.01 \qquad \frac{1.01^{6}-1}{0.01} = 6.152015$$

$$\therefore \;\; i = 0.01\, mensual = 12.0\%\; anual$$

Ejercicio 13. Calcular con qué tasa de rendimiento nominal anual se acumulan $400,000.00 con 15 depósitos semestrales de $12,000.00.

a) Tasa de interés semestral.

b) Tasa nominal.

c) Tasa efectiva anual.

d) interpretar resultados.

$a)\; Cálculo\;\; de\;\; la\;\; tasa\;\; semestral:$

Fórmulas: $$\frac{M}{R} = \frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

Datos:

$M = 400,000.00$

$R = 12,000.00$

$m = 2$

$n_a = 7.5$

$$n = m \times n_a$$

Solución: $$n = 12 \times 7.5 = 15$$

$$\frac{400,000}{12,000} = 33.333333 = \frac{(1+i)^{15}-1}{i}$$

$$Si \;\; i = 0.10 \qquad \frac{1.10^{15}-1}{0.10} = 31.772482$$

$$Si \;\; i = 0.105 \qquad \frac{1.105^{15}-1}{0.105} = 33.060035$$

$$Si \;\; i = 0.106 \qquad \frac{1.106^{15}-1}{0.106} = 33.324398$$

$$\therefore\ i = 0.106\ semestral = 10.6\%\ semestral$$

$b)$ *Cálculo de la tasa nominal*:

Fórmulas: $J = i \times n$

Datos: $i = 0.106$, $m = 2$, $n_a = 1$

$$n = m \times n_a$$

Solución: $n = 2 \times 1 = 2$

$$J = 0.106 \times 2 = 0.212 = 21.2\%$$

$c)$ *Cálculo de la tasa efectiva anual*:

Fórmulas: $e = (1 + i)^n - 1$

Datos: $i = 0.106$, $m = 2$, $n_a = 1$

$$n = m \times n_a$$

Solución: $n = 2 \times 1 = 2$

$$e = (1 + 0.106)^2 - 1 = 0.2232 = 22.3\%$$

$d)$ *Interpretación*:

Existe una diferencia de 1.1 puntos porcentuales lo que representa un 5.2% mayor la tasa efectiva de la tasa nominal anual.

Ejercicio 14. Un deudor requiere pagar hoy \$175,000.00 pero al no disponer de esa cantidad acuerda con el acreedor liquidar en 6 mensualidades de \$31,000.00 cada una la 1ª de ellas dentro de un mes.

a) Calcular la tasa por período de esta operación financiera.

b) Obtener su tasa nominal anual.

c) Obtener la tasa efectiva anual.

d) Interpretar resultados.

$a)\ Cálculo\ de\ la\ tasa\ mensual:$

Fórmulas: $\frac{C}{R} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

$n = m \times n_a$

Datos:

$C = 175{,}000.00$

$R = 31{,}000.00$

$m = 12$

$n_a = 0.5$

Solución: $n = 12 \times 0.5 = 6$

$$\frac{175{,}000}{31{,}000} = 5.645161 = \frac{1-(1+i)^{-6}}{i}$$

$$Si\ \ i = 0.02 \qquad \frac{1-1.02^{6}}{0.02} = 5.601431$$

$$Si\ \ i = 0.018 \qquad \frac{1-1.018^{6}}{0.018} = 5.639435$$

$$Si\ \ i = 0.0177 \qquad \frac{1-1.0177^{6}}{0.0177} = 5.645169$$

$$\therefore\ \ i = 0.0177\ mensual = 1.77\%\ mensual$$

$b)\ Cálculo\ de\ la\ tasa\ nominal:$

Fórmulas: $J = i \times n$ Datos: $i = 0.0177$, $m = 12$, $n_a = 1$

$$n = m \times n_a$$

Solución: $n = 12 \times 1 = 12$

$$J = 0.0177 \times 12 = 0.2124 = 21.2\%$$

$c)$ *Cálculo de la tasa efectiva anual*:

Fórmulas: $e = (1+i)^n - 1$ Datos: $i = 0.0177$, $m = 12$, $n_a = 1$

$$n = m \times n_a$$

Solución: $n = 12 \times 1 = 12$

$$e = (1+0.0177)^{12} - 1 = 0.2343 = 23.4\%$$

$d)$ *Interpretación*:

Existe una diferencia de 2.2 puntos porcentuales lo que representa un 10.4% mayor la tasa efectiva de la tasa nominal anual.

3.3. Anualidades anticipadas

A diferencia de las anualidades vencidas, –que se pagan al final de cada periodo– las anticipadas se cubren al comienzo de cada periodo.

```
Ordinarias:          R     R     R     R     R
               |_____|_____|_____|_____|_____|
               |     |     |     |     |     |
Anticipadas:   R     R     R     R     R
```

En las **anualidades ordinarias**, la primera anualidad se paga al final del periodo, mientras que en las anticipadas se realiza al comenzar el mismo. Por eso, el pago de la última renta ordinaria coincide con la terminación del plazo de tiempo estipulado en la operación, esto hace que no produzca intereses y que su inversión se haga solamente como complemento del monto de las rentas. En tanto, en las **anualidades anticipadas**, la última renta se paga al principio del último periodo: sí produce intereses.

3.3.1. Fórmulas para calcular el monto futuro de una anualidad simple, cierta, anticipada.

Se conoce la renta, la tasa nominal, la frecuencia de conversión y el plazo de tiempo:

$$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i) \quad \text{o también:} \quad M = R\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1\right] \text{............ (41)}$$

siendo: $i = \frac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$

Ejercicio 15. Si se hacen 6 depósitos trimestrales anticipados de $25,000.00 cada uno con una tasa del 20% capitalizable trimestralmente, ¿cuál es el monto futuro?

R = $25,000.00 trimestrales

i = 20% capitalizable trimestralmente = 0.20/4 = 0.05 trimestral

n = 6 trimestres

M =

a). ARITMÉTICAMENTE

1ª. renta (principio del primer trimestre)	$25,000.00
Intereses por el primer trimestre	1,250.00
2ª. renta (principio del segundo trimestre)	25,000.00
Monto al final del primer trimestre	51,250.00
Intereses por el segundo trimestre	2,562.50

3ª. renta (principio del tercer trimestre)	25,000.00
Monto al final del segundo trimestre	78,812.50
Intereses por el tercer trimestre	3,940.63
4ª. renta (principio del cuarto trimestre)	25,000.00
Monto al final del tercer trimestre	107,753.13
Intereses por el cuarto trimestre	5,387.65
5ª. renta (principio del quinto trimestre)	25,000.00
Monto al final del cuarto trimestre	138,140.78
Intereses por el quinto trimestre	6,907.04
6ª. renta (principio del sexto trimestre)	25,000.00
Monto al final del quinto trimestre	170,047.82
Intereses por el sexto trimestre	8,502.39
Monto al final del sexto trimestre	$178,550.21

b). POR FÓRMULA

Fórmulas: $$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)$$

Datos:

$$R = 25,000$$
$$J = 0.20$$
$$m = 4$$
$$n = 6$$

$$i = \frac{J}{m} \quad y \quad n = n_a \times m$$

Solución: $$i = \frac{0.20}{4} = 0.05$$

$$M = 25,000\frac{(1+0.05)^6 - 1}{0.05}(1+0.05)$$
$$M = 178,550.21$$

Ejercicio 16. a) Obtener el monto que se acumula en 2 años si se depositan \$1,500.00 al inicio de cada mes en un banco que abona una tasa del 12.5% anual capitalizable por meses.

b) Obtener el monto si se hacen depósitos de un 20% más.

c) Interpretar resultados.

$a)\ Monto\ de\ una\ anualidad\ anticipada:$

Fórmulas: $M = R\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)$ Datos: $R = 1{,}500$, $J = 0.125$, $m = 12$, $n_a = 2$

$$i = \frac{J}{m} \quad y \quad n = n_a \times m$$

Solución: $i = \dfrac{0.125}{12} = 0.010417 \qquad n = 2 \times 12 = 24$

$$M = 1{,}500\frac{(1+0.010417)^{20} - 1}{0.010417}(1+0.010417)$$
$$M = 41{,}084.44$$

$b)\ Si\ se\ deposita\ un\ 20\%\ más:$

Fórmulas: $M = R\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)$ Datos: $R = 1{,}500 \times 1.20 = 1{,}800$, $J = 0.125$, $m = 12$, $n_a = 2$

$$i = \frac{J}{m} \quad y \quad n = n_a \times m$$

Solución: $i = \dfrac{0.125}{12} = 0.010417 \qquad n = 2 \times 12 = 24$

$$M = 1{,}800\frac{(1+0.010417)^{20}-1}{0.010417}(1+0.010417)$$
$$M = 49{,}301.33$$

$c)$ *Interpretación*:

El monto aumentará también un 20% ya que la renta es independiente de los demás factores.

3.3.2. Fórmulas para calcular el valor presente de una anualidad simple, cierta, anticipada.

$$C = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i) \quad \text{o también:} \quad C = R\left[1+\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right] \text{.................. (42)}$$

en donde: $i = \dfrac{J}{m}$ $\quad y \quad$ $n = n_a \times m$

Ejercicio 17. ¿Cuál es el capital de 6 depósitos trimestrales anticipados de $25,000.00 si se calculan con 20% compuesto trimestralmente?

Fórmulas: $C = R\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)$

Datos:
$R = 25{,}000.00$
$J = 0.20$
$m = 4$
$n = 6$

$$i = \frac{J}{m} \quad y \quad n = n_a \times m$$

Solución: $i = \dfrac{0.20}{4} = 0.05$

$$C = 25,000\frac{1-(1+0.05)^{-6}}{0.05}(1+0.05)$$

$$C = 133,233.92$$

Ejercicio 18. Una persona alquila un local acordando pagar $2,750.00 de renta mensual. Sin embargo por motivo de viaje desea adelantar un año de renta.

a) Calcular el valor de esa renta anticipada si la tasa de rendimiento en un banco es del 16.5%.

b) Si la tasa fuera de un 15.5% ¿Cuál sería el pago adelantado de un año?

c) Interpretar resultados.

$a)\ Valor\ actual\ de\ una\ anualidad\ anticipada:$

Fórmulas: $C = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)$

Datos: $R = 2,750$, $J = 0.165$, $m = 12$, $n_a = 1$

$$i = \frac{J}{m} \quad y \quad n = n_a \times m$$

Solución: $i = \frac{0.165}{12} = 0.013750 \qquad n = 1 \times 12 = 12$

$$C = 2,750\frac{1-(1+0.01375)^{-12}}{0.01375}(1+0.01375)$$

$$C = 30,646.20$$

$b)\ Tasa\ del\ 15.5\%:$

Fórmulas: $C = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)$

Datos: $R = 2,750$, $J = 0.155$, $m = 12$, $n_a = 1$

$$i = \frac{J}{m} \quad y \quad n = n_a \times m$$

Solución: $i=\frac{0.155}{12}=0.012917 \qquad n=1\times 12=12$

$$C=2{,}750\frac{1-\left(1+0.012917\right)^{-12}}{0.012917}\left(1+0.0112917\right)$$

$$C=33{,}531.13$$

$c)\ Interpretación:$

Si la tasa es menor en un punto porcentual, el pago adelantado inicial aumenta en $ 2,884.93 lo que representa un incremento del 9.41%.

3.3.3. Fórmulas para calcular la renta de una anualidad simple, cierta, anticipada.

a) Si se conoce el capital inicial, la tasa de interés nominal o por periodo de capitalización, la frecuencia de conversión y el plazo de tiempo o número de periodos de capitalización:

$$R=\frac{Ci}{1+i-\left(1+i\right)^{-n+1}} \quad \text{...} \ (43)$$

siendo: $i=\frac{J}{m} \quad y \quad n=n_a\times m$

b) Si se conoce el monto futuro, la tasa de interés nominal o por periodo de capitalización, la frecuencia de conversión y el plazo de tiempo o número de periodos de capitalización:

$$R=\frac{Mi}{\left(1+i\right)^{n+1}-i-1} \quad \text{...} \ (44)$$

siendo: $i=\frac{J}{m} \quad y \quad n=n_a\times m$

Ejercicio 19. ¿De cuánto es cada uno de 6 pagos trimestrales anticipados que se deben realizar para liquidar una deuda de $133,236.92, si se impone una tasa de interés de 20% compuesto trimestralmente?

Fórmulas: $R=\frac{Ci}{1+i-(1+i)^{-n+1}}$ Datos: $C=133,236.92$

$J=0.20$

$m=4$

$n=6$

$$i=\frac{J}{m}$$

Solución: $i=\frac{0.20}{4}=0.05$

$$R=\frac{133,236.92\times 0.05}{1+.05-(1+.05)^{-6+1}}$$

$$R=25,000.00$$

Ejercicio 20. Una persona debe pagar $102,500.00 dentro de 2 años y para reunir esa cantidad decide efectuar 12 depósitos bimestrales en una cuenta de inversión que otorga el 12.3%.

a) ¿De qué cantidad deben ser los depósitos si hoy hace el 1°?

b) Si prefiere hacer sólo 10 pagos ¿Qué sucede?

c) Interpretar resultados.

$a)$ *Cálculo de la renta*:

Fórmulas: $R=\dfrac{Mi}{(1+i)^{n+1}-i-1}$ Datos: $M=102{,}500.00$

$J=0.123$

$m=6$

$n_a=2$

$$i=\frac{J}{m} \quad y \quad n=n_a\times m$$

Solución: $i=\dfrac{0.123}{6}=0.0205 \quad n=2\times 6=12$

$$R=\frac{102{,}500\times 0.0205}{(1+0.0205)^{12+1}-0.0205-1}$$

$$R=7{,}467.81$$

$b)$ 10 *pagos*:

Fórmulas: $R=\dfrac{Mi}{(1+i)^{n+1}-i-1}$ Datos: $M=102{,}500.00$

$J=0.123$

$m=6$

$n_a=1.666667$

$$i=\frac{J}{m} \quad y \quad n=n_a\times m$$

Solución: $i=\dfrac{0.123}{6}=0.0205 \quad n=1.66667\times 6=10$

$$R=\frac{102{,}500\times 0.0205}{(1+0.0205)^{10+1}-0.0205-1}$$

$$R=9{,}151.98$$

$c)$ *Interpretación*:

Al realizar sólo 10 depósitos en lugar de 12 (16.7% menos), el monto de los depósitos se incrementan en un $ 1,684.17 o sea un 22.6% más.

3.3.4. Fórmulas para calcular el tiempo o plazo en una anualidad simple, cierta, anticipada.

a) Si se conoce el capital inicial, la renta, la tasa nominal o la tasa efectiva por periodo y la frecuencia de conversión:

$$n = 1 - \frac{Ln\left(1 + i - \frac{Ci}{R}\right)}{Ln\ (1+i)} \quad \text{.. (45)}$$

en donde: $i = \frac{J}{m}$

b) Si se conoce el monto futuro, la renta, la tasa nominal o la tasa efectiva por periodo y la frecuencia de conversión:

$$n = \frac{Ln\ \left(1 + i + \frac{Mi}{R}\right)}{Ln\ (1+i)} - 1 \quad \text{... (46)}$$

en donde: $i = \frac{J}{m}$

Ejercicio 21. ¿Cuántos depósitos trimestrales anticipados de \$25,000.00, con una tasa de 20% capitalizable trimestralmente se deben hacer para obtener un monto de \$178,550.21?

Fórmulas:

$$n = \frac{Ln\ \left(1 + i + \frac{Mi}{R}\right)}{Ln\ (1+i)} - 1$$

$$i = \frac{J}{m}$$

Datos:

$$M = 178,550.21$$
$$R = 25,000.00$$
$$J = 0.20$$
$$m = 4$$

$$i = \frac{0.20}{4} = 0.05$$

Solución: $$n = \frac{Ln\left(1 + 0.05 + \frac{178,551.21 \times 0.05}{25,000}\right)}{Ln\ (1 + 0.05)} - 1$$

$$n = 6\ trimestres$$

Ejercicio 22. Una persona desea jubilarse al reunir $500,000.00 mediante depósitos mensuales anticipados de $2,000.00. Si la tasa de inversión es del 1.25% mensual, calcular

a) En cuánto tiempo se reunirá esa cantidad.

b) Si los pagos se reducen en un 50% calcular el nuevo plazo.

c) Interpretar resultados.

$a)\ Cálculo\ del\ plazo:$

Fórmulas: $$n = \frac{Ln\left(1 + i + \frac{Mi}{R}\right)}{Ln\ (1+i)} - 1$$

Datos:
$M = 500{,}000$
$R = 2{,}000$
$i = 0.0125$

Solución: $$n = \frac{Ln\left(1 + i + \frac{500{,}000 \times 0.0125}{2{,}000}\right)}{Ln\ (1 + 0.0125)} - 1$$

$$n = 113.315915\ meses = 9\ años\ 5\ meses\ 9\ días$$

$b)\ Pagos\ se\ reducen\ en\ un\ 50\%:$

Fórmulas: $$n = \frac{Ln\left(1 + i + \frac{Mi}{R}\right)}{Ln\ (1+i)} - 1$$

Datos:
$M = 500{,}000$
$R = 1{,}000$
$i = 0.0125$

Solución: $$n=\frac{Ln\left(1+i+\frac{500{,}000\times 0.0125}{1{,}000}\right)}{Ln\left(1+0.0125\right)}-1$$

$$n=158.607239\ meses=13\ años\ 2\ meses\ 18\ días$$

$c)$ *Interpretación*:

Al disminuir en un 50% los depósitos mensuales, el plazo de esta operación aumenta en un 40.0% o sea 3 años, 9 meses y 9 días.

3.3.5. Fórmulas para calcular la tasa de interés de una anualidad simple, cierta, anticipada.

Debido a que la tasa de interés se encuentra en el numerador y en el denominador de las formulas de monto y valor actual de una anualidad simple, cierta, anticipada, no se puede despejar por lo que se usa para su cálculo, el **procedimiento** llamado de **prueba** y **error a base de iteraciones sucesivas**.

También se puede utilizar una calculadora programable, calculadora financiera o una computadora con software financiero.

a) Si se conoce el capital inicial, la renta, la frecuencia de conversión y el plazo de tiempo o número de periodos de capitalización.:

$$\frac{C}{R}=1+\frac{1-\left(1+i\right)^{-n+1}}{i} \quad \text{...} (47)$$

siendo: $i=\frac{J}{m}$ y $n=n_a\times m$

b) Si se conoce el monto futuro, la renta, la frecuencia de conversión y el plazo de tiempo o número de periodos de capitalización.:

$$\frac{M}{R}=\frac{\left(1+i\right)^{n+1}-1}{i}-1 \text{...} (48)$$

siendo: $i = \frac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$

Ejercicio 23. ¿Cuál es la tasa de interés si se realizan 6 depósitos trimestrales anticipados de $25,000.00 para obtener un monto de $178,550.21?

Fórmulas: $\frac{M}{R} = \frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1$

Datos:
$M = 178,550.21$
$R = 25,000.00$
$m = 4$
$n = 6$

Solución:

$$\frac{178,550.21}{25,000} = \frac{(1+i)^{6+1} - 1}{i} - 1 = 7.142008$$

$$Si \;\; i = 0.04 \qquad \frac{(1+i)^7 - 1}{i} - 1 = 6.898294$$

$$Si \;\; i = 0.055 \qquad \frac{(1+0.055)^7 - 1}{0.055} - 1 = 7.266894$$

$$Si \;\; i = 0.05 \qquad \frac{(1+0.05)^7 - 1}{0.05} - 1 = 7.102008$$

$$\therefore \;\; i = 0.05 \, trimestral = 20\% \, anual$$

Ejercicio 24. A qué tasa de interés anual 5 depósitos anuales anticipados de $50,000.00 equivalen a un valor actual de $200,000.00.

Fórmulas: $$\frac{C}{R}=1+\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}$$

Datos:

$C = 200{,}000.00$

$R = 50{,}000.00$

$m = 1$

$n_a = 5$

$$n = m \times n_a$$

Solución: $$n = 1 \times 5 = 5$$

$$\frac{200{,}000}{50{,}000} = 4 - 1 = 3 = \frac{1-(1+i)^{-4}}{i}$$

$$Si \;\; i = 0.15 \qquad \frac{1-1.15^{-4}}{0.15} = 2.854978$$

$$Si \;\; i = 0.13 \qquad \frac{1-1.13^{-4}}{0.13} = 2.974471$$

$$Si \;\; i = 0.125 \qquad \frac{1-1.25^{-4}}{0.125} = 3.005639$$

$$\therefore \;\; i = 0.125 \; anual \; = 12.5\% \; anual$$

3.4. Anualidades diferidas

Cuando la serie de pagos se inicia en alguna fecha futura, decimos que su pago se aplaza o se difiere. En este tipo de anualidades, hay dos tiempos:

a. Diferido o intervalo de aplazamiento, en el que no se realiza pago alguno. Se le llama *r*.
b. De percepción (*n*).

La gráfica siguiente ejemplifica el caso de anualidades ordinarias diferidas:

```
      .                    R     R     R     R     R    R
  |_____|_____|_____|_____|_____|_____|_____|_____|_____|___|
0     1     2     3     4     5     6     7     8     9   10
```

```
        1        2        3       4        1        2        3        4        5     6
|_____________ ____________||___________________________________|
                    |                                            |
          Tiempo diferido                          Tiempo de percepción
```

Como se ve en el diagrama, el primer pago se realizará en una fecha futura, es decir, al terminar el quinto periodo, y durante cuatro periodos no se hace pago. Es evidente que éste es un caso de anualidades ordinarias diferidas.

3.4.1. Cálculo del monto de anualidades diferidas.

Se utilizan las mismas fórmulas de una anualidad simple cierta ordinaria o anticipada ya que lo único que se modifica es el inicio del primer pago o depósito el cual se efectúa hasta después de transcurrido un intervalo de tiempo desde el momento en que la operación quedó formalizada.

El resultado del monto futuro de una **anualidad diferida** es exactamente el mismo que el de una **anualidad inmediata**.

El monto de las anualidades diferidas vencidas es igual al de las anualidades ordinarias, en las mismas condiciones de importe de la renta, plazo o tiempo y tasa de interés. Esto se debe a que, durante el tiempo diferido, no se realiza ningún pago o depósito. En el ejercicio N° 26 en el inciso b) se considera y comprueba el monto de una anualidad diferida.

3.4.2. Cálculo del valor presente de anualidades diferidas.

Se utilizan las mismas fórmulas de una anualidad simple cierta ordinaria o anticipada ya que lo único que se modifica es el inicio del primer pago o depósito el cual se efectúa hasta después de transcurrido un intervalo de tiempo desde el momento en que la operación quedó formalizada.

En este caso es importante considerar el **plazo diferido** que se llama también **plazo de gracia**, para traer a valor presente al inicio de la operación el **valor actual de la anualidad** simple, cierta, ordinaria.

El valor presente de las anualidades ordinarias coincide con la iniciación del tiempo de pago, en tanto que el valor actual de las anualidades diferidas se sitúa en el comienzo del tiempo diferido. En otras palabras, el valor actual de las anualidades diferidas se calcula a una fecha anterior de aquella a la cual se calcula el valor presente de las anualidades ordinarias. Así, en el ejemplo del diagrama siguiente, el valor actual de las anualidades diferidas se calcularía en el 0, en tanto que, si no existiera el tiempo diferido, y nos encontráramos frente a un caso de anualidades ordinarias, su valor actual se determinaría en el 4.

Para encontrar el valor actual de las anualidades diferidas, se puede calcular el valor presente como si se tratara de anualidades ordinarias, a la fecha en que se inicia el periodo de pago. Conocido ese valor, lo descontamos por el tiempo diferido, para regresarlo, en el tiempo, a la fecha de iniciación del periodo de aplazamiento.

Lo anterior, en forma de diagrama, se expresa de la siguiente manera:

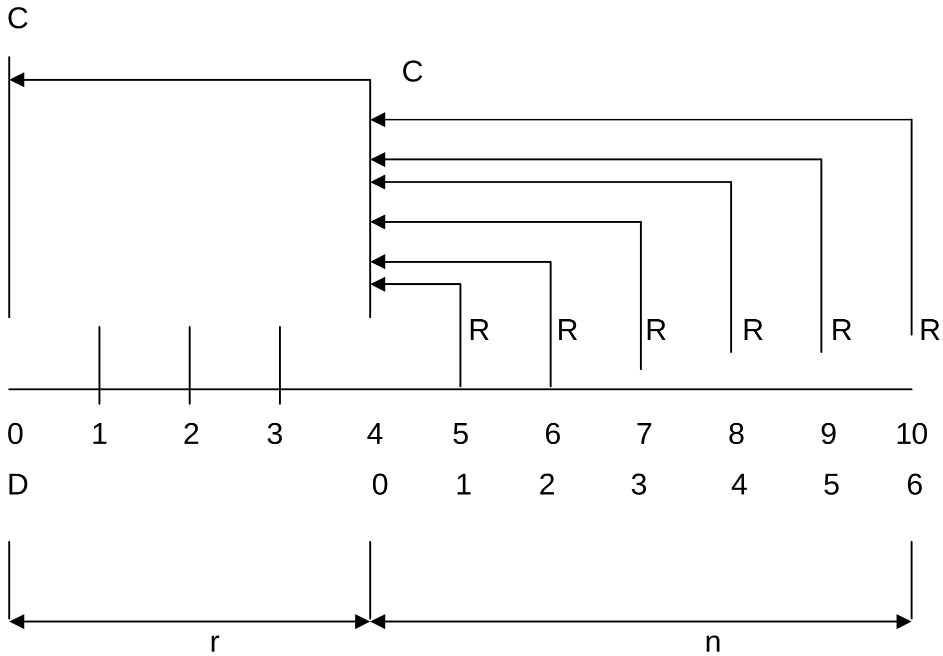


Diagrama 3.1 Valor actual de una anualidad diferida.

Ejercicio 25. ¿Cuál es el valor actual diferido de 6 rentas mensuales, de $25,000.00 cada una, si se comienza a pagar al finalizar el quinto mes, a partir del día de hoy, y la tasa es del 24% convertible mensualmente?

A . A_1 R R R R R R

|______|______|______|______|______|______|______|______|______|______|

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

En el diagrama se ve que el número de pagos que no se realizarán es 4, por lo que:

$a_1)$ *Cálculo de* $A_{1:}$

Fórmulas: $A = R\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ Datos: $R = 25,000.00$, $J = 0.24$, $m = 12$, $n = 6$

$$i = \frac{J}{m}$$

Solución: $i = \dfrac{0.18}{12} = 0.015$

$$A_1 = 25,000\frac{1-(1+0.02)^{-6}}{0.02} \qquad A_1 = 140,035.77$$

$a_1)$ *Cálculo de* A :

Fórmulas: $A = A_1(1+1)^{-n}$ Datos: $A_1 = 140,035.77$, $i = 0.02$, $n = 4$

Solución:

$$A = 140,035.77(1+0.02)^{-4}$$

$$A = 129,371.40$$

Hagamos la comprobación aritmética:

Capital	$129,371.40
Intereses del primer mes	2,587.43
Monto al final del primer mes	131,958.83
Intereses del segundo mes	2,639.17
Monto al final del segundo mes	134,598.00
Intereses del tercer mes	2,691.96
Monto al final del tercer mes	137,289.96
Intereses del cuarto mes	2,745.80
Monto al final del cuarto mes	140,035.76
Intereses del quinto mes	2,800.71
Suma	142,836.47
Menos la primera renta	25,000.00
Capital al final del quinto mes	117,836.47
Intereses del sexto mes	2,356.73
Suma	120,193.20
Menos la segunda renta	25,000.00
Capital al final del sexto mes	95,193.20
Intereses del séptimo mes	1,903.87
Suma	97,097.07
Menos la tercera renta	25,000.00
Capital al final del séptimo mes	72,097.07
Intereses del octavo mes	1,441.94
Suma	73,539.01
Menos la cuarta renta	25,000.00
Capital al final del octavo mes	48,539.01
Intereses del noveno mes	970.78
Suma	49,509.79
Menos la quinta renta	25,000.00

Capital al final del noveno mes	24,509.79
Intereses del décimo mes	490.21
Suma	25,000.00
Menos la sexta renta	25,000.00
Al final del décimo mes	0.00

Lo anterior ha demostrado la exactitud del valor actual que hemos calculado.

Ejercicio 26. Un almacén oferta “compre ahora.... pague después”, un mueble que un comprador recibe el 1° de octubre y debe pagar 12 mensualidades de $1,800.00 a partir del 1° de enero del año siguiente. Si se considera el interés al 18% convertible mensualmente

a) ¿Cuál es el valor de contado?

b) Calcular el monto futuro mediante una anualidad y comprobar con el valor actual a interés compuesto.

$a)\,Valor\ de\ contado:$

$a_1)\,Cálculo\ de\ A_{1:}$

Fórmulas: $$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Datos: $R = 1{,}800$, $J = 0.18$, $m = 12$, $n_a = 1$

$$i = \frac{J}{m} \quad y \quad n = n_a \times m$$

Solución: $$i = \frac{0.18}{12} = 0.015 \qquad n = 1 \times 12 = 12$$

$$A_1 = 1{,}800\frac{1-(1+0.015)^{-12}}{0.015} \qquad A_1 = 19{,}633.51$$

$a_1)$ *Cálculo de A*:

Fórmulas: $A = A_1(1+1)^{-n}$

Datos:

$R = 1{,}800$

$J = 0.18$

$m = 12$

$n_a = 0.166667$

$$i = \frac{J}{m} \quad y \quad n = n_a \times m$$

Solución: $i = \frac{0.18}{12} = 0.015$ $\quad n = 0.166667 \times 12 = 2$

$$A_1 = 19{,}633.51(1+0.015)^{-2} \qquad A_1 = 19{,}057.50$$

$b)$ *Cálculo del monto futuro*:

$b_1)$ *Cálculo del monto futuro anualidad*:

Fórmulas: $M = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}$

Datos:

$R = 1{,}800.00$

$i = 0.015$

$m = 12$

$n_a = 1$

$$n = m \times n_a = 12 \times 1 = 12$$

Solución:

$$M = 1{,}800\,\frac{(1+0.015)^{12} - 1}{0.015}$$

$$M = 23{,}474.18$$

$b_2)$ *Cálculo del monto futuro a* int *erés compuesto*:

Fórmulas: $M = C(1+i)^n$

Datos:

$C = 19{,}057.50$

$i = 0.015$

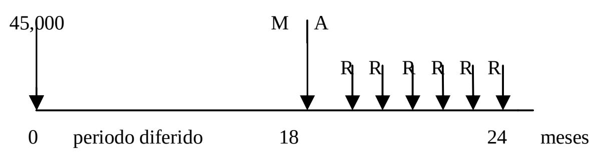
$n = 14\ meses$

Solución: $M = 19{,}057.50(1+0.015)^{14} = 23{,}474.18$

Los resultados son idénticos.

Ejercicio 27. Un capital de \$ 45,000.00 se coloca en un pagaré de una institución financiera que otorga el 8.5% anual durante un año y medio, con el objeto de obtener un monto futuro de capital que cubra una buena parte de la colegiatura de un estudiante. Si se conoce que el costo de la colegiatura es de 75,000.00 para el próximo semestre, calcular el valor presente de la nueva anualidad y el monto de sus pagos si se contempla una tasa de interés del 10.5%.

Monto futuro: *Diagrama* : *Diagrama* :



Fórmula: $M = C(1+i)^n$ $i = \frac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$ Datos: $C = 45{,}000$; $J = 0.085$; $m = 12$; $n_a = 1.5$

Solución: $i = \frac{0.085}{12} = 0.007083$ $n = 1.5 \times 12 = 18$

$$M = 45{,}000 \times 1.007083^{18} = 51{,}096.35$$

Valor presente:

De la nueva anualidad: $A = 75{,}000.00 - 51{,}096.35 = 23{,}903.65$

Cálculo de la renta:

Caso 1): $R^{'} = \frac{Ri}{(1+i)^{n}} - 1$ .... (52)

Interpretación :

Por el pago parcial efectuado de $ 51,096.35 se reduce la anualidad en 3.14 veces por lo que la renta mensual también se reduce en la misma cantidad representando entonces un 61.8% menos por lo que el ahorro financiero es considerable.

Caso general de anualidades

En todos los problemas resueltos hasta el momento, los periodos de capitalización han coincidido con los de pago. Es decir, para rentas trimestrales consideramos la tasa trimestral; para pagos mensuales, tasas mensuales, y así sucesivamente. Sin embargo, hay casos en que los periodos de pago no coinciden con los de capitalización. En estas circunstancias, lo primero que se debe hacer es unificar la tasa de interés a los periodos de pago: si los pagos son semestrales, la tasa de interés también debe estar en forma semestral, y así sucesivamente. Precisamente estos problemas son considerados en las anualidades generales

Existen 2 métodos para convertir las anualidades de tipo general en anualidades simples:

a) **Determinar la tasa de interés equivalente**.

b) **Determinar la renta equivalente.**

A su vez, se pueden presentar 2 casos en relación a los periodos de depósitos o pagos:

1) **Periodo de pago es mas largo que el de capitalización**.

2) **Periodo de capitalización es más largo que el periodo de pago**.

3.5.1. Fórmulas de tasa equivalente

Caso 1): $i^{'} = (1+i)^{p} - 1$ .... (49)

Caso 2): $i = \left(1+i^{'}\right)^{1/p} - 1$ .... (50)

3.5.2. Fórmulas de renta equivalente

Caso 1): $R^{'} = \dfrac{Ri}{(1+i)^{p}} - 1$ .... (51)

Caso 2): $R^{'} = R\dfrac{\left(1+i^{'}\right)^{p} - 1}{i^{'}}$ .... (52)

Luego, para solucionar los casos generales de anualidades, se debe hacer lo siguiente:

a. Determinar las tasas o rentas equivalentes, para que tanto la tasa de interés como los pagos estén en la misma unidad de tiempo.
b. Manejar el problema como una anualidad simple y utilizar la fórmula respectiva, según la anualidad que corresponda a cada ejercicio.

Ejercicio 28. Encontrar el monto y el valor presente de un conjunto de 5 pagos trimestrales vencidos de $ 25,000.00 si el interés es del 21.6% convertible mensualmente. (Caso 1).

$a\ )\ Tasa\ equivalente:$

Fórmulas: $i^{'} = (1+i)^{p} - 1$

Datos:
$J = 0.216$
$m = 12$
$p = 3$

$i = \dfrac{J}{m}$

Solución: $i = \frac{0.216}{12} = 0.018$

$i^{'} = (1+0.018)^{3} - 1 = 0.054978$

$a_1)$ *Cálculo monto futuro* :

Fórmulas: $M = R\frac{(1+i^{'})^{n} - 1}{i^{'}}$

Datos:
$R = 25,000.00$
$i^{'} = 0.054978$
$n = 5$

Solución: $M = 25,000\frac{(1+0.054978)^{5} - 1}{0.054978} = 139,521.10$

$a_2)$ *Cálculo valor presente* :

Fórmulas: $A = R\frac{1-(1+i^{'})^{-n}}{i^{'}}$

Datos:
$R = 25,000.00$
$i^{'} = 0.054978$
$n = 5$

Solución: $A = 25,000\frac{1-(1+0.054978)^{-5}}{0.054978} = 106,763.60$

$b)$ *Renta equivalente* :

Fórmulas: $R^{'} = \frac{Ri}{(1+i)^{p}} - 1$

Datos:
$R = 25,000$
$J = 0.216$
$m = 12$
$p = 3$

$i = \frac{J}{m}$

Solución: $i = \frac{0.216}{12} = 0.018$

$$R' = \frac{25,000 \times 0.018}{(1+0.018)^3} - 1 = 8,185.12$$

$b_1)$ *Cálculo monto futuro:*

Fórmulas: $M = R' \frac{(1+i)^n - 1}{i}$

Datos: $R' = 8,185.12$; $i = 0.018$; $n = 15$

Solución: $$M = 8,185.12 \frac{(1+0.018)^{15} - 1}{0.018} = 139,521.15$$

$b_2)$ *Cálculo valor presente:*

Fórmulas: $A = R' \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

Datos: $R = 8,185.12$; $i' = 0.018$; $n = 15$

Solución: $$A = 8,185.12 \frac{1-(1+0.018)^{-15}}{0.018} = 106,763.64$$

Las cantidades de monto futuro y valor presente por los 2 métodos son idénticos.

Ejercicio 29. Obtener el monto y el valor presente de un conjunto de 10 depósitos mensuales vencidos de \$ 5,500.00 si el interés que gana es del 12.8 % con capitalización semestral (Caso 2).

$a)$ *Tasa equivalente:*

Fórmulas: $i^{'} = (1+i)^{1/p} - 1$ Datos: $J = 0.128$, $m = 2$, $p = 6$

$$i = \frac{J}{m}$$

Solución: $$i = \frac{0.128}{2} = 0.064$$

$$i^{'} = (1+0.064)^{1/6} - 1 = 0.010393$$

$a_1)$ *Cálculo monto futuro*:

Fórmulas: $$M = R\,\frac{(1+i^{'})^{n} - 1}{i^{'}}$$ Datos: $R = 5,500.00$, $i^{'} = 0.010393$, $n = 10$

Solución: $$M = 5,500\,\frac{(1+0.010393)^{10} - 1}{0.010393} = 57,644.83$$

$a_2)$ *Cálculo valor presente*:

Fórmulas: $$A = R\,\frac{1-(1+i^{'})^{-n}}{i^{'}}$$ Datos: $R = 5,500.00$, $i^{'} = 0.010393$, $n = 10$

Solución: $$A = 5,500\,\frac{1-(1+0.010393)^{-10}}{0.010393} = 51,982.56$$

$b)$ Renta *equivalente*:

Fórmulas: $R' = R\dfrac{(1+i')^{p}-1}{i'}$ Datos: $R = 5,500$ $i' = 0.010393$ $p = 6$

Solución: $R' = 5,500\dfrac{(1+.010393)^{6}-1}{0.010393} = 33,869.39$

$b_1)$ *Cálculo monto futuro* :

Fórmulas: $M = R'\dfrac{(1+i)^{n}-1}{i}$ Datos: $R' = 33,869.39$ $J = 0.128$ $m = 2$ $n_a = 10/12 = 0.833333$

$$i = \frac{J}{m} \quad y \quad n = n_a \times m$$

$$i = \frac{0.128}{2} = 0.064 \qquad n = 0.833333 \times 2 = 1.666667$$

Solución: $M = 33,869.39\dfrac{(1+0.064)^{1.666667}-1}{0.064} = 57,644.84$

$b_2)$ *Cálculo valor presente* :

Fórmulas: $A = R'\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ Datos: $R = 33,869.39$ $i' = 0.064$ $n = 1.666667$

Solución: $A = 33,869.39\dfrac{1-(1+0.064)^{-1.666667}}{0.064} = 51,982.57$

Las cantidades de monto futuro y valor presente por los 2 métodos son idénticos.

El concepto de anualidad en sus diferentes expresiones tienen una importante aplicación en diversos ámbitos, desde negocios internacionales, empresariales, hasta en operaciones financieras particulares y personales.

En el mundo actual que se caracteriza por la gran facilidad de acceso a la información y el avance en las comunicaciones, proporciona los medios más adecuados para conocer con mayor facilidad los diferentes esquemas de financiamiento y créditos, que están sustentados en operaciones con base en los diversos tipos de anualidades estudiadas. Como ejemplos se tienen los créditos a la vivienda, créditos para la adquisición de automóviles, o para otros fines como son los financiamientos a la educación por medio de instituciones financieras de ahorro y préstamo o del sistema bancario comercial.

Bibliografía del tema 3

AYRES F. *Matemáticas financieras* Serie Schauman, McGraw-Hill, México, 1991.

DIAZ Mata A. y V. M., Gómez Aguilera, *Matemáticas financieras,* McGraw-Hill México, 2003.

PORTUS L. *Matemáticas financieras* 3ª. ed., McGraw-Hill, México, 1997.

TOLEDANO Castillo M. A. y Hummmeltine L.E., *Matemáticas financieras*, CECSA, México, 2003.

VILLALOBOS José L., *Matemáticas financieras,* Grupo Editorial Iberoamericano, México, 2001.

VIDAURRI Aguirre Héctor M., *Matemáticas financieras,* Thomson, México, 2004.

Actividades de Aprendizaje

A.3.1. A partir del estudio de la bibliografía específica sugerida estudiar cada uno de los conceptos principales, sus fórmulas y aplicaciones.

A.3.2. Investigue y realice por lo menos 3 ejercicios o problemas situacionales de cada uno de los conceptos estudiados utilizando la bibliografía sugerida.

A.3.3. Elaborar un glosario de los principales conceptos matemáticos estudiados.

A.3.4. Elaborar un listado de fórmulas de cada uno de los conceptos matemáticos estudiados.

A.3.5. Investigar la aplicación de pagos anticipados en las rentas de vivienda.

A.3.6. Estudiar el concepto de "intereses moratorios" y su cálculo utilizando las anualidades.

A.3.7. Investigar y presentar la aplicación de las anualidades diferidas para el financiamiento educativo.

A.3.8. Aplicar el concepto de anualidad general para calcular el plazo e intereses de un crédito hipotecario con renta variable.

A.3.9. Estudiar el concepto de rentas perpetuas y sus aplicaciones.

A.3.10. Visite las páginas www.aulafacil.com, y compare los temas estudiados con la propuesta que se expresa e indique sus conclusiones.

Cuestionario de autoevaluación

1. ¿Cómo se definen las anualidades y la renta de una anualidad?
2. Explique brevemente los conceptos de plazo e intervalo de pago en las anualidades.
3. ¿Qué son el monto y valor presente de una anualidad?
4. Mencione 3 ejemplos de anualidades en la vida real y resalte sus principales características.
5. Indique las diferencias básicas entre una anualidad simple y una anualidad de tipo general.
6. Indique las diferencias básicas entre una anualidad ordinaria y una anualidad anticipada.
7. Indique las diferencias básicas entre una anualidad cierta y una anualidad contingente.
8. Indique las diferencias básicas entre una anualidad inmediata y una anualidad diferida.
9. Explique el significado y utilización de las tasas equivalentes en anualidades.
10. Explique el significado y utilización de las rentas equivalentes en anualidades.

Examen de autoevaluación

1. Cuando se realizan pagos periódicos al final de cada periodo de pago, se trata de una anualidad:
   - **a)** Diferida
   - **b)** Anticipada
   - **c)** Vencida
   - **d)** General
   - **e)** Contingente

2. El factor de ajuste para transformar una anualidad vencida a una anualidad anticipada es:
   - **a)** $(1 + i)^n$
   - **b)** $(1 + i)^{-1}$
   - **c)** $(1 + i)$
   - **d)** A i
   - **e)** A / i

3. El valor actual de 25 rentas quincenales de $1,500 con intereses del 48% capitalizable quincenal es de:
   - **a)** $25,337.83
   - **b)** $29,285.18
   - **c)** $27,237.86
   - **d)** $31,374.65
   - **e)** $32,987.30

4. Cuánto tendrá que pagar anualmente una persona durante los próximos 6 años para liquidar un adeudo de $500 000 si la tasa es del 5.5% anual efectiva

   a) $ 83 333.33

   b) $120 000.00

   c) $ 100 089.47

   d) $ 98 523.45

   e) $ 102 875.35

5. Cuánto acumulará una persona dentro de 4 años, si efectúa $15 000 al final de cada año, en una cuenta de ahorro que paga el 8% anual efectivo

   a) $ 49 681.91

   b) $ 60 000.00

   c) $ 67 591.68

   d) $ 63 696.96

   e) $ 64 392.15

6. Para acumular $90,000.00 con intereses del 18% y una capitalización trimestral, se requiere realizar 16 depósitos trimestrales de:

   a) $4,766.95

   b) $4,242.52

   c) $3,234.56

   d) $3,621.38

   e) $3,961.38

7. ¿Cuántos pagos mensuales de $2,828.32 deben efectuarse para liquidar una deuda de $113,000.00, si se da un enganche del 35% sobre el valor de la deuda y se impone una tasa del 24% capitalizable mensualmente?

   a) 37

   b) 40

   c) 50

   d) 32

   e) 43

8. Si a partir de este momento y en forma anticipada, una persona deposita anualmente 5 pagos de $50 000.00 cada uno, ¿cuánto habrá acumulado si le ofrecen una tasa de interés anual del 8% anual?

a) $316 796.50
b) $293 330.05
c) $199 635.50
d) $215 606.34
e) $232 854.48

9. Cuál es el valor presente de 8 pagos anuales anticipados de $21 750.00 cada uno a una tasa de interés del 8% anual efectiva.

a) $124 989.40
b) $ 231 346.65
c) $249 854.38
d) $132 147.92
e) $134 988.55

10. Un padre desea que su hijo de 5 años reciba después de que cumpla 15 años y en forma vencida $180 000 anuales hasta que cumpla 24 a fin de asegurar sus estudios. ¿Cuánto debe depositar en este momento si el banco le otorga una tasa del 12% anual efectiva?

a) $959 084.92
b) $345 855.65
c) $308 799.70
d) $327 459.71
e) $318 215.32

Tema 4. Amortización

Objetivo particular

Al terminar esta unidad el alumno y aplicará los diversos métodos por los cuales se va extinguiendo gradualmente una deuda. Aprenderá a aplicar las fórmulas adecuadas para obtener el saldo insoluto de capital en cualquier fecha y los derechos adquiridos del deudor en caso de que exista una prenda. También conocerá los mecanismos para crear fondos futuros mediante depósitos periódicos con objeto de amortizar deudas o para cualquier otro propósito.

Temario detallado

4. Amortización

- 4.1 Amortización de una deuda
- 4.2 Tablas de amortización
- 4.3 Fondos de amortización
- 4.4 Tablas de fondos de amortización

Introducción

Una de las aplicaciones más importantes de las anualidades en las operaciones de negocios está representada por el pago de deudas que devengan intereses.

Cuando una deuda se liquida en una serie de pagos periódicos, y de igual valor, y si se paga el interés que se adeuda al momento que se efectúan los pagos, también se estará liquidando una parte del capital inicial. A medida que la deuda se va pagando, se reducirá el interés sobre el saldo insoluto.

4.1. Amortización de una deuda.

Al obtener un préstamo o crédito en efectivo, en bienes o servicios, se contrae una deuda que puede liquidarse con un solo pago al final del plazo o mediante abonos periódicos cuyo importe y frecuencia pueden ser variables o constantes por lo que se dice que el **préstamo se amortiza**.

La palabra **amortización** proviene del latín "*mortis*" (dar muerte). Simboliza ir dando muerte al capital prestado en forma paulatina. En matemáticas financieras, amortizar significa pagar una deuda y sus intereses mediante pagos parciales u abonos, los que pueden ser iguales en valor o variables, efectuados a intervalos de tiempo generalmente.

Por lo tanto, la **amortización** puede definirse como el proceso mediante el cual se extingue gradualmente una deuda y sus intereses por medio de una serie de pagos o abonos al acreedor.

Cada pago u abono efectuado se divide en dos partes: en primer lugar se pagan los intereses adeudados al momento en que se efectúa el pago y el resto se aplica a disminuir el capital o saldo insoluto de capital.

4.1.1. Nomenclatura:

C Representa el capital inicial, llamado también principal. Suele representarse también por las letras A o P (valor presente).

R Es la renta, depósito o pago periódico.

J Es la tasa nominal de interés calculada para un periodo de un año. Se expresa en tanto por uno o tanto por ciento.

i Es la tasa de interés por periodo de tiempo y representa el costo o rendimiento por periodo de capitalización de un capital ya sea producto de un préstamo o de una cantidad que se invierte. Es el cociente de dividir la tasa nominal entre la frecuencia de conversión m

m Es la frecuencia de conversión o de capitalización y representa el número de veces que se capitaliza un capital en un año.

n_a Es el número de años que permanece prestado o invertido un capital.

n Es el número de periodos de que consta una operación financiera a interés compuesto.

SI Es el saldo insoluto de capital o pendiente de amortiza en cualquier fecha.

CA Es el importe de capital por amortizar en cualquier fecha.

DAC Son los derechos del acreedor sobre un bien y se obtienen considerando el saldo insoluto de capital a determinada fecha y en forma porcentual.

DAD Son los derechos adquiridos por el deudor sobre el bien; al y considera la cantidad amortizada a determinada fecha y en forma porcentual.

4.1.2 Determinación del importe del pago periódico para amortizar una deuda.

Se calcula mediante la utilización de la fórmula para el valor presente de una **anualidad simple**, cierta, ordinaria y se considera una **amortización de capital** a base de pagos e intervalos de tiempo iguales.

Se conoce el capital inicial que se adeuda, la tasa de interés nominal o periodo de capitalización, la frecuencia de conversión y el plazo de tiempo o número de periodos de capitalización:

$$R = \frac{Ci}{1-(1+i)^{-n}}$$

siendo: $i = \frac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$

4.2 Tablas de amortización

4.2.1. Tablas de amortización para pagos periódicos.

Una tabla o cuadro de amortización expresa la variación en el tiempo y en cada periodo de los saldos insolutos de capital, las amortizaciones a capital, los intereses causados o generados etc.

También en caso de que exista un bien de por medio como garantía existen **derechos del acreedor** sobre ese bien en un 100% al principio de la operación y van disminuyendo conforme se va pagando el capital adeudado pero, por otra parte, irán aumentando los llamados derechos adquiridos por el deudor conforme va saldando su deuda.

Para construir una tabla se parte del saldo inicial de capital el que se multiplica por la tasa efectiva por periodo para obtener el monto de intereses en ese periodo. Esta cantidad se deduce del importe del pago periódico ya calculado y se obtiene la amortización de capital para ese periodo cuyo nuevo saldo insoluto se obtendrá al deducir esta última cantidad del saldo insoluto anterior. Como la tasa es constante y pagos periódicos iguales se sigue este procedimiento hasta amortizar totalmente la deuda inicial.

Ejercicio 1. Una deuda de $100,000.00 se debe liquidar en 6 pagos mensuales a una tasa del 24% convertible mensualmente.

a) Obtener el valor del pago igual mensual.

b) Elaborar su tabla de amortización.

c) Interpretar resultados.

$a)\ Cálculo\ de\ la\ renta\ mensual:$

Fórmulas: $R = \dfrac{Ci}{1-(1+i)^{-n}}$ Datos: $C = 100{,}000.00$

$J = 0.24$

$m = 12$

$n_a = 0.5$

$$i = \frac{J}{m} \quad y \quad n = n_a \times m$$

Solución: $i = \dfrac{0.24}{12} = 0.02 \qquad n = 12 \times 0.5 = 6$

$$R = \frac{100{,}000 \times 0.02}{1-(1+0.02)^{-6}} \qquad R = 17{,}852.58$$

$b)$ *Tabla de amortización*:

Periodo fin de mes	**Pago mensual**	**Monto Intereses**	**Amortización**	**Saldo Insoluto**	**Derechos deudor**	**DAC %**	**DAD %**
0				100,000.00	0.00	100.0	0.0
1	17,852.58	2,000.00	15,852.58	84,187.42	15,852.58	84.1	15.9
2	17,852.58	1,682.95	16,169.63	67,977.79	32,022.21	68.0	32.0
3	17,852.58	1,359.55	16,493.03	51,484.76	48,515.24	51.5	48.5
4	17,852.58	1,029.70	16,822.88	64,661.88	65,338.12	34.7	65.3
5	17,852.58	693.24	17,159.34	17,502.54	82,497.46	17.5	52.5
6	17,852.58	350.05	17,502.54	0.00	100,000.00	0.0	100.0
$\sum$	107,115.48	7,115.49	100,000.00				

$c)$ *Interpretación*:

Como se puede apreciar en la tabla el pago mensual se conserva idéntico en los 6 periodos mientras que el monto de intereses disminuye en forma importante, mientras que la amortización va creciendo. El saldo insoluto son los derechos del acreedor (DAC) sobre un bien dado en garantía y van disminuyendo en tanto, los derechos adquiridos por el deudor (DAD), van aumentado a medida que va pagando el crédito otorgado. Las últimas columnas se refieren a los porcentajes de estos 2 conceptos.

4.2.2. Fórmula para calcular el saldo Insoluto de capital y los derechos porcentuales del acreedor sobre un bien a determinada fecha

$$SI = C(1+i)^p - R\frac{(1+i)^p - 1}{i} \qquad \text{..................................} \qquad (53)$$

$$DAC = \frac{SI}{C} \times 100 \qquad \text{..} \qquad (54)$$

siendo p el número de periodos transcurridos a la fecha del cálculo.

4.2.3. Fórmula para calcular la cantidad amortizada de capital y los derechos porcentuales del deudor sobre un bien a una fecha determinada.

$$CA = R\frac{(1+i)^p - 1}{i} - C\left[(1+i)^p - 1\right].. \qquad \text{............................} \qquad (55)$$

$$DAD = \frac{CA}{C} \times 100 \qquad \text{...} \qquad (56)$$

siendo p el número de periodos transcurridos a la fecha del cálculo.

4.2.4. Fórmula para calcular el interés contenido en el pago en un periodo determinado.

$$I_p = R\left[1 - (1+i)^{-n+p-1}\right] \qquad \text{...} \qquad (57)$$

siendo p el número del periodo determinado.

Ejercicio 2. Del Ejercicio 1, calcular los derechos del acreedor sobre un bien y los derechos adquiridos del deudor:

a) Al 3er. mes.

b) Al quinto mes.

c) Calcular los intereses contenidos en el mes 3 y en el mes 5.

$a)\ Al\ 3er.\ mes:$

$a_1)\ Derechos\ acreedor:$

Fórmulas: $$SI = C(1+i)^p - R\frac{(1+i)^p - 1}{i}$$ Datos:

$C = 100{,}000.00$

$R = 17{,}852.58$

$i = 0.02$

$p = 3$

$$DAC = \frac{SI}{C}\times 100$$

Solución: $$SI = 100{,}000(1+0.02)^3 - 17852.58\frac{(1+0.02)^3 - 1}{0.02}$$

$$SI = 51{,}484.76$$

En porcentaje: $$DAC = \frac{51{,}484.76}{100{,}000}\times 100$$

$$DAC = 51.5\%$$

$a_2)\ Derechos\ adquiridos\ del\ deudor:$

Fórmulas: $CA = R\frac{(1+i)^p - 1}{i} - C\left[(1+i)^p - 1\right]$ Datos:

$C = 100{,}000.00$
$R = 17{,}852.58$
$i = 0.02$
$p = 3$

$$DAD = \frac{CA}{C}\times 100$$

Solución:

$$CA = 17{,}852.58\frac{(1+0.02)^3 - 1}{0.02} - 100{,}000\left[(1+0.02)^3 - 1\right]$$

$$CA = 48{,}515.24$$

En porcentaje:

$$DAD = \frac{48{,}515.24}{100{,}000}\times 100$$

$$DAC = 48.5\%$$

$b)$ *Al* $5°.$ *mes*:

$b_1)$ *Derechos acreedor*:

Fórmulas: $SI = C(1+i)^p - R\frac{(1+i)^p - 1}{i}$ Datos:

$C = 100{,}000.00$
$R = 17{,}852.58$
$i = 0.02$
$p = 5$

$$DAC = \frac{SI}{C}\times 100$$

Solución:

$$SI = 100{,}000(1+0.02)^5 - 17852.58\frac{(1+0.02)^5 - 1}{0.02}$$

$$SI = 17{,}502.54$$

En porcentaje:

$$DAC = \frac{17{,}502.54}{100{,}000}\times 100$$

$$DAC = 17.5\%$$

$b_2)$ *Derechos adquiridos del deudor*:

Fórmulas: $CA = R\frac{(1+i)^p - 1}{i} - C\left[(1+i)^p - 1\right]$ Datos:

$C = 100{,}000.00$
$R = 17{,}852.58$
$i = 0.02$
$p = 5$

$$DAD = \frac{CA}{C} \times 100$$

Solución:

$$CA = 17{,}852.58\frac{(1+0.02)^5 - 1}{0.02} - 100{,}000\left[(1+0.02)^5 - 1\right]$$
$$CA = 82{,}497.46$$

En porcentaje:

$$DAD = \frac{82{,}497.46}{100{,}000} \times 100$$
$$DAC = 82.5\%$$

$c)$ *Intereses contenidos*:

$c_1)$ *Al 3er. mes*:

Fórmulas: $I_p = R\left[1 - (1+i)^{-n+p-1}\right]$ Datos:

$R = 17{,}852.58$
$i = 0.02$
$p = 3$
$n = 6$

Solución:

$$I_3 = 17{,}852.58\left[1 - (1+0.02)^{-6+3-1}\right]$$
$$I_3 = 1{,}359.55$$

$c_1)$ *Al 5°. mes*:

Fórmulas: $I_p = R\left[1 - (1+i)^{-n+p-1}\right]$ Datos:

$R = 17{,}852.58$
$i = 0.02$
$p = 5$
$n = 6$

Solución:

$$I_3 = 17{,}852.58\left[1 - (1+0.02)^{-6+5-1}\right]$$
$$I_3 = 693.24$$

$d)$ *Interpretación*:

Es factible calcular el saldo insoluto, los derechos adquiridos del deudor y los intereses generados en cualquier periodo de amortización.

4.2.5. Las tablas de amortización a línea recta.

Este sistema para amortizar deudas se caracteriza porque la parte que se amortiza del capital permanece constante. Por lo tanto el pago periódico irá disminuyendo progresivamente y cada abono será siempre menor que el anterior.

4.2.6. Nomenclatura.

R_1	Primera renta.
R_k	Renta en cualquier periodo.
A_m	Amortización constante.
A_k	Capital amortizado hasta cualquier periodo.
i	Tasa por periodo.
n	Número de periodos totales.
k	Número de periodos parciales.
d	Diferencia entre 2 rentas sucesivas.
I	Monto total de intereses.
SI_k	Saldo insoluto del capital en cualquier periodo.
L_k	Liquidación de deudas en cualquier periodo.

4.2.7. Fórmulas para calcular el saldo insoluto en cualquier periodo y la liquidación.

Total de la deuda en ese periodo:

$$SI_k = (n-k)A_m \text{ ......(58)} \qquad L_k = (n-k)A_m + R_k \text{ ..... (59)}$$

en donde: $A_m = \frac{C}{n}$ .... (60) $R_k = R_1 - (k-1)d$ .... (61)

$R_1 = A_m(1+in)$ ... (62) $d = A_m i$ .... (63)

4.2.8. Fórmula para calcular el capital amortizado en cualquier periodo

$$A_k = A_m k \quad ..\qquad ......(64)$$

4.2.9. Fórmula para calcular el monto de intereses totales.

$$I = \frac{Ci}{2}(n+1) \qquad (65)$$

Ejercicio 3. Una deuda de $50,000.00 se tiene que pagar en 5 meses amortizando $10,000.00 por mes a una tasa del 2.5% mensual. Calcular:

a) El valor de la 1ª. renta;

b) La renta al 3er. mes;

c) El pago para liquidar la deuda en el 3er. mes;

d) Intereses totales;

e) Elaborar su tabla de amortización.

a) Cálculo de la primera renta:

Fórmulas: $R_1 = A_m(1+in)$ Datos: $A_m = 10,000.00$, $i = 0.025$, $n = 5$

Solución: $R_1 = 10,000(1+0.025\times 5) = 11,250$

b) Cálculo de la renta 3er. mes:

Fórmulas:

$$R_k = R_1 - (k-1)d$$
$$d = A_m i$$

Datos:

$$R_1 = 11,250$$
$$k = 3$$
$$A_m 10,000$$

Solución:

$$d = 10,000 \times 0.025 = 250$$
$$R_3 = 11,250 - 2 \times 250 = 10,750$$

$c)$ *Liquidación de la deuda 3er. mes*:

Fórmulas:

$$L_k = (n-k)A_m + R_k$$

Datos:

$$R_3 = 10,750$$
$$k = 3$$
$$A_m 10,000$$
$$n = 5$$

Solución:

$$L_3 = (5-3)10,000 + 10,750 = 30,750$$

$d)$ *Intereses totales*:

Fórmulas:

$$I = \frac{Ci}{2}(n+1)$$

Datos:

$$C = 50,000$$
$$i = 0.025$$
$$n = 5$$

Solución:

$$I = \frac{50,000 \times 0.025}{2}(5+1) = 3,750$$

e) Tabla de amortización

Periodo	Amortización	Monto de intereses	Pago mensual	Saldo insoluto
0				50,000
1	10,000	1,250	11,250	40,000
2	10,000	1,000	11,000	30,000
3	10,000	750	10,750	20,000
4	10,000	500	10,500	10,000
5	10,000	250	10,250	0

∑	50,000	3,750	53,750	

En este ejemplo no se incluyeron las columnas de derechos del acreedor (DAC) y de los derechos adquiridos del deudor (DAD) porque no se considera ninguna prenda o activo que garantice el adeudo en el tiempo.

Ejercicio 4. Una deuda de $50,000.00 se tiene que pagar en 5 meses amortizando $10,000.00 por mes. En los 1ros. 3 meses se carga una tasa del 2.5% mensual y los 2 siguientes el 2% mensual. Calcular el valor de los pagos en una tabla de amortización.

Periodo fin de mes	Pago mensual	Monto Intereses	Amortización	Saldo Insoluto	Derechos deudor	DAC %	DAD %
0				50,000	0	100.0	0.0
1	11,250	1,250	10,000	40,000	10,000	80.0	20.0
2	11,000	1,000	10,000	30,000	20,000	60.0	40.0
3	10,750	750	10,000	20,000	30,000	40.0	60.0
4	10,400	400	10,000	10,000	40,000	20.0	80.0
5	10,200	200	10,000	0	50,000	0.0	100.0
∑	53,600	3,600	100,000				

4.3. Fondos de amortización

Es el método por el cual se provee el monto, por medio de una serie de rentas o pagos, para liquidar una deuda. Asimismo funciona para **ahorrar** o **recuperar** el **valor histórico de un activo**. Esto se realiza invirtiendo una serie de pagos iguales, en periodos iguales, durante el lapso de vida útil del bien, con la finalidad de acumular un monto disponible en efectivo para volver a comprar el sustitutivo del activo al término de su uso. Esta práctica es muy **util financieramente**, aun cuando, al llegar al fin de su vida útil, la cantidad acumulada no llegue a cubrir el costo del bien.

En este rubro, se utilizan las fórmulas del monto o valor futuro de las diferentes anualidades, generalmente, la del monto de anualidades ordinarias:

$$R = \frac{Mi}{(1+i)^n - i}$$

4.4. Tablas de fondos de amortización

En este método se utiliza, al igual que en la amortización, una matriz, en donde las columnas se conforman así:

a. La primera expresa los periodos (*n*).
b. La segunda, los depósitos o rentas (*R*).
c. La tercera, los intereses (*I*) del periodo que se devengan, y resulta de multiplicar el saldo final (*M*) del periodo anterior por la tasa de interés (*i*).
d. La cuarta, la cantidad que se acumula al fondo (*CA*), y se calcula sumando la renta (*R*) más los intereses (*I*) del periodo.
e. La quinta, el saldo final (*M*), resultado de la suma del saldo final (*M*) del periodo anterior más la cantidad que se acumula (*CA*) al fondo del periodo.
f. La sexta es el porcentaje de acumulación del fondo.

Los renglones muestran las operaciones de cada uno de los periodos.
Ilustremos lo anterior con el ejercicio siguiente.

Ejercicio 5. ¿Cuál será el depósito anual para acumular, al cabo de 6 años, un monto de $240,000.00, si dichas rentas obtienen un rendimiento de 8% anual? (Los $240,000.00 representan el valor de un activo adquirido hoy, que se pretende reemplazar al final de su vida útil, que es de 6 años).

Fórmulas: $R = \frac{Mi}{(1+i)^n - i}$ Datos: $M = 240,000$ $i = 0.08$ $n = 6$

Solución: $R = \frac{240,000 \times .08}{(1+0.08)^6 - i} = 32,715.69$

Periodos	Rentas (*R*)	Intereses (*I*)	Cantidad que se acumula al fondo (*CA*)	Saldo final o monto (*M*)
N		**(M) anterior por (i)**	**R + I**	**(*M*) anterior más (*CA*)**
1	32,715.69	o-----	32,715.69	32,715.69
2	32,715.69	2,617.26	35,332.95	68,048.64
3	32,715.69	5,443.89	38,159.58	106,208.22
4	32,715.69	8,496.66	41,212.35	47,420.57
5	32,715.69	11,793.65	44,509.34	191,929.91
6	32,715.69	15,354.39	48,070.08	239,999.99 *
Total	196,294.14	43,705.85	239,999.99 *	

Nota; Debido al redondeo de cifras hay una pequeña variación.

Si analizamos la tabla, observamos lo siguiente:

- Las rentas sirven para aumentar la inversión que –al finalizar los periodos de pago– se utiliza para liquidar la deuda, o sustituir el activo al expirar su vida útil.
- Los intereses se agregan a la inversión.
- Si se quiere encontrar el saldo al final de cierto periodo de pago, se calcula con la fórmula del monto de las anualidades ordinarias, tomando en cuenta, en *n*, los depósitos o rentas que se han efectuado hasta ese momento. Por ejemplo, el saldo final al cuarto periodo es:

Fórmulas: $M = R\dfrac{(1+i)^k - 1}{i}$ Datos: $M = 32,715.69$
$i = 0.08$
$k = 4$

Solución: $M_4 = 32,715.69\dfrac{(1+0.08)^4}{0.08} = 147,420.56$

NOTA: la diferencia con $147,420.57 de la tabla se explica por el redondeo que se hizo en la misma.

En este tema se estudiaron los mecanismos más usuales para cancelar una deuda mediante pagos periódicos a interés compuesto. Se describieron también las características y ventajas de los esquemas más usuales de amortización como el de amortización gradual, la amortización constante y la amortización variable.

El conocimiento de esta temática es muy importante ya que la adecuada comprensión, capacidad y habilidad para determinar como se amortizan los créditos, representan una ventaja considerable para quienes se ven en la necesidad de endeudarse, al hacer la mejor elección tanto de los diversos planes y sistemas de amortización como de la persona o institución que otorgan los créditos o préstamos.

Los depósitos a un fondo de amortización representan la posibilidad de tener un monto futuro para cancelar una deuda mediante un pago único. Sin embargo la creación de fondos se puede constituir para cualquier otro propósito como por ejemplo para la reposición de maquinaria o equipos al término de su vida útil, para gastos de jubilación de personal en las empresas o para adquirir un bien mueble o inmueble en un futuro.

Existen por lo tanto diversos tipos de fondos nombrados de acuerdo al fin que persigan como por ejemplo los fondos de ahorro, fondos vacacionales, fondos para jubilación, para la educación, etc.

Algunas de las principales ventajas al constituir fondos para adquirir un bien o un servicio, son por ejemplo que al pagar de contado se puede obtener algún descuento considerable en el precio de compra. También el comprador evita el pago de altos intereses, cargos y comisiones por comprar a crédito y por otra parte sus depósitos periódicos generan y ganan intereses y lo que es más importante contribuyen a fortalecer el hábito del ahorro. En cuanto a la mayoría de las personas de nivel socioeconómico medio o bajo, se les facilita más liquidar sus deudas mediante pagos periódicos que con pagos de contado.

Bibliografía del tema 4

AYRES F. *Matemáticas financieras* Serie Schauman, McGraw-Hill, México, 1991.

DIAZ Mata A. y V. M., Gómez Aguilera, *Matemáticas financieras,* McGraw-Hill México, 2003.

PORTUS L. *Matemáticas financieras* 3ª. ed., McGraw-Hill, México, 1997.

TOLEDANO Castillo M. A. y Hummmeltine L.E., *Matemáticas financieras*, CECSA, México, 2003.

VILLALOBOS José L., *Matemáticas financieras,* Grupo Editorial Iberoamericano, México, 2001.

VIDAURRI Aguirre Héctor M., *Matemáticas financieras,* Thomson, México, 2004.

Actividades de Aprendizaje

A.4.1. A partir del estudio de la bibliografía específica sugerida estudiar cada uno de los conceptos principales, sus fórmulas y aplicaciones.

A.4.2. Investigue y realice por lo menos 3 ejercicios o problemas situacionales de cada uno de los conceptos estudiados utilizando la bibliografía sugerida.

A.4.3. Elaborar un glosario de los principales conceptos matemáticos estudiados.

A.4.4. Elaborar un listado de fórmulas de cada uno de los conceptos matemáticos estudiados.

A.4.5. Estudiar el concepto de “plusvalía” en bienes inmuebles y las condiciones financieras al realizar traspasos de propiedad.

A.4.6. Investigar las características de ventas a plazos en 3 las principales tiendas departamentales y su expresión en tablas de amortización.

A.4.7. Investigar y expresar las diversas opciones que ofrecen las principales instituciones bancarias de créditos hipotecarios para la adquisición de vivienda.

A.4.8. Investigar y expresar las diversas opciones que ofrecen las principales instituciones bancarias de créditos para la compra de automóviles.

A.4.9. Estudiar la creación de fondos de renta variable en grupos utilizando incrementos aritméticos y geométricos.

A.4.10. Visite las páginas www.aulafacil.com, y compare los temas estudiados con la propuesta que se expresa e indique sus conclusiones.

Cuestionario de autoevaluación

1. Explique brevemente en qué consiste la amortización de una deuda en forma gradual.
2. Explique brevemente en qué consiste la amortización de una deuda con pago periódico constante, tasa fija y plazo fijo.
3. ¿Qué fórmula se utiliza para calcular los pagos iguales en una operación de amortización?
4. Explique brevemente en qué consiste la amortización de una deuda con amortización constante.
5. ¿Cuál es la diferencia entre los derechos del acreedor y los derechos adquiridos del deudor?
6. ¿Cómo se calcula el saldo insoluto de un crédito en cualquier periodo de amortización?
7. ¿Qué otros tipos de amortización conoce? Indique sus características.
8. ¿Qué características tiene un fondo de amortización?
9. ¿Qué fórmula se utiliza para calcular el depósito igual en un fondo de amortización?

10. ¿Qué fórmula se utiliza para calcular el monto del fondo en cualquier periodo seleccionado?

Examen de autoevaluación

1. ¿En cuántos pagos mensuales vencidos de $2,711.43 se liquidaría una deuda de $75,000.00 con una tasa del 18% compuesto mensualmente?
   - **a)** 33
   - **b)** 28
   - **c)** 36
   - **d)** 32
   - **e)** 30

2. ¿Cuál es el importe de la renta o pago periódico anual necesario para amortizar un adeudo de $169 506.69 mediante 10 pagos anuales a una tasa de interés del 12% anual efectiva?
   - **a)** . $16 950.67
   - **b)** . $30 000.00
   - **c)** . $ 9 659.20
   - **d)** . $25 387.35
   - **e)** $31 827.30

3. Al elaborar la tabla de amortización de un préstamo de $10 000.00 a liquidar mediante 4 pagos iguales de $2 754.90 a una tasa de interés anual efectiva del 4%, ¿cuál es el importe de los intereses contenidos en el primer pago de $2 754.90?
   - **a)** $ 400.00
   - **b)** $ 110.20
   - **c)** $ 289.90

d) $ 333.33

e) $ 375.00

4. Al elaborar la tabla de amortización de un préstamo de $10 000.00 a liquidar mediante 4 pagos iguales de $2 754.90 a una tasa de interés anual efectiva del 4%, ¿cuál es el importe del capital contenido en el primer pago de $2 754.90?

a) $ 2 379.90

b) $ 2 644.70

c) $ 2 465.10

d) $ 2 421.27

e) $ 2 354.90

5. Al elaborar la tabla de amortización de un préstamo de $10 000.00 a liquidar mediante 4 pagos iguales de $2 754.90 a una tasa de interés anual efectiva del 4%, ¿cuál es el importe del saldo insoluto del préstamo después de efectuado el primer pago?

a) $ 7 620.10

b) $ 7 355.30

c) $ 7 534.10

d) $ 7 645.10

e) $ 7 578.73

6. Determinar el capital insoluto inmediatamente después de efectuar el tercer pago de $ 2754.90, sobre un adeudo de $10 000.00 a liquidar mediante 4 pagos iguales de $2 754.90, si se considera una tasa de interés del 4% anual.

a) $ 2 648.94

b) $ 1 735.30

- **c)** $ 7 351.06
- **d)** $ 1 939.26
- **e)** $ 2 810.83

7. ¿Cuál es el importe del saldo insoluto después de efectuado el último pago para saldar una deuda?
   - **a)** El monto de los pagos efectuados
   - **b)** El monto de los intereses
   - **c)** Cero
   - **d)** El total del adeudo
   - **e)** El interés del último pago

8. Para acumular $110,000.00 en un plazo de 18 meses, la renta vencida que se debe depositar mensualmente con una tasa de interés del 15% convertible mensualmente es de:
   - **a)** $6,111.11
   - **b)** $5,178.91
   - **c)** $5,487.37
   - **d)** $5,983.32
   - **e)** $5,200.00

9. Para acumular $110,000.00 en un plazo de 18 meses, con rentas mensuales de $5,487.37 y una tasa de interés del 15% convertible mensualmente, ¿cuánto se llevará acumulado al realizar el depósito número 14?
   - **a)** $76,823.18
   - **b)** $86,041.96
   - **c)** $81,766.48
   - **d)** $83,388.16

e) $77,888.66

10. Cuántos años tardarán depósitos anuales de $25 000.00 para acumular $375 645.14, si otorgan una tasa de interés del 4% anual

a) 10

b) 12

c) 11

d) 15

e) 14

Tema 5. Depreciación

Objetivo particular

El alumno aprenderá y comprenderá el término de depreciación, además aplicará los métodos de línea recta y el de suma de dígitos, utilizados en la depreciación de activos en empresas.

Temario detallado

5. Depreciación

5.1. Conceptos

5.2. Método de línea recta

5.3. Método de suma de dígitos

Introducción

Al predecir el futuro dos tipos de riesgos están involucrados. Uno de ellos es que el activo no haya de rendir como se había pronosticado por descomposturas no previstas, por elevados costos de mantenimiento, baja productividad u obsolescencia anticipada. El otro riesgo es que las futuras condiciones económicas y la demanda para el producto puedan no evolucionar como se esperaba.

Algo muy importante dentro de todos los problemas de presupuesto de capital lo constituye la recuperación de capital invertido.

El determinar el mejor método de recuperación de capital requiere de una comprensión de los métodos de depreciación.

5.1. Conceptos

La **depreciación** se define como la pérdida de valor que sufren los activos fijos principalmente por causas físicas o funcionales.

Por **causas físicas** se refiere al desgaste producido por el uso o la acción de elementos naturales o por la combinación de ambos.

Las **causas funcionales** se presentan por obsolescencia o por insuficiencia.

La primera es cuando el activo fijo se retira porque resulta anticuado por mejores técnicas o por nuevas invenciones.

Respecto a la segunda se observa cuando el activo fijo no puede hacer frente al servicio que de él se exige. El valor efectivo de la depreciación es aquel que actúa primero para acabar la vida útil del activo.

Al terminar la vida útil de un activo fijo, se puede reemplazar. Para llevar a cabo el reemplazo o **reposición de los activos** será necesario crear un fondo de reserva el cual se forma separando en forma periódica ciertas cantidades de dinero para ese fin.

Desde el punto de vista fiscal o impositivo, los tiempos y porcentajes de los cargos por depreciación autorizados se aplican según diversos métodos de depreciación.

El costo original de un activo menos la depreciación acumulada a una fecha determinada se denomina **valor en libros** y representa el valor que aun tiene el activo en los registros contables de una empresa.

Cuando un activo fijo ha llegado al final de su vida útil tiene un valor de rescate conocido también como valor de deshecho o de salvamento.

Puede ser nulo cuando el activo se convierte en un total desperdicio; puede ser positivo cuando existe una recuperación económica.

Puede ser negativo si se requiere un gasto adicional para su remoción o retiro.

5.1.1. Esquemas de depreciación.

Se estudiarán los métodos más usuales de depreciación de activos como son el método de la línea recta y el método de suma de dígitos.

5.1.2. Nomenclatura.

C Representa el costo original del activo.

S Es el valor de salvamento o de deshecho.

B Es la base de depreciación del activo fijo.

n Es la vida útil calculada en años.

d Es la tasa de depreciación anual.

N Número de unidades de producción o de servicio.

P_k Número de unidades de producción o servicio acumuladas al año k.

D_k Depreciación anual en el año k.

A_k Depreciación acumulada al final del año k.

V_k Valor en libros al final del año C.

5.2. Método de línea recta.

Es un método muy utilizado por su simpleza y fácil aplicación. Se basa en el supuesto de que el cargo por depreciación anual es igual para todos los años de la vida útil del activo. La depreciación se calcula dividiendo la base de depreciación entre el número de años de la vida útil del activo.

La depreciación acumulada crece cada año en una cantidad fija y el valor en libros disminuye en la misma cantidad.

Una desventaja de este método es que no todos los activos pierden valor uniformemente sino en forma más importante en los primeros años de su vida útil. Tampoco toma en cuenta los intereses generados en un fondo de reserva.

5.2.1. Fórmulas para calcular la base de depreciación, el monto de la depreciación, la depreciación acumulada a un año k, y el valor en libros al final del año k.

Base de depreciación: $B = C - S$ .... (66)

Depreciación por año: $D_k = \dfrac{C-S}{n} = \dfrac{B}{n}$ .... (67)

Depreciación acumulada: $A_k = kD_k$ .... (68)

Valor en libros: $V_k = C - kD_k$ ....(69)

Ejercicio 1. Se compra un equipo de cómputo en \$24,000.00 y se calcula una vida útil de 4 años antes de ser reemplazado por un equipo más moderno. Su valor de deshecho se calcula en \$3,500.00.

a) Determínese la depreciación anual por el método de la línea recta.

b) Elaborar su tabla de depreciación.

c) Encontrar su punto de equilibrio.

d) Interpretación

$a)\ Depreciación\ anual:$

Fórmulas: $D_k = \frac{C-S}{n} = \frac{B}{n}$ Datos: $C = 24{,}000.00$ $S = 3{,}500.00$ $n = 4$

Solución: $D_k = \frac{24{,}000 - 3{,}500}{4} = 5{,}125.00$

$b)\ Tabla\ de\ depreciación:$

Años	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros	% depreciación
0	0	0	24,000	0.0
1	5,125	5,125	18,875	21.3
2	5,125	10,250	13,750	42.7
3	5,125	15,375	8,625	64.1
4	5,125	20,500	3,500	85.4
	20,500			14.6

$c)\ Punto\ de\ equilibrio\ E:$

Fórmulas: $A_k = kD_k$ Datos: $C = 24{,}000$ $D_k = 5{,}125$

$V_k = C - kD_k$

Solución:

$$A_k = 5{,}125k$$
$$V_k = 24{,}000 - 5{,}125k$$
$$k = 2.34\ \textit{años}$$
$$A_k = V_k = 12{,}000$$
$$E(2.34,\ 12{,}000)$$

$d)$ *Interpretación*:

La depreciación anual es constante, la depreciación acumulada crece y el valor en libros decrece hasta el valor de salvamento. La abscisa del punto de equilibrio es la relación entre el costo original del activo y el doble de la depreciación anual, en tanto la ordenada es la mitad del mismo costo inicial del activo.

5.3 Método de suma de dígitos.

Es un método en el que la depreciación anual es variable y decrece con el tiempo siendo mayor en los primeros años de vida útil del activo y disminuyendo en los años subsiguientes.

La depreciación anual es una fracción del valor de uso. El denominador de dicha fracción se obtiene numerando los años de la vida útil y se suman después. El numerador para el primer año es igual a la vida útil estimada reduciéndose en una unidad por cada año. La fracción se multiplica por la base de la depreciación y se obtiene el cargo anual.

5.3.1. Fórmulas para calcular la base de depreciación, el denominador de la fracción para la suma de dígitos, la depreciación acumulada a un año k, y el valor en libros al final del año k.

Base de depreciación: $B = C - S$ .... (70)

Denominador de la fracción: $S_v = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ....(71)

Depreciación para el año k: $D_k = \dfrac{n-k+1}{S_v} \times B$ .... (72)

Depreciación acumulada: $A_k = \frac{kB}{2S_v}(2n-k+1)$ .... (73)

Valor en libros: $V_k = C - A_k$ o $V_k = C - \frac{kB}{2S_v}(2n-k+1)$ .... (74)

Ejercicio 2. Se compra un mobiliario de oficina con valor de $26,925.00 y se estima una vida útil de 5 años y tiene un valor de rescate de $6,000.00. Por el método de suma de dígitos:

a) Obtener la base de depreciación. 3.

b) Elaborar su tabla de depreciación.

c) Verificar su depreciación, su depreciación acumulada, y su valor en libros en el año 3.

d) Interpretación

$a)\ Base\ de\ depreciación:$

Fórmulas: $B = C - S$ Datos: $C = 26{,}925.00$, $S = 6{,}000.00$

Solución: $B = 26{,}925 - 6{,}000 = 20{,}925$

$a_1)\ Denominadores\ de\ las\ fracciones:$

Fórmulas: $S_v = \frac{n(n+1)}{2}$ Datos: $n = 5$

Solución: $S_v = \frac{5(5+1)}{2} = 15$

$a_2)\ Numeradores\ de\ las\ fracciones:$

Año 1 2 3 4 5

Numerador	5	4	3	2	1

$a_3)$ *Fracciones*:

Año	1	2	3	4	5
Fracción	$5/15$	$4/15$	$3/15$	$2/15$	$1/15$

$b)$ *Tabla de depreciación*:

Año	**Fracción**	**Base de depreciación**	**Depreciación anual**	**Depreciación acumulada**	**Valor en libros**
0					26,925
1	0.333333	20,925	6,975	6,975	19,950
2	0.266667	20,925	5,580	12,555	14,370
3	0.200000	20,925	4,185	16,740	10,185
4	0.133333	20,925	2,790	19,530	7,395
5	0.066667	20,925	1,395	20,925	6,000

$c)$ *Verificación al año* 3:

$c_1)$ *Depreciación*:

Fórmulas: $$D_k = \frac{n-k+1}{S_v} \times B$$

Datos:
$B = 20{,}925$
$k = 3$
$n = 5$
$S_v = 15$

Solución: $$D_k = \frac{5-3+1}{15} \times 20{,}925 = 4{,}185$$

$c_2)$ *Depreciación acumulada*:

Fórmulas: $$A_k = \frac{kB}{2S_v}(2n-k+1)$$

Datos:
$B = 20{,}925$
$k = 3$
$n = 5$
$S_v = 15$

Solución: $$A_k = \frac{3\times 20{,}925}{2\times 15}(2\times 5-3+1)=16{,}740$$

$c_2)$ *Valor en libros*:

Fórmulas: $$V_k = C-\frac{kB}{2S_v}(2n-k+1)$$

Datos:
$B = 20{,}925$
$k = 3$
$n = 5$
$S_v = 15$

Solución: $$A_k = 20{,}925-\frac{3\times 20{,}925}{2\times 15}(2\times 5-3+1)=10{,}185$$

o también: $$V_k = C - A_k = 20{,}925-16{,}740=10{,}185$$

$d)$ *Interpretación*:

Este método se utiliza cuando se considera que un activo se deprecia mucho más al principio de su vida útil por lo que su depreciación irá disminuyendo con el tiempo.

La depreciación de activos constituye desde el punto de vista impositivo y fiscal una importante ventaja al registrar en libros esas partidas y, por otra parte, las empresas destinan ciertas cantidades de dinero en forma periódica para la creación de fondos que eviten una descapitalización abrupta al momento de reponer sus activos, cuando dejan de ser útiles o cuando exista la necesidad de costosas reparaciones o simplemente para su mantenimiento.
Por lo tanto y de acuerdo con lo expuesto en este tema, resulta de gran utilidad conocer las particularidades de los diferentes métodos de depreciación de activos en su caso poder conocer su valor real en cualquier momento.

Bibliografía del tema 5

AYRES F. *Matemáticas financieras* Serie Schauman, McGraw-Hill, México, 1991.
CISSELL Robert y Helen Cissell., *Matemáticas financieras*, México, CECSA, 1987.

DIAZ Mata A. y V. M., Gómez Aguilera, *Matemáticas financieras,* McGraw-Hill México, 2003.

PORTUS L. *Matemáticas financieras* 3ª. ed., McGraw-Hill, México, 1997.

TOLEDANO Castillo M. A. y Hummmeltine L.E., *Matemáticas financieras*, CECSA, México, 2003.

VILLALOBOS José L., *Matemáticas financieras,* Grupo Editorial Iberoamericano, México, 2001.

VIDAURRI Aguirre Héctor M., *Matemáticas financieras,* Thomson, México, 2004.

Actividades de Aprendizaje

A.5.1. A partir del estudio de la bibliografía específica sugerida estudiar cada uno de los conceptos principales, sus fórmulas y aplicaciones.

A.5.2. Investigue y realice por lo menos 3 ejercicios o problemas situacionales de cada uno de los conceptos estudiados utilizando la bibliografía sugerida.

A.5.3. Elaborar un glosario de los principales conceptos matemáticos estudiados.

A.5.4. Elaborar un listado de fórmulas de cada uno de los conceptos matemáticos estudiados.

A.5.5. Estudiar y obtener ejemplos de depreciación con “inflación” utilizando el método de la línea recta.

A.5.6. Investigar las características y aplicaciones del método de depreciación por unidades de producción o de servicio.

A.5.7. Estudiar y obtener ejemplos de depreciación con “inflación” utilizando el método de suma de dígitos.

A.5.8. Investigar las características y aplicaciones del método de depreciación por porcentaje fijo.

A.5.9. Investigar las características y aplicaciones de depreciación de activos por el método de fondo de amortización.

A.5.10. Visite las páginas www.aulafacil.com, y compare los temas estudiados con la propuesta que se expresa e indique sus conclusiones.

Cuestionario de autoevaluación

1. ¿Qué es la depreciación de un activo?
2. ¿Cómo se determina la base de depreciación de un activo?
3. ¿Qué es el valor en libros y qué relación tiene con la depreciación acumulada en el método de la línea recta?
4. ¿Qué se entiende por vida útil de un activo?
5. ¿Cuáles son los otros calificativos con que se conoce el valor de rescate?
6. ¿Qué características tiene el método de la línea recta?
7. ¿Cómo se calcula el punto de equilibrio entre la depreciación acumulada y el tiempo?
8. Describa brevemente el método de la suma de dígitos y sus principales características.
9. ¿Cómo se determinan las tasas de depreciación en el método de la suma de dígitos?
10. ¿Cuál es la fórmula para calcular el valor en libros en el método de suma de dígitos?

Examen de autoevaluación

1. El método de depreciación donde el cargo por depreciación es el mismo en todos los años de la vida útil del activo es:
   a) Línea recta
   b) Unidades producidas
   c) Suma de Dígitos
   d) Tasa fija
   e) Fondo de amortización

2. El método de depreciación acelerada, donde el cargo por depreciación anual decrece con el tiempo:
   a) Línea recta
   b) Unidades producidas
   c) Suma de dígitos
   d) Tasa fija
   e) Fondo de amortización

3. Determinar el cargo por depreciación anual por el método de línea recta sobre un activo de valor $75 000.00 valor de rescate de $15 000 a depreciar en 5 años.
   - **a)** $ 15 000.00
   - **b)** $ 12 500.00
   - **c)** $ 13 000.00
   - **d)** $ 12 000.00
   - **e)** $ 11 500.00

4. Si un automóvil de $160 000.00 se deprecia por el método de línea recta en 4 años. ¿Cuál es su valor en libros después de efectuado el tercer cargo por depreciación?
   - **a)** $160 000.00
   - **b)** $ 0.00
   - **c)** $120 000.00
   - **d)** $ 80 000.00
   - **e)** $ 40 000.00

5. Si un automóvil de $160 000.00 se deprecia por el método de línea recta en 4 años. ¿Cuál es el importe de la depreciación acumulada al final del tercer año?
   - **a)** $160 000.00
   - **b)** $100 000.00
   - **c)** $120 000.00
   - **d)** $ 80 000.00
   - **e)** $ 40 000.00

6. Cual es el importe del cargo por depreciación correspondiente al primer año de un activo de $60 000.00 que se deprecia en 4 años por el método de suma de dígitos.

   a) 15 000.00

   b) $24 000.00

   c) $ 6 000.00

   d) $12 500.00

   e) $20 000.00

7. Se adquiere un activo con un costo de $120,000.00 y se calcula que tendrá una vida útil de 6 años, con un valor de salvamento de $30,000.00. ¿Cuál es su cargo por depreciación anual si se utiliza el método de línea recta?

   a) $20,000.00

   b) $10,000.00

   c) $12,000.00

   d) $15,000.00

   e) $18,000.00

8. Se adquiere un activo con un costo de $120,000.00 y se calcula que tendrá una vida útil de 6 años, con un valor de salvamento de $30,000.00. Utilizando el método de suma de dígitos, el numerador del cuarto año es:

   a) 3

   b) 2

   c) 4

   d) 1

   e) 0

9. Se adquiere un activo con un costo de $120,000.00 y se calcula que tendrá una vida útil de 6 años, con un valor de salvamento de $30,000.00. Utilizando el método de suma de dígitos, el denominador de los dígitos es:

a) 21

b) 15

c) 10

d) 14

e) 18

10. Se adquiere un activo con un costo de $120,000.00 y se calcula que tendrá una vida útil de 6 años, con un valor de salvamento de $30,000.00. Utilizando el método de suma de dígitos, la depreciación del cuarto año es:

a) $ 12 857.40

b) $ 24,000.00

c) $ 18,000.00

d) $ 17 142.86

e) $ 20,000.00

Tema 6. Aplicaciones

Objetivo particular

El alumno aprenderá a examinar, conceptuar y clasificar los bonos y obligaciones; además observará los métodos para calcular su precio, cotizaciones y rendimientos.

Temario detallado

6. Aplicaciones

6.1. Bonos y obligaciones

6.2. Valuación de una obligación

6.3. Prima y descuento

Introducción.

Es común que las empresas públicas o privadas necesiten de importantes capitales para financiar sus proyectos, de tal manera que les sería prácticamente imposible conseguirlos de un solo inversionista por lo que se logra la participación de varios inversionistas con la emisión de títulos de crédito que se conocen como bonos u obligaciones los cuales son adquiridos por personas físicas o morales quienes se convierten en prestamistas del organismo emisor

Es común que al conseguir un préstamo en esas condiciones, la empresa emisora se compromete a pagar a los inversionistas una cantidad fija y periódica por concepto de intereses, mediante los cupones adjuntos a los bonos y obligaciones. Asimismo la emisora se obliga a reintegrarles el valor del título de crédito en la fecha de redención o vencimiento.

6.1. Bonos y obligaciones

El **bono** es un título de crédito emitido por un gobierno, a un plazo determinado y que gana intereses a pagar en intervalos de tiempo bien definidos. Por su parte, una obligación es un título de crédito emitido por una empresa, a un plazo determinado y con intereses a pagar en intervalos de tiempo bien definidos. Son utilizados para recabar dinero proveniente de inversionistas, con la obligación de pagarles un interés cada cierto periodo, además de reintegrarles el capital invertido al término del plazo estipulado.

Los **bonos** y **obligaciones** pueden ser registrados o nominativos si tienen el nombre del propietario o pueden ser al portador o no registrados cuando no lo tienen, estos son más comerciales y por tanto más fácilmente negociables.

El nombre de los bonos dependen principalmente del propósito para los que fueron creados, mientras que las obligaciones se clasifican como: indizadas, convertibles o subordinadas, pero principalmente según el respaldo que tienen como son las hipotecarias (garantizadas mediante una hipoteca sobre los bienes propiedad de la emisora), fiduciarias (cuando están garantizadas con un fideicomiso) y quirografarias (si la garantía se fundamenta en el prestigio y solvencia del organismo emisor).

El beneficio que obtiene un inversionista al comprar bonos y obligaciones depende básicamente de la tasa de interés nominal, que es determinada y pagada por el organismo emisor, y la tasa de rendimiento para las ganancias de capital, es decir las utilidades que logra el inversionista.

Es evidente que el beneficio depende también de otros factores como el tiempo que falta para la redención del documento, la periodicidad del pago de intereses a través de los cupones y el valor de redención entre otros.

6.1.1. Fórmula para determinar el precio de mercado de una obligación o bono antes de su redención incluyendo los cupones.

$$C = M\left(1+i\right)^{-n} + R\frac{1-\left(1+i\right)^{-n}}{i} \text{ .... } (75)$$

en donde:

C Precio de mercado.

M Valor de redención.

J Tasa de rendimiento anual.

m Número de capitalizaciones en un año.

i Tasa de rendimiento por periodo: $i = \frac{J}{m}$

n_a Plazo en años, tiempo que hay entre la fecha de compraventa y la fecha de redención.

n Plazo en periodos: $n = m \times n_a$

R Valor de cada cupón: $R = N\frac{r}{m}$ .... (76)

N Valor nominal de la obligación o bono.

r Tasa de interés anual determinada por la emisora.

6.2 Valuación de una obligación

Clasificación

a. **Nominativas**. Tienen el nombre del propietario.
b. **Al Portador**. No poseen el nombre del propietario.
c. **Según el tipo de garantía con que se respaldan**:
   - **Fiduciaria**. Garantía constituida en un fideicomiso.
   - **Hipotecaria**. Avalada con hipoteca sobre bienes que son propiedad del emisor.
   - **Prendaria**. Garantizada por diversos bienes.
   - **Quirografaria**. Garantía que otorga el emisor, por su buena reputación, en cuanto a su cumplimiento con obligaciones contraídas.
d. **Por su manera de generar el interés (i):**
   - **Cupones.** Generalmente tienen impresa la fecha de vencimiento en la cual se deberán pagar los intereses.
   - Algunas obligaciones no presentan cupones, ya que los intereses que se generan son capitalizables y se pagan al vencimiento del documento.
   - Se pueden encontrar otras obligaciones o bonos que no pagan intereses en ninguna ocasión. Este tipo de documentos se vende en un valor menor al nominal, es decir, con descuento (se les llama obligación o bonos de cupón cero).

6.3. Prima y descuento

Datos que contienen:

a. **Fecha de emisión**. Fecha cuando se colocan o emiten los documentos.
b. **Valor nominal**. Cantidad marcada en el documento. Representa el importe de dinero que da el inversionista al emisor, salvo que el título de crédito esté colocado con descuento.
c. **Valor de vencimiento o redención:**

   - **A la par**. Cantidad que el emisor pagará al concluir el plazo pactado (es igual al valor nominal). Es decir, el documento pagará intereses al vencimiento de cada uno de los cupones que tuviera; por tanto, se paga sólo lo que el inversionista aportó al inicio.
   - **Con premio o sobre la par**. El valor de redención es mayor que el valor nominal y ocurre cuando los intereses se capitalizan en cada cierto intervalo de tiempo, pagándose al final del plazo establecido.
   - **Con descuento o bajo la par**. El valor de redención es menor que el nominal, y sucede cuando los documentos se pagan, al inicio del plazo, por un valor menor, es decir, con descuento.

d. **Fecha De Vencimiento O Redención***.* Es la fecha en la cual se debe pagar el título (está estipulada en el mismo documento). Cuando se tiene una cláusula de redención anticipada, se indica que el documento se puede redimir antes de su vencimiento.
e. **Tasa de interés nominal**. Es la tasa utilizada para pagar los intereses del documento. Puede ser:
   - **Fija**. No tiene variación a pesar de las condiciones del mercado.
   - **Variable**. La tasa se ajusta periódicamente de acuerdo con las condiciones del mercado, atándose a una tasa de referencia (CETES o TIIE).
   - **Real**. Sucede cuando el valor nominal se actualiza según la inflación, y sobre ese nuevo valor se calculan los intereses

pactados en los cupones. Se ocupa para que el inversionista esté protegido ante la misma inflación.

Ejercicio 1. Una empresa emite obligaciones por $100 cada una, con un vencimiento a la par dentro de 6 años, y con pagos de interés mensual de 12% anual. Si una persona compra una de las obligaciones,
¿cuál será el importe de cada uno de los pagos a que tiene derecho?
¿Cuál será el interés total que recibirá?
¿Qué cantidad recibirá en total al finalizar el plazo?

Fórmulas:

$$I = Cin$$
$$M = C + I$$
$$i = \frac{J}{m}$$
$$n = n_a \times m$$

Datos:

$$C = 100.00$$
$$J = 0.12$$
$$m = 12$$
$$n_a = 6$$

Solución:

$$i = \frac{0.012}{12} = 0.01 \quad n = 6 \times 12 = 72$$
$$I = 100 \times 0.01 \times 72 = 72$$

$$M = 100 + 72 = 172.00$$

Ejercicio 2. Cierta persona adquiere bonos con un valor nominal de $1000.00 cuya redención es de 15% sobre el valor nominal (sobre la par o con premio), ¿cuál es el valor de redención en un año?

Fórmulas: $M = C\left(1 + in\right)$

Datos:

$$C = 1000$$
$$i = 0.15$$
$$n = 1$$

Solución: $M = 1000\left(1 + 0.15 \times 1\right) = 1{,}150.00$

Ejercicio 3. ¿Qué cantidad se paga por una obligación cuyo valor nominal es de $10,000.00 y se redime en 12% menos de su valor nominal (bajo la par o con descuento)?

Fórmulas: $C = M(1 - dn)$

Datos:
$C = 10,000$
$d = 0.12$
$n = 1$

Solución: $C = 10,000(1 - 0.12 \times 1) = 8,800.00$

Ejercicio 4. Una empresa emitió bonos de $100.00 que vencen a la par dentro de 19 trimestres, con intereses del 21% anual pagaderos cada trimestre. ¿Cuánto deberá pagarse por cada bono el día de hoy si se pretenden rendimientos del 30% anual compuesto por trimestres?

Fórmulas: $$C = M(1+i)^{-n} + R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Datos:
$M = 100$
$i = 0.30$
$m = 4$
$r = 0.21$
$n = 19$

$$R = N\frac{r}{m}$$

Solución: $$R = 100\frac{0.21}{4} = 5.25$$

$$C = 100(1+0.075)^{-19} + 5.25\frac{1-(1+0.075)^{-19}}{0.075} = 77.59$$

En este tema se han estudiado las características principales de los bonos y obligaciones y su comportamiento en el mercado financiero y de valores. Sin embargo es importante señalar que este mercado esta conformado por el mercado de dinero y el mercado de capitales.

En el mercado de dinero se emiten y comercializan instrumentos de crédito que son a corto plazo, que tienen alta liquidez y bajo riesgo por lo que en general, las tasas de rendimiento que ofrecen, son relativamente más bajas que otras opciones de inversión y los más usuales son los valores de renta fija en donde los rendimientos y beneficios se conocen de antemano.

Por otra parte en el mercado de capitales se emiten y negocian valores con características de mediano y largo plazo pero que son de baja liquidez pero de un riesgo alto. Pueden ser de renta fija o variable.

Entre los principales instrumentos del mercado financiero podemos mencionar a los Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES), el pagaré bancario, las aceptaciones bancarias, los ajustabonos o bonos ajustables del gobierno federal, los bonos de desarrollo del gobierno federal (BONDES), los bonos de la tesorería de la federación (tesobonos), el papel comercial, los bonos bancarios, los certificados de participación en plata (ceplatas), los petrobonos, los udibonos, etc.

Como seguramente se ha podido observar y apreciar en los temas tratados en esta presentación, el campo financiero nos ofrece múltiples y muy variadas opciones de conocimiento cuyas aplicaciones son verdaderamente útiles tanto en la vida personal, como la vida familiar y en el desarrollo profesional.

La educación como concepto fundamental, sigue y seguirá siendo un baluarte insustituible para el crecimiento, evolución y consolidación de cualquier país en los aspectos políticos, económicos y sociales y que pretendan como principal objetivo el desarrollo cultural, laboral y en especial el bienestar económico de la comunidad.

En el campo de los negocios en el mundo interior y en el exterior globalizado, toma especial importancia la comprensión, contenido e interpretación de los diversos conceptos que se encuentran en la matemática financiera y que se aplican cotidianamente en una enorme gama de operaciones financieras crediticias, de inversión o en múltiples transacciones de tipo comercial.

Por lo anterior, cobra especial importancia lograr un conocimiento pleno de los conceptos fundamentales matemáticos financieros por parte de los alumnos, y los invitamos y exhortamos a profundizar en ellos y con su práctica profesional poder contribuir con plenitud al bienestar de la sociedad en que vivimos.

Bibliografía del tema 6

AYRES F. *Matemáticas financieras* Serie Schauman, McGraw-Hill, México, 1991.

CISSELL Robert y Helen Cissell., *Matemáticas financieras*, México, CECSA, 1987.

DIAZ Mata A. y V. M., Gómez Aguilera, *Matemáticas financieras,* McGraw-Hill México, 2003.

PORTUS L. *Matemáticas financieras* 3ª. ed., McGraw-Hill, México, 1997.

TOLEDANO Castillo M. A. y Hummmeltine L.E., *Matemáticas financieras*, CECSA, México, 2003.

VILLALOBOS José L., *Matemáticas financieras,* Grupo Editorial Iberoamericano, México, 2001.

VIDAURRI Aguirre Héctor M., *Matemáticas financieras,* Thomson, México, 2004.

Actividades de aprendizaje

A.6.1. A partir del estudio de la bibliografía específica sugerida, estudiar cada uno de los conceptos principales, sus fórmulas y aplicaciones.

A.6.2. Investigue y realice por lo menos 3 aplicaciones situacionales de cada uno de los conceptos estudiados utilizando la bibliografía sugerida.

A.6.3. Elaborar un glosario de los principales conceptos matemáticos estudiados.

A.6.4. Elaborar un listado de fórmulas de cada uno de los conceptos matemáticos estudiados.

A.6.5. Investigar las características de los pagarés y aceptaciones bancarias con ejemplos de aplicación.

A.6.6. Investigar las reglas de emisión de instrumentos gubernamentales como los ajustabonos, los tesobonos y los bondes.

A.6.7. Investigar la historia de las unidades de inversión (UDIS) y su actual utilización en operaciones financieras.

A.6.8. Estudiar el mecanismo de obtención de utilidades al adquirir papel comercial.

A.6.9. Analizar y presentar las formas de calcular el valor de compraventa y tasas de rendimiento de acciones que ofrecen empresas, comerciales, industriales o de servicios.

A.6.10. Visite las páginas www.aulafacil.com, y compare los temas estudiados con la propuesta que se expresa e indique sus conclusiones.

Cuestionario de autoevaluación

1. ¿Cuál es el propósito de una empresa al emitir bonos y obligaciones?
2. Explique brevemente las principales características de un bono.
3. Explique brevemente qué es una obligación y sus diferencias con un bono.
4. ¿De acuerdo con qué criterio se clasifican los bonos?
5. Enumere los elementos esenciales de una obligación o bono.
6. Explique que significa el “descuento” y la “prima en la compra de bonos y obligaciones.
7. ¿Qué significa que una obligación “se redima a 109”?
8. ¿Qué significa que un bono “se redima a 95”?
9. ¿Qué significado tiene que un bono “se redima con prima”?
10. ¿Qué significa que una obligación se compre con “descuento”?

Examen de autoevaluación

1. El documento de crédito emitido por una empresa, que se compromete por escrito a pagar intereses a intervalos regulares de tiempo y a una determinada tasa de interés y al final su valor nominal se llama:
   a) pagaré
   b) certificado de depósito
   c) bono
   d) certificado de la tesorería
   e) papel comercial

2. Los certificados de la tesorería de la federación son emitidos para financiar a:
   a) una empresa en particular
   b) un banco
   c) una casa de bolsa
   d) una fiduciaria
   e) el gobierno federal

3. El valor consignado en un bono se llama
   a) Presente
   b) Nominal
   c) Actual
   d) De redención
   e) Efectivo

4. La fecha en la que la empresa prestataria coloca en el mercado de valores sus obligaciones o bonos se denomina:
   a) Emisión
   b) Redención
   c) Focal
   d) Comparación

e) Compraventa

5. El valor que el prestatario devuelve al tenedor del título al finalizar el plazo en la fecha de vencimiento se llama:
   a) Presente
   b) Nominal
   c) Actual
   d) Redención
   e) Efectivo

6. Una compañía emite bonos por $10,000.00 que devengan intereses trimestrales a una tasa nominal del 24% anual capitalizable trimestralmente, el importe de los intereses de cada cupón es de:
   a) $500.00
   b) $600.00
   c) $800.00
   d) $400.00
   e) $550.00

7. Una compañía emite obligaciones por $1 000.00 que vencerán dentro de 10 años y pagan intereses a razón del 18% convertible semestralmente : Si el señor López compra la obligación a través de una casa de bolsa por la cantidad de $800.00 la estará comprando:
   a) Con descuento
   b) A la par
   c) Con premio
   d) Con prima
   e) Con intereses

8. Una compañía emite obligaciones por $1 000.00 que vencerán dentro de 10 años y pagan intereses a razón del 18% convertible semestralmente : Si el señor López compra la obligación a través de una casa de bolsa por la cantidad de $800.00, que cantidad por concepto de intereses recibirá cada seis meses

a) $180.00

b) $135.00

c) $90.00

d) $120.00

e) $45.00

9. Qué precio debe pagar un inversionista por un bono de valor nominal de $500.00 que paga intereses mensuales a razón de una tasa nominal del 15% anual capitalizable mensualmente y su redención será a la par dentro de 5 años, si desea tener un rendimiento del 18.5% nominal anual, capitalizable mensualmente

a) $443.18

b) $625.00

c) $506.25

d) $493.75

e) $500.00

10. Si la tasa de interés sobre un bono es superior a la de rendimiento sobre el precio de compra, el comprador pagará mas del valor a la par del bono y a esa diferencia se le llama

a) Descuento

b) Valor presente

c) Valor nominal

d) Prima

e) Interés

Bibliografía básica

AYRES F. *Matemáticas Financieras* Serie Schauman, México, McGraw-Hill, 1991, 230 pp.

DÍAZ Mata A. y V. M., Gómez Aguilera, *Matemáticas financieras*, México, McGraw-Hill, 2003,520pp.

PORTUS L., *Matemáticas financieras*, (3ª edición), México, McGraw-Hill, 1997, 435pp.

TOLEDANO Castillo M. A. y Hummelstine L. E., *Matemáticas financieras*, México, CECSA, 2003, 269 pp.

Bibliografía complementaria

CISELL H. y Cisell R., *Matemáticas financieras*, México, CECSA, 2001, 607 pp.

HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ A., *Matemáticas financieras*, México, Ecasa, 2002, 574 pp.

VILLALOBOS José L., *Matemáticas financieras*, México, Prentice Hall, 2001, 482 pp.

VIDAURRI Aguirre Héctor M., *Matemáticas financieras,* Thomson, México, 2004.

RESPUESTAS A LOS EXÁMENES DE AUTOEVALUACIÓN

MATEMATICAS FINANCIERAS

Tema 1	Tema 2	Tema 3	Tema 4	Tema 5	Tema 6
1. d)	1. d)	1. c)	1. c)	1. a)	1. c)
2. c)	2. e)	2. c)	2. b)	2. c)	2. e)
3. a)	3. c)	3. b)	3. e)	3. d)	3. b)
4. b)	4. a)	4. c)	4. d)	4. e)	4. a)
5. d)	5. c)	5. c)	5. d)	5. c)	5. d)
6. d)	6. a)	6. e)	6. c)	6. b)	6. b)
7. b)	7. a)	7. a)	7. c)	7. d)	7. a)
8. a)	8. c)	8. a)	8. c)	8. a)	8. c)
9. c)	9. e)	9. e)	9. d)	9. a)	9. a)
10. b)	10. b)	10. c)	10. b)	10. d)	10. d)