



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO**
FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

EJERCICIOS DE LÍNEAS DE ESPERA

Materia: Matemáticas VI

Ciudad Universitaria a 2 de Junio del 2014

Líneas de Espera.

CONTENIDO

LÍNEAS DE ESPERA

➡ Ejercicio 1	3
➡ Solución del Ejercicio 1	3, 4
➡ Ejercicio 2	6
➡ Solución del Ejercicio 2	6
➡ Ejercicio 3	9
➡ Solución del Ejercicio 3	9

EJERCICIO 1¹

Un promedio de 10 automóviles por hora llegan a un cajero con un solo servidor que proporciona servicio sin que uno descienda del automóvil. Suponga que el tiempo de servicio promedio por cliente es de 4 minutos, y que tanto los tiempos entre llegadas y los tiempos de servicio son exponenciales. Conteste las preguntas siguientes:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que el cajero este ocioso?.
- b) ¿Cuál es el número promedio de automóviles que están en la cola del cajero?.
Se considera que un automóvil está siendo atendido si no está en la cola esperando.
- c) ¿Cuál es la cantidad promedio de tiempo que un cliente pasa en el estacionamiento del banco (incluyendo el tiempo de servicio)?.
- d) ¿Cuántos clientes atenderá el cajero en promedio por hora?.

SOLUCIÓN DEL EJERCICIO 1

Solución: De acuerdo a lo expuesto en el **Problema**; las premisas se están trabajando con un **sistema de colas M/M/1/GD/∞/∞**; cuya información proporcionada es la siguiente:

¹ Tomado del libro Wayne L. Winston, *Investigación de operaciones. Aplicaciones y algoritmos*, México: Thompson, 2005, 1418 pp.

$\lambda = 10$ automóviles por hora.

$\mu = 15$ automóviles por hora.

Por lo tanto:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

- a) Para obtener la probabilidad de que el cajero esté ocioso se determina mediante la siguiente expresión:

$$\pi = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{10}{15} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto la probabilidad de que el cajero estará ocioso será de **1/3**, es decir del **0.3333**, que expresado en porcentaje es del **33.33%** en promedio.

- b) Para determinar el número promedio de automóviles que están en la cola del cajero se procede a determinar **Lq** , de la siguiente forma:

$$Lq = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{(2/3)^2}{1 - (2/3)} = \frac{4}{3}$$

Lo que significa que el número promedio de automóviles que están en la cola del cajero y que este no este esperando es de **4/3 clientes**.

- c) Para determinar la cantidad promedio de tiempo que un cliente pasa en el estacionamiento del banco, se procede a determinar el valor de **W** , de la siguiente forma:

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{\frac{\rho}{\lambda}}{\lambda} = \frac{\frac{(2/3)}{10}}{\lambda} = \frac{(2/3)}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 12$$

Entonces la cantidad promedio de tiempo de que un cliente pasa en el estacionamiento del banco es de **12 minutos** en promedio.

- d) Si el cajero estuviera siempre ocupado, atendería un promedio de **$\mu = 15$ clientes** por hora. Según el inciso a) se sabe que el cajero está ocupado sólo **2/3 partes** del tiempo. Por lo tanto, durante cada hora, el cajero atenderá un promedio de: **$(2/3) * (15) = 10$ clientes**.

Esto significa que este deber ser el caso porque, en el estado estable, 10 clientes llegan cada hora, de modo que 10 clientes, deben dejar el sistema cada hora.

EJERCICIO 2²

Una sucursal de **BBVA Bancomer**; inicia su horario de servicio a partir de las **08:30 horas A. M.**; para terminar su servicio a las **16:00 horas P. M.** Suponiendo que el servicio proporcionado por **BBVA Bancomer** tiene una **distribución de Poisson** y este ha determinado tener una tasa de atención de **45 clientes por hora**: Determine la probabilidad para atender a **0, 1, 2, clientes**.

SOLUCIÓN DEL EJERCICIO 2

Solución: De acuerdo a la información proporcionada; por la sucursal de BBVA Bancomer; primero se obtiene el valor de λ , cuyo resultado es:

$$\lambda = \frac{45 \text{ clientes}}{60 \text{ minutos}} = 0.75$$

Por lo razón del negocio es de 0.75.

Luego se procede a determinar los valores de probabilidad para $X = 0, 1, 2$, de la siguiente forma:

² Elaboración propia.

Para $P(X = 0)$:

$$P(X = 0) = \frac{\lambda^x * e^{-\lambda}}{x!} = \frac{0.75^0 * e^{-0.75}}{0!} = 0.47 = 47 \%$$

Para $P(X = 1)$:

$$P(X = 1) = \frac{\lambda^x * e^{-\lambda}}{x!} = \frac{0.75^1 * e^{-0.75}}{1!} = 0.3525 = 35.25 \%$$

Para $P(X = 2)$:

$$P(X = 2) = \frac{\lambda^x * e^{-\lambda}}{x!} = \frac{0.75^2 * e^{-0.75}}{2!} = 0.1321 = 13.21 \%$$

De acuerdo a los resultados obtenidos por **BBVA Bancomer**, se puede apreciar como conforme el valor de la **variable aleatoria aumenta**; por ende su **probabilidad de ocurrencia disminuye**. Cuando **x es cero** su probabilidad es de **47 %**; mientras que para **x igual a uno** su probabilidad es de **35.25 %** y finalmente para **x igual a dos** el valor de su probabilidad es de **13.21 %**.

Si quisiéramos seguir calculando valores de **X** hasta **45**, veríamos como estos van ir disminuyendo; hasta completar el recorrido de toda la **distribución**, de tal forma que la suma de sus **probabilidades** en forma acumulada nos darán el valor de **1**, lo que implica que deberá cumplir con los axiomas de probabilidad.

EJERCICIO 3³

Una oficina aseguradora de **Met-Life**; ofrece a sus clientes el pago de dividendos correspondientes a los seguros de vida de sus clientes, los cuales son pagaderos en forma anual. Suponiendo que el servicio proporcionado por **Met-Life** tiene una **distribución de Poisson** y por ende este ha determinado tener una tasa de atención de **60 pagos de dividendos**, por hora. Determine la probabilidad para atender a sus clientes en:

- a) Medio minuto o menos.
- b) Un minuto o menos.
- c) Dos minutos o menos.

SOLUCIÓN DEL EJERCICIO 3

Solución: De acuerdo a la información proporcionada por **Met-Life**; primero se obtiene el valor de μ , cuyo resultado es:

$$\mu = \frac{60 \text{ clientes}}{60 \text{ minutos}} = 1$$

Por lo razón del negocio es de 1 cliente por minuto.

³ Elaboración propia

Luego se procede a determinar los valores de probabilidad para los incisos a), b) y c) de la siguiente forma:

Para $P(\text{Medio minuto o menos})$:

$$P(\text{tiempo de servicio} \leq 0.5) = 1 - e^{-\mu t} = 1 - e^{-1 \times 0.5} = 0.3935 = 39.35 \%$$

Para $P(\text{Un minuto o menos})$:

$$P(\text{tiempo de servicio} \leq 1) = 1 - e^{-\mu t} = 1 - e^{-1 \times 1} = 0.6321 = 63.21 \%$$

Para $P(\text{Dos minutos o menos})$:

$$P(\text{tiempo de servicio} \leq 2) = 1 - e^{-\mu t} = 1 - e^{-1 \times 2} = 0.8646 = 86.46 \%$$

De acuerdo a los resultados obtenidos se puede apreciar como conforme el valor de la **variable aleatoria aumenta**; por ende su **probabilidad de ocurrencia aumenta**. Cuando **x es medio minuto o menos** su probabilidad es de **39.35 %**; mientras que para **x un minuto o menos** su probabilidad es de **63.21 %** y finalmente para **x igual a dos minutos o menos** el valor de su probabilidad es de **86.46 %**.